UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

ESCUELA DE POST GRADO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA PROGRAMACIÓN LÍNEAL UTILIZANDO *GEOGEBRA* Y *PHPSIMPLEX* EN EL QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Educación con mención en Educación Matemática

PRESENTADO POR:

Julia Ángela RAMÓN ORTIZ

Huánuco - 2 015

DEDICATORIA

El presente trabajo es dedicado a cuatro personajes importantes en mi vida:

A mi madre Eusebia que me brindó la capacidad de poder desarrollarme como profesional y poder llevar a cabo este trabajo.

A la memoria de mi padre, quien desde su descanso me guía, acompaña y me permite siempre triunfar.

A mi esposo Jesús, quien apostó por mí, me brindó su apoyo incondicional y en ningún momento dudó de mi capacidad impulsándome para el desarrollo de este trabajo y fue la persona que más me motivó para concluir esta tesis.

Y a mi hijo Rodrigo que siempre me alentó al que en algunas ocasiones le quite su tiempo y es el motivo y motor de mi existencia en este mundo terrenal.

AGRADECIMIENTOS

A la Escuela de Postgrado de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán por haber posibilitado estudiar esta mención.

A la plana docente de la maestría en Educación Matemática, quienes coadyuvaron en mi formación académico durante mis estudios.

A los honorables miembros del jurado que desde la presentación del Proyecto me dieron sugerencias atinadas, para la culminación del presente trabajo.

A mis alumnos del quinto grado de la institución educativa "Huancanyacu", con quienes tuve la dicha de hacer el trabajo experimental.

RESUMEN

El presente trabajo de tesis tuvo como propósito elaborar de una propuesta didáctica para llevar acabo la enseñanza de la programación lineal. El trabajo aborda la problemática de los estudiantes para el aprendizaje en el área de matemática y sus aplicaciones cuya enseñanza generalmente está basado en el manejo de algoritmos o reglas preestablecidas (sin uso de recursos tecnológicos existentes, sin relacionar lo intuitivo con lo formal, sin conjugar aspectos algebraicos y gráficos). El marco teórico que sustenta el trabajo se basó en las teorías constructivistas y construccionistas. El proceso metodológico seguido fue de investigación-acción aplicado en estudiantes del quinto grado de educación secundaria durante seis sesiones de clase. El objetivo del trabajo fue diseñar, aplicar y evaluar una secuencia didáctica basada en el uso pertinente del software Geogebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica en el proceso de aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de la programación lineal, a través de problemas contextualizados. El trabajo experimental se desarrolló en dos partes: resolución de ecuaciones usando el método de Gauss y de inecuaciones, mediado por el software Geogebra; resolución de problemas de programación lineal utilizando el método Simplex y gráfico mediado por la página PHPSimplex. Respecto al aprendizaje conceptual, los alumnos asimilaron los conceptos y propiedades de ecuaciones, inecuaciones, función objetivo y restricciones para la resolución de problemas de programación lineal; en lo referente al aprendizaje procedimental los participantes adquieren una disciplina para seguir los pasos en el manejo del método de Gauss y el método Simplex en la resolución del problemas planteados en las sesiones; en lo actitudinal desarrollaron valores de cooperación y colaboración en estudio mediado por el software. En suma, la propuesta didáctica permitió al estudiante coordinar sus actividades matemáticas en forma numérica, algebraica y gráfica, desarrollando sus capacidades de abstracción, razonamiento.

PALABRAS CLAVES: Educación matemática, programación lineal, proceso de optimización, software matemático, región factible.

SUMMARY

The present thesis work was developing a didactic proposal to carry out the teaching of the linear programming. The paper deals with the problem of students for learning in the area of mathematics and its applications whose teaching is usually based on the management of algorithms or rules preset (without use of technological resources existing, without relating the intuitive with the formal, unconjugated algebraic and graphical aspects). The theoretical framework that underpins the work was based on the constructivist theories and constructionists. The methodological process was action-research applied in the fifth grade students of secondary education during six sessions of class. The objective of the study was design, implement, and evaluate a teaching sequence based on the relevant use of PHPSimplex page through algebraic and graphical representation in the process of learning conceptual, procedural and attitude of linear programming, through contextualised problems and software Geogebra. The experimental work was developed in two parts: solving equations using the method of Gauss and inequalities, mediated by the software Geogebra. resolution of linear programming problems using the Simplex method and mediated by PHPSimplex page graphic. As regards the conceptual learning, pupils assimilated the concepts and properties of equations, inequalities, function goal and constraints for the resolution of linear programming problems; in relation to the procedural learning participants acquire a discipline to follow the steps in the management of the Gauss method and the Simplex method in the resolution of the problems raised in the sessions; in the attitudinal developed values of cooperation and collaboration in study mediated by software. In sum, the didactic proposal allowed to the student coordinate their mathematical activities in numerical, algebraic and graphic form, developing its capacities of abstraction, reasoning.

KEY WORDS: Mathematics, linear programming, process optimization, educational software, feasible region.

INTRODUCCIÓN

En el actual mundo del conocimiento y la globalización, las actividades humanas se desarrollan basados en la competitividad y la calidad, convirtiéndose en una prioridad de las distintas actividades humanas el uso de las tecnologías de la información, aprendizaje y comunicación, con la finalidad de mejorar el servicio que brinda tendiente a alcanzar estándares de calidad y productividad que respalde en el camino de ser los primeros, y poder satisfacer a los clientes con un excelente servicio.

Existe la posibilidad de insertar esta visión del mundo global al campo educativa con miras de optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de la matemática, que se ha convertido en los últimos años en una necesidad. Puesto un aprendizaje significativo en el área de la matemática implica la comprensión de texto literal, abstracción de datos desde la información, expresarlo en forma algebraica para luego desarrollarlo en forma algebraica y gráfica con lápiz y papel o mediado por un software matemático.

Esta propuesta pedagógica procura dinamizar la enseñanza-aprendizaje de la matemática en general y de la Programación Lineal en particular en el quinto grado de secundaria, el trabajo de investigación pretende ser una aportación más, tendiente a evitar el fracaso en las matemáticas, a través del proceso de aprendizaje conjugando el lenguaje algebraico y gráfico en el estudio de sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal.

En el trabajo, se propone el diseño, aplicación y evaluación de un software educativo para facilitar y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la programación lineal a través del cálculo algebraico y gráfico, considerando que la Informática en la educación, sobre todo en la Educación Matemática, es un medio poderoso para desarrollar en el alumno sus potencialidades, creatividad e imaginación. Para plasmar este propósito la tesis se encuentra organizada en cinco capítulos concordante con el esquema A de la Escuela de Postgrado:

En el *Primer Capítulo*, se describe la situación problemática detectada en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Programación Lineal en el quinto grado de secundaria, que se realiza sin el uso de Software Geogoebra y PHPSimplex, se formulan las preguntas de investigación, se plantean los objetivos que direccionó el proceso investigativo, para luego formular las hipótesis y describir la viabilidad de la investigación dentro de las restricciones existentes.

En el *Segundo Capítulo*, se describe los fundamentos teóricos en los que se sitúa en el trabajo de investigación; en primer término se hace mención a los antecedentes que precedieron a la presente investigación, tanto a nivel internacional, nacional y local; luego se detalla en forma amplia algunas teorías referidas al ámbito de la educación matemática; luego se detalla en forma explícita la teoría referida a las ecuaciones, inecuaciones y programación lineal, partiendo de su evolución histórica hasta arribar a ejemplos prácticos que fueron replicados en el trabajo experimental en el aula, que hemos obtenido de la revisión bibliográfica, y finalmente, intenta concretar los constructos *concepciones y creencias* que serán objeto de la investigación; también se definen algunos términos claves que se mencionan en la investigación; para luego concluir, con comentarios referidos a las bases epistémicas del tema en estudio.

En el *Tercer Capítulo*, se presenta la metodología de investigación, haciendo especial énfasis en explicar la condición de cualitativa de la investigación, el diseño metodológico utilizado, en la operativización de las variables de la investigación y del sistema de categorías que sirvió para identificar esas variables, también se menciona las técnicas e instrumentos utilizados para el proceso de recolección de datos y análisis e interpretación de los datos.

En el *Capítulo Cuatro*, se expone los resultados obtenidos en el proceso investigativo en las seis sesiones que duró el experimento, poniendo énfasis en el manejo del método algebraico y el método gráfico con el software Geogebra y PHPSimplex. En la misma, se describe en forma las actividades realizadas en las sesiones de clase y de los resultados obtenidos (comparación de aprendizajes supuestos y aprendizajes esperados), que han sido seguidos y guiados de principio a fin por la investigadora.

En el *Capítulo Cinco*, se hace un análisis crítico de los hallazgos obtenidos comparando con los antecedentes, el marco teórico y el logro de hipótesis. Luego, se formulan conclusiones y las sugerencias que podrían ser tomados en cuenta por los directivos, por otros docentes y en la realización de trabajos posteriores.

La investigadora

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CAPÍTULO I
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La situación de la educación alrededor del mundo, en los últimos años, no es tan buena como se trata de presentar, debido a que existen muchas personas analfabetas en la lectoescritura y también en el mundo digital, de acuerdo con la (UNESCO, 2010) existen 774 millones de analfabetos en el mundo entero a pesar que según autoridades se invierte en educación pero la educación no es simplemente una buena universidad ni colegio la educación en cierto punto es la calidad humana y el aporte útil que las personas llegan a ser en la sociedad caso contrario esas personas solo tienen conocimiento mas no una educación.

Los países del tercer mundo, como el nuestro, no tienen el mismo acceso a la educación que los países que son económicamente estables, ya que los gobiernos no han creado las mismas oportunidades de educación para su niñez y la juventud, existiendo una desigualdad marcada ya que solo acceden a una buena educación las personas que tienen altos recursos económicos.

Entre los problemas vigentes en los países en vías de desarrollo se tienen: el elevado índice de desempleo lo que hace que los padres de familia no puedan dar una buena educación a sus hijos, las desigualdades económicas abismales entre los habitantes haciendo que solo tengan acceso a una buena educación las personas que son fuertes económicamente hablando, el poco o aporte del gobierno a los avances de ciencia y tecnología que no permite que se pueda seguir educando a las nuevas generaciones según los adelantos tecnológicos es decir, que se mantenga la forma de educación normal por generaciones.

Para la (UNESCO, 2014) La noción de derecho a la educación ha estado estrechamente ligada a la idea de garantizar el acceso universal a la escuela a través de las leyes de escolaridad obligatoria. Esta visión básica del derecho a la educación como derecho a la escolarización y a la obtención del certificado escolar se ha mostrado insuficiente. Las políticas educativas y la comunidad internacional han evolucionado hacia una redefinición del derecho a la educación como derecho a aprender. Esto implica, entre otras cosas, que recibir una educación de calidad debe ser visto como parte del derecho a la educación.

En Latinoamérica actualmente se tiene en claro el derecho a la educación y a conocer nuevas culturas, por lo que en los últimos años se ha luchado por brindar educación, pero lastimosamente los altos índices de analfabetismo siguen creciendo a pesar del apoyo de países con tecnología y recursos económicos. Según la (UNESCO, 2014) los países de la región ya en el 2000 presentaban un alto nivel de acceso a la educación primaria (tasa neta de matrícula de 94% promedio); además, durante la década pasada tanto la reprobación como la deserción mostraron tendencias favorables a la baja, todo lo cual hizo que las tasas de retención a inicios del presente siglo haya mejorado de manera muy significativa en la mayoría de los países, especialmente los que comenzaron en una situación más retrasada.

La visión multidimensional del derecho a la educación, que incluye el derecho a aprender y a recibir un buen trato en el sistema escolar, sitúa la calidad de la educación en el centro de las preocupaciones. Más aún, dado los importantes avances en cobertura, la agenda de educación para todos en la región estará cada vez más marcada por los desafíos de la calidad, siendo uno de ellos asumir una definición amplia y no reduccionista del concepto de "calidad educativa" (UNESCO, 2014).

Las políticas educacionales no se enfocaron en forma adecuada para asegurar en cada escuela los insumos, las condiciones organizacionales y las capacidades profesionales para generar mejores oportunidades de aprendizaje para todos los alumnos, especialmente los que enfrentan mayores dificultades. Los sistemas externos de evaluación estandarizada y "rendición de cuentas" que se han comenzado a difundir debieran ser concebidos y validados en función de su contribución a mejorar dichas oportunidades de aprendizaje. (UNESCO, 2014)

Se considera que dentro del territorio Latinoamericano faltan políticas que aseguren en primer lugar la infraestructura necesaria para que los habitantes reciban educación, así como sistemas que comprometan a los docentes a brindar una educación de calidad en cualquier sector, ya sea esta pública o privada; en muchos de los casos los gobiernos han tenido que utilizar sus presupuestos de estado en otros menesteres dejando a la educación de lado y haciendo que esto comprometa un atraso para su país.

La educación en el Perú experimentó una expansión notable con logros importantes como son la reducción del analfabetismo; la incorporación creciente de niños y jóvenes al sistema escolar, particularmente de los sectores pobres de la sociedad; la expansión de servicios de educación inicial y superior; una mayor equidad en el acceso y retención por parte de grupos tradicionalmente marginados de la educación tales como las mujeres, los grupos indígenas y la población con necesidades especiales; el creciente reconocimiento de la diversidad étnica, cultural y lingüística y su correspondiente expresión en términos educativos.

1.1.1 Problemas de la educación actual

La educación actual no tiene la misma calidad que la educación del siglo XX, se considera que en tiempos anteriores el nivel era mucho más alto, las personas podían tener una mejor ortografía, caligrafía, eran capaces de realizar operaciones matemáticas sin necesidad de la tecnología e inclusive se dice tenían una mejor educación en valores marcando la integralidad de la educación recibida.

Pero *¿en qué se enmarca el gran cambio que ha tenido la educación en la actualidad*?, se considera que los cambios tecnológicos y de valores que se han dado en los últimos años han marcado esta carencia en la educación mundial y el Perú no podía ser diferencia de ello.

El problema principal del sistema educativo se evidencia en la falta de capacitación de los docentes principalmente en aspectos referido a lo académico y al manejo de metodologías y tecnologías para llevar a cabo un proceso educativo eficiente. Pues no están en condiciones de estar a la par con la evolución de las TIC en su condición de inmigrantes digitales, para orientar el aprendizaje de los alumnos nativos digitales. Siendo este problema de connotación tanto cultural, educativo y tecnológico que no sólo inmiscuye al docente sino también al sistema educativo en sí y al estudiante, haciendo cada vez difíciles de dar soluciones viables, pues en ella intervienen muchos factores.

1.1.2 Factores que Influyen en el rendimiento escolar

Ausubel manifiesta que: "La estructura cognitiva del estudiante es el factor que decide acerca de la significación del material nuevo y de su adquisición y retención". La potenciación de la estructura cognitiva del alumno facilita la adquisición y retención de los conocimientos nuevos.

En el aprendizaje significativo se trata de establecer relaciones entre los nuevos conceptos y los conocimientos ya existentes en el alumno. Hay aprendizaje significativo cuando la nueva información se incorpora deforma sustantiva, comprensiva, y no arbitraria a la estructura cognitiva del estudiante al ser aprendizajes cognitivos estos se tornan duraderos.

El aprendizaje memorístico, sin comprensión, sin significado lógico, sin relación sustancial con los conceptos existentes en la estructura cognitiva, es factor de bajo Rendimiento Escolar, de niveles bajos de aprendizaje. Las condiciones externas referidas al contexto socio económico y cultural de la acción educativa falta de materiales didácticos actualizados, maestros carentes de espíritu innovador y el conjunto de elementos delimitantes de la situación de aprendizaje, también son condiciones o variables que sirven para estimular las experiencias de aprendizaje de los alumnos y, por tanto, condicionan sus niveles de Rendimiento Académico.

Las condiciones externas pueden ser creadas por el docente, mediante la elección y estructuración de los elementos más adecuados para el logro de aprendizajes significativos. Esta función del docente que corresponde a la enseñanza o en términos modernos al ejercicio de la mediación afectivo - cognitivo. "Consiste en crear un clima de confianza, sumamente motivador y proveer los medios necesarios para que los alumnos desplieguen sus potencialidades. Se concreta en el conjunto de ayudas que el profesor ofrece a los estudiantes en el proceso personal de construcción de sus conocimientos". Empero, esta premisa no se cumple a cabalidad en la institución educativa debido a que existen variables internas y externas que influyen en el aprendizaje, desde las motivaciones, intereses, necesidades y capacidades del alumno para estudiar y a aprender, hasta aquellos factores provenientes de la institución educativa, medio familiar, social, Escolar o pedagógico, que condiciona el proceso enseñanza - aprendizaje, determinando el nivel del éxito escolar.

1.1.3 Descripción del centro educativo

La institución educativa Huancanyacu, es una institución educativa rural ubicada en el distrito de Cayrán con un total de 150 alumnos provenientes de la misma comunidad y de las comunidades aledañas.

La jornada escolar es de un solo turno de 7.45 horas a 13.15 horas. La institución educativa se ubica en un centro poblado rural. El nivel socioeconómico y cultural de los padres de familia es bajo. Las ocupaciones de la mayoría de padres y madres de familia se sitúan en el sector agricultura.

El colegio dispone de un aula de ordenadores conectados en red, con un ordenador para el profesor y proyector multimedia.

Los alumnos de la Institución educativa cuentan con un lote de Laptop XO y un aula de informática equipada con computadoras de última generación con fines educativos; sin embargo las Laptop XO no son utilizadas en absoluto, mientras que el laboratorio de informática se utiliza para el desarrollo de la asignatura de educación para el trabajo.

En muchas ocasiones no es posible que un grupo de alumnos navegue de forma simultánea y por tanto se producen dificultades para alcanzar un aprovechamiento adecuado de recursos en línea.

El alumnado que participa en el proyecto es el de quinto grado de secundaria de sección única con quince alumnos y su profesor-tutor que les imparte la enseñanza de la matemática de acuerdo al DCN y las rutas de aprendizaje del nivel y ciclo.

1.1.4 Perspectiva didáctica

La educación es una actividad directriz que orienta el camino a seguir del educando de acuerdo con sus necesidades, valores e ideales que tiene en cada sociedad. Su preparación para la vida de adulto supone una dirección del desarrollo y de la adaptación al medio, pues de otro modo las actividades podrían ponerse en desacuerdo con los valores y necesidades colectivas, así pues se puede definir la educación diciendo que es el encauce, la guía o dirección del desarrollo y de la adaptación al medio, de acuerdo con ciertos valores e ideales en términos más sencillos, educar quiere decir dirigir racionalmente la vida.

La Didáctica es una disciplina científico-pedagógica que tiene como objeto de estudio los procesos y elementos existentes en la enseñanza y el aprendizaje. Es, por tanto, la parte de la pedagogía que se ocupa de los sistemas y métodos prácticos de enseñanza destinados a plasmar en la realidad las directrices de las teorías pedagógicas. La didáctica diferencial tiene en cuenta la evolución y características del educando. Los elementos que actúan en el acto didáctico son:

- El docente o profesor (mediador pedagógico)
- El discente o alumno (estudiante)
- El contexto del aprendizaje, infraestructura tecnológica.
- El currículum

-Docente: Con escasa motivación y falta de capacitación para ejercer con eficacia su misión de educar. La globalización en la actualidad provoca que sea necesario por parte del docente, en primer lugar el conocimiento de su materia de enseñanza y el manejo adecuado de la tecnología para dinamizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, con miras a obtener aprendizajes eficaces y significativos.

-Estudiante: Es el elemento principal de la educación, todas las actividades están orientadas a su aprendizaje y desarrollo integral de los alumnos, pero se hace más difícil lograr en los estudiantes un aprendizaje significativo, pues ya de hecho están predispuestos en ese sentido. Lo peor es que algunos de ellos están absolutamente convencidos de que no tienen capacidades para las matemáticas y se sienten asustados. Esta situación hace más complicada la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura y todo por una opinión tergiversada, porque conciben la matemática como algo que se utiliza para cálculo numérico y la sustitución de fórmulas de una forma muy elemental, cosa que sólo requiere la realización de las operaciones aritméticas elementales, siendo lo primordial desarrollar problemas contextualizados incidiendo en su representación algebraica e interpretación gráfica.

La mayoría de los estudiantes tiene serias dificultades asociadas al aprendizaje del lenguaje algebraico y gráfico, los alumnos que se expresan en errores frecuentes que cometen y éstos se producen por causas muy diversas que se refuerzan en redes complejas. Es útil desde la perspectiva de la investigación y de la enseñanza-aprendizaje, tener elementos de análisis de estos errores, para determinar la naturaleza del error, entender al alumno, descubrir sus conocimientos subyacentes y diseñar tareas que apoyen la construcción del pensamiento algebraico. Centrándonos en la búsqueda de las causas que originan las dificultades al inicio del aprendizaje de programación lineal, las operaciones, procesos y estrategias que realiza el sujeto cuando aprende, adquiere, organiza, elabora y recupera conocimientos del lenguaje algebraico en forma esporádica y, potenciando el control y la toma de conciencia de los procesos cognitivos en dicho lenguaje.

-Contexto de aprendizaje: En la institución educativa no se desarrolló hasta la fecha ninguna experiencia en el uso de la tecnología para reforzar la enseñanza de los tópicos de la matemática, mucho menos experiencias básicas relacionadas con la navegación por Internet, el empleo de multimedia interactivos, sólo se usa el ordenador para uso básico del teclado y la gestión del procesador de textos para la elaboración de documentos sencillos. Aún no se han desarrollado competencias en la creación de documentos de texto más complejos, diseño de presentaciones, tratamiento de imágenes y audios y elaboración de esquemas. Porque, los docentes no tienen la capacitación para realizar dichas actividades, pues tanto docentes como alumnos no todos tienen acceso a Internet.

-Infraestructura física y tecnológica: Esta carencia hace que la educación en primer lugar no pueda ser de calidad y en segundo lugar no se le pueda dar según el avance de la tecnología actual; aún se evidencian instituciones que sólo no poseen computadores, impresoras y otros accesorios tecnológicos, sino que también no poseen ni siquiera sillas para que el estudiante reciba cómodo su clase; por lo cual se le da a esto una razón para que la educación en los últimos años no haya podido avanzar.

El currículo: Es un sistema de vertebración de los procesos de enseñanza y aprendizaje tiene cuatro elementos constitutivos: objetivos, contenidos, metodología y evaluación. "La didáctica es el estudio del conjunto de recursos técnicos que tienen por finalidad dirigir el aprendizaje del alumno, con el objeto de llevarlo a alcanzar un estado de madurez que le permita encarar la realidad, de manera consciente, eficiente y responsable, para actuar en ella como ciudadano activo, participante y responsable" (Nérici, 2010).

Durante los últimos veinte años el interés por el estudio de las dificultades que la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el currículo escolar ha sufrido cambios, tanto desde la perspectiva del docente como del alumno. No se tiene claro lo que debe ser enseñado y aprendido en la programación lineal haciendo que el desarrollo de esta unidad en el nivel secundario tenga muchas falencias y también subjetividad, haciendo de este tema difícil de entender para la mayoría de los estudiantes, haciendo que éstos recurran a memorizar algunas reglas algebraicas, que conduce a los estudiantes a no ser capaces de dar sentido a la materia o acercarse a las tareas algebraicas de una manera que es inapropiada para aprender la materia en cuestión (Kieran, 1992).

El estudio de la programación lineal por lo general no se aborda con amplitud en el nivel secundario, debido a diversos factores como la escasa práctica de operación cognitiva básica, que permite analizar las dificultades, obstáculos y errores conceptuales y encontrar procedimientos adecuados para corregirlos, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios de seguimiento, estructural y autónomo. Es en este desarrollo donde debemos entender la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.

1.1.5 Situación de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática

La enseñanza-aprendizaje de la matemática es un problema latente, y en el correr de los años se agrava aún más, porque no se lleva a cabo como problema concreto el estudio de las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y su uso en sistemas de representación gráfica. Referido al aprendizaje de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas y sus aplicaciones a problemas contextualizados de la realidad donde se lleva a cabo el proceso didáctico, agravándose esta situación con la falta de uso de las herramientas tecnológicas durante el proceso.

1.1.5.1 Desempeño de los estudiantes peruanos en las Pruebas PISA

El proyecto PISA (Programmefor International StudentAssesment) conducido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) evalúa los niveles de alfabetización de los estudiantes de 15 años, los cuales, en su mayoría, se encuentran por concluir sus estudios de educación secundaria. Para estándares internacionales de desempeño para las dimensiones de alfabetización lectora, matemática y científica.

El Informe emitido por el MINEDU (2013) considera que, de acuerdo a la competencia matemática que plantea PISA, podemos comprender los bajos resultados obtenidos por el Perú en PISA 2012 en Matemática, además de analizar y reorientar nuestra práctica pedagógica en la resolución de problemas contextualizados de acuerdo a la realidad del estudiante. El puntaje promedio peruano en PISA 2012 fue de 368 puntos. Las pruebas PISA se elaboran teniendo en cuenta seis indicadores:

1. Muestran intuición y comprensión en el proceso de solución de los problemas.
2. Desarrollan interpretaciones y formulaciones matemáticas a problemas contextualizados en la realidad.
3. Identifican herramientas matemáticas relevantes o métodos de solución de problemas acorde al nivel de su desarrollo personal.
4. Resuelven problemas que involucran varios pasos.
5. Reflexionan sobre sus resultados y generalizan sus hallazgos.
6. Usan razonamientos y argumentos matemáticos para explicar sus soluciones y comunicar sus resultados.

Según los seis niveles de desempeño PISA, en promedio nuestros alumnos evaluados se ubicaron en el Nivel 1, aunque un porcentaje significativo (47%) se ubicó debajo del Nivel 1. Es decir, que los estudiantes que se ubicaron en el Nivel 1 sólo responden a las preguntas que involucran contextos conocidos, en los que se encuentra toda la información necesaria y las preguntas están claramente definidas; son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas; realizan acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. Los estudiantes que no alcanzaron el nivel 1 de desempeño pueden, en el mejor de los casos, ser capaces de realizar tareas matemáticas muy directas y sencillas como la lectura de un único valor a partir de un gráfico sencillo o tabla en la que las etiquetas de la misma coincide con las palabras en el estímulo y pregunta, de modo que los criterios de selección son claros y la relación entre el cuadro y los aspectos del contexto descrito son evidentes; asimismo, realizan operaciones aritméticas básicas, siguiendo instrucciones claras y bien definidas.

Por lo general estas seis habilidades no se estimulan en forma adecuada en la enseñanza y el aprendizaje de diversos temas de matemáticas. En ese sentido, la propuesta que se hace para la enseñanza-aprendizaje de la Programación Lineal a través de la resolución de problemas contextualizados de programación lineal por el método Simplex y Gráfico con ayuda Geogebra y PHPSimplex. Poniendo como reto pensar en situaciones que induzcan al alumno a desarrollar habilidades analizando la relación entre la región factible y la función objetivo determinadas en un problema de contexto real.

1.1.5.2 Poca atención al tema Programación Lineal en la etapa escolar

Analizando este objeto matemático en el Diseño Curricular Nacional (DCN), se observa que en el quinto grado de secundaria las inecuaciones lineales con dos incógnitas, seguidas por la introducción a la programación lineal, aparecen como conocimientos de álgebra. En el mismo grado de estudios, estos temas se relacionan con el tema de funciones y con el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el DCN se considera que las capacidades relacionadas con estos conocimientos son el resolver problemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas mediante métodos gráficos, el resolver problemas de programación lineal con dos variables mediante métodos gráficos y el resolver problemas de contexto real y matemático que implican la organización de datos a partir de inferencias deductivas y/o el uso de cuantificadores.

Al hacer una revisión del avance temático en el desarrollo de los tópicos en el aula, en la mayoría de los casos este tema no son abordados o son abordados de manera superficial por los docentes haciendo que alumnos tengan una formación matemática muy pobre, notándose que los alumnos tienen serias dificultades al abordar problemas de Programación Lineal, que se manifiestan a través de que:

- Muestran deficiencias operatorias tanto aritméticas como algebraicas.
- Presentan serias dificultades para generalizar o encontrar patrones.
- Tienen limitaciones para hacer uso de conceptos y propiedades al justificar o explicar sus procedimientos o respuestas.
- No manejan una adecuada graduación en los ejes del plano cartesiano, lo que les dificulta una correcta interpretación de las gráficas.
- Muestran deficiencias en definir las variables del problema dado en registro verbal y en organizar los datos.
- Los estudiantes muestran mucha dificultad para transitar y coordinar los diferentes registros de representación (verbal, algebraico y gráfico), principalmente para analizar e interpretar las gráficas.
- Sus explicaciones se ven limitadas por la falta de experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado, pero muestran ciertas capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos.
- Tanto docentes como alumnos no están habituados al uso de Geogebra y PHPSimplex para representar algebraica y gráficamente problemas de programación lineal.

Por todo lo anterior, surge el interés por diseñar una secuencia didáctica para que los alumnos, usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones a la Programación Lineal, a partir de situaciones contextualizadas cuya solución requiera de su uso.

1.1.5.3 Enseñanza de la programación lineal en el nivel secundario

Los métodos algebraicos son científicos en el sentido de que representan técnicas sistemáticas para resolver problemas matemáticos. Empero, existe cierto grado de arte, juicios subjetivos y términos medios asociados con su uso efectivo en resolución de problemas reales. Para cada uno de los problemas, se usan técnicas analíticas y gráficas, se buscan alternativas y se utilizan programa de computadoras. Por lo tanto, la elegancia y eficiencia de diferentes enfoques de los problemas es de carácter individual y se relaciona con la habilidad de escoger entre todas las opciones disponibles. Si bien estas habilidades no son fáciles de comunicar, sí se tiene la esperanza de que los elementos que se le brindan al alumno, lo orienten cuando se le presenten diferentes alternativas referido a métodos gráficos y a la selección de herramientas apropiadas para su implementación.

Para resolver la problemática detallada, es imprescindible la aplicación del Geogebra y PHPSimplex en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en general y de la Programación Lineal, tanto desde la óptica de la docencia como desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas. En esta investigación, nos centramos en la enseñanza de desigualdades en el plano cartesiano, analizando las potencialidades y dificultades que surgen al llevar al aula un conjunto de unidades de aprendizaje, siguiendo los planteamientos teóricos de una teoría de aprendizaje concreta (la programación lineal donde converge el razonamiento algebraico y geométrico). Para ello, se diseña y desarrolla un programa de Formación mediante el cual se presenta a los estudiantes, tanto la Teoría como la adaptación curricular preparada por el investigador, y se analiza la implementación de la propuesta didáctica en el aula, con el propósito de evaluar, a partir de una serie de instrumentos que serán descritos con posterioridad, tanto las competencias didácticas de los profesores como el diseño y la implementación durante su acción docente.

La investigación aborda la problemática del estudio de la programación lineal, debe tener en cuenta el aprendizaje como el resultado de las relaciones entre el contenido, el alumno y el profesor, por lo que se realizará un estudio utilizando la metodología cualitativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las programación lineal en los alumnos del quinto grado de secundaria, analizando el uso que hacen de las unidades de aprendizaje de los diseños de instrucción: sistema de ecuaciones, inecuaciones y análisis de región óptima, durante el desarrollo de esta unidad didáctica en el aula.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Partiendo de la descripción de la situación problemática de la educación matemática en general y del estudio de la programación lineal en particular, es preciso proponer un modelo didáctico que permita optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática centrado en la resolución de ecuaciones, inecuación y problemas referidos a la optimización de productos y servicios a través de Programación Lineal, donde la Función objetivo es la de minimizar o maximizar procesos y recursos, los mismos se lograrán a través de las interrogantes de la formulación del problema.

1.2.1 Problema general

¿Qué efectos produce el diseño, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica basado en el uso del software Geogebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica en el proceso de aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria?

1.2.2 Problemas Específicos

El problema general planteado se deriva tres problemas específicos, los cuales ayudarán comprender mejor el problema general formulado. Estos problemas son:

- ¿Qué aspectos se debe considerar en el diseño y elaboración de una secuencia didáctica para el aprendizaje conceptual del sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales con dos incógnitas en la resolución de problemas contextualizados de programación lineal en el quinto grado de secundaria?
- ¿La aplicación de la estrategia didáctica basada en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica para el proceso de aprendizaje procedimental de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria?
- ¿Cuál es el nivel de desarrollo de actitud favorable hacia el aprendizaje de la matemática usando el GeoGebra y PHPSimplex a través del proceso de resolución numérica, algebraica y gráfica de problemas de programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria?

1.3 OBJETIVOS

El propósito general de esta investigación es determinar las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos para comprender y hacer una reingeniería en el desarrollo de las capacidades en el área de matemática relativos al estudio de la programación lineal, para ello se formulan los objetivos correspondientes.

1.3.1 Objetivo general

Diseñar, aplicar y evaluar una secuencia didáctica basada en el uso pertinente del software Geogebra y la página PHPSimplex a través de la representación algebraica y gráfica en el proceso de aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.

1.3.2 Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

1. Evaluar actividades didácticas basadas en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex para el proceso de aprendizaje conceptual de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.
2. Evaluar la estrategia didáctica basada en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica en el desarrollo del proceso de aprendizaje procedimental de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.
3. Analizar el desarrollo de actitudes hacia el aprendizaje de la matemática usando el GeoGebra y PHPSimplex a través del proceso de resolución numérica, algebraica y gráfica de problemas de programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.

1.4. SISTEMA DE HIPÓTESIS

De lo expuesto anteriormente, se formula la siguiente hipótesis:

El diseño, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica basada en el uso pertinente del software Geogebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica mejora en forma significativa el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.

Hipótesis específicas

1. La implementación de actividades didácticas basadas en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex influye significativamente en el proceso

de aprendizaje conceptual de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.

2. La aplicación de la estrategia didáctica basada en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica desarrolla un aprendizaje procedimental eficiente de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria.

3. El aprendizaje de la matemática usando el GeoGebra y PHPSimplex a través del proceso de resolución algebraica y gráfica de problemas de programación lineal desarrolla actitudes positivas hacia la matemática en los estudiantes del quinto grado de secundaria.

1.5 VARIABLES

1.5.1 Identificación y clasificación de variables

	DIMENSIONES	INDICADORES
VARIABLE INDEPENDIENTE Enseñanza de la Programación Lineal	Competencia tecnológica en la gestión de contenidos mediante Geogebra y PHPSimplex.	-Identifica las características del Geogebra. -Identifica las características de la página PHPSimplex.
	Uso del método Gauss-Jordan en la resolución sistema de ecuaciones de primer grado.	-Realiza operaciones elementales con filas en matriz aumentada. -Identifica si el sistema es consistente o no, a través de su matriz escalonada.
	Resolución de problemas de ecuaciones e inecuaciones mediados por el Geogebra.	-Identifica ecuaciones y sistema de ecuaciones. -Identifica sistema de inecuaciones.
	Resolución de problemas de optimización con método Simplex.	-Identifica la fila y la columna pivote. -Realiza el pivoteo hasta llegar al máximo o mínimo de una región factible.
	Uso de la página PHPSimplex en el proceso de resolución algebraica y gráfica de problemas optimización.	-Reconoce los comandos del Programa PHPSimplex. -Ingresa los datos para el proceso de optimización.
V. DEPENDIENTE Aprendizaje de la programación lineal con el Geogebra y	Aprendizaje conceptual	-Abstrae información -Identifica sistemas consistentes e inconsistentes. -Identifica región factible -Realiza proceso de optimización
	Aprendizaje procedimental	-Identifica los datos del problema -Analiza el proceso a seguir en resolver el problema. -Realiza cálculos algebraicos en la resolución de problemas.

PHPSimplex		-Representa gráficamente el problema resuelto. -Interpreta y comunica los resultados.
	Aprendizaje Actitudinal	Muestra interés y creatividad Muestra deseo de aprender Participa y coopera en la clase.
VARIABLES INTERVINIENTES	Entorno socio cultural de la comunidad de Huancanyacu Medios y materiales educativos existen en la I.E. Nivel de motivación de los estudiantes. Objetivos curriculares del DCN. Contenidos curriculares del área de matemática. Metodología de enseñanza y aprendizaje Uso de recurso tecnológicos. Acceso a Software libre matemático y páginas especializados.	

Tabla 1: Cuadro de identificación y clasificación de variables

1.6. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

1.6.1 Justificación, l*a investigación desarrollada se justifica porque:*

- La Programación Lineal es un tema de reciente inclusión al DCN, y debido a que el Geogebra y PHPSimplex es de uso imprescindible en el mundo tecnológico donde nos desarrollamos.
- Poca presencia de trabajos de investigación centrados en el tema de sistemas ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y de Programación Lineal a nivel de educación secundaria.
- Dificultad de los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos y conceptos referidos a sistemas de ecuaciones y de programación lineal, independientemente del nivel educativo o modalidad de institución educativa donde estudie.
- Escasa práctica de aprender el tema centrado en datos provenientes desde la realidad donde se desenvuelven los sujetos del aprendizaje, que no permiten construir, reorientar y enfrentar problemas de la realidad desde una perspectiva matemática mediado por la tecnología digital.
- El interés de analizar la influencia del Geogebra y PHPSimplex en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, desarrollando su capacidad de intuición y de abstracción y, actitudes positivas hacia la matemática.

- El Proyecto Educativo Nacional al 2021, en su objetivo estratégico 2, contempla: el uso eficaz, creativo y culturalmente pertinente de las nuevas tecnologías de información y comunicación en todos los niveles educativos.

1.6.2 Importancia

La importancia del estudio radica, porque permite analizar en forma objetiva la repercusión que tiene y tendría el uso de herramientas informáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. La implementación del Geogebra y PHPSimplex trae aparejado, además de la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, la posibilidad de rescatar y preservar los valores culturales a través del uso de la tecnología. Puesto que, estos dos recursos poseen una gran relevancia tecnológica en el área de matemática permite a sus desarrolladores la posibilidad de acentuar la motivación y el deseo de aprender en el lugar en el que se implemente. Es así que al momento de su desarrollo se tuvo presente las expectativas de los estudiantes del quinto grado.

El uso del Geogebra y PHPSimplex en la resolución de problemas de programación lineal, permite tanto a profesor como a los estudiantes contar con una herramienta didáctica fundamental para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Pues con la inclusión del Geogebra y PHPSimplex se concretizan las nuevas formas de aprender, de cara al futuro como aprendizaje situado que apunta al logro de habilidades como: creación y selección de la información, autonomía, capacidad para tomar decisiones, flexibilidad y capacidad para resolver problemas, trabajo en equipo y habilidades comunicativas.

En suma, la investigación estuvo orientada a solucionar una de las mayores dificultades en el desarrollo pedagógico con los alumnos del quinto grado de secundaria, que es la resolución de problemas matemáticos contextualizados resolubles mediante la programación lineal. Dentro es esta perspectiva se consideraron entre los aspectos primordiales en la resolución de problemas:

- Leer, comprender y analizar situaciones matemáticas,
- Organizar datos y determinar variables,
- Elaborar gráficas representativas de la situación real,
- Realizar los procesos y algoritmos matemáticos necesarios,
- Verificar resultados obtenidos,

- Evaluar el proceso para encontrar posibles fallas o aciertos en el desarrollo del trabajo y plantear nuevas estrategias a nivel grupal e individual,
- Plantear situaciones problemáticas reales de acuerdo a sus condiciones y resolver con el software previsto.

1.7. VIABILIDAD

El objetivo del presente trabajo fue realizar una investigación acerca de la importancia del aprendizaje de la programación lineal con ayuda del Geogebra y PHPSimplex se circunscribe dentro de las nuevas tendencias y paradigmas de aprendizaje, para dar viabilidad a la investigación se tuvo a disposición:

- ♦ Recursos humanos docente y estudiantes comprometidos en el aprendizaje del tema y motivados en el uso del Geogebra y PHPSimplex, donde cada alumno puede realizar el trabajo referido a la programación lineal a través del PHPSimplex.
- ♦ Tenencia de computadoras con Geogebra y PHPSimplex instalados que permitieron realizar cálculos simbólicos y gráficos aportando su velocidad y exactitud. Con el uso de esta herramienta, los estudiantes aprendieron en forma significativa los contenidos propuestos, sumándole a la velocidad y exactitud de cálculos, la interactividad y visualización gráfica. Los recursos informáticos facilitaron el aprendizaje y también la enseñanza, ya que se convirtió en una importante herramienta para ejemplificar y desarrollar problemas diversos.
- ♦ Fue posible lograr un ambiente de enseñanza y aprendizaje en el cual interactúen docentes, alumnos y software. Propiciándose una metodología de aprendizaje a partir de la incorporación de tecnología, no sólo como un recurso facilitador de los cálculos necesarios, también como una herramienta capaz de actuar sobre el proceso de aprendizaje del alumno, permitiéndole seguir su propio ritmo de aprendizaje sin depender de que la clase tradicional imponga.

La implementación de esta nueva modalidad de enseñanza de la programación lineal, no sólo significó un impacto positivo en el aprendizaje por los alumnos, además produjo cambios en las características de las clases teóricas y prácticas. Teniendo repercusión en el logro de aprendizajes significativos incentivando la creatividad, la cultura tecnológica y la calidad académica de los docentes y estudiantes.

1.8 LIMITACIONES

Ente las limitaciones o restricciones que se consideran para la realización del presente trabajo de investigación, destacan:

- El trabajo se circunscribe sólo a una sección de estudio de una institución educativa rural, los estudiantes provienen de hogares cuyo sustento es la agricultura.
- El estudio se basa en un estudio descriptivo, analítico y explicativo del proceso de enseñanza-aprendizaje del tema elegido en el quinto grado de secundaria.
- El trabajo realizado se limita a indagar sobre el aprendizaje de sistema de ecuaciones e inecuaciones con ayuda del Geogebra y de la programación lineal PHPSimplex, y la influencia de estos recursos en el logro de aprendizajes significativos de la matemática.
- En la implementación del proyecto se tomó como referencia en un tiempo de cuatro semanas donde se desarrolló el tema sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistema de inecuaciones de primer grado y Programación Lineal, distribuido en seis sesiones de clase.
- Poco acceso a fuentes escritas y antecedentes referidos al problema investigado en las bibliotecas existentes en la ciudad de Huánuco.

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

Para sustentar esta sección se hizo una revisión de la literatura de investigación, siendo nuestro foco de atención la literatura relacionada con investigaciones en temas de educación matemática y uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje, priorizando el uso de software matemático en la enseñanza en la programación lineal. Bajo esta premisa, a continuación referenciamos los antecedentes de investigaciones internacionales y nacionales realizadas en relación al tema tratado en el presente estudio; para el cual se alude, siguiendo un orden cronológico, destacándose los trabajos que han tenido repercusión en relación y en forma específica al tema que se aborda en el presente estudio, entre ellos destacan:

Flores, P. (1998) Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Granada: Consejo Editorial Luis Rico, se hace un análisis de estudios de casos que muestran la variedad de perfiles de los estudiantes frente a las cuestiones epistemológicas y didácticas. La riqueza que encierra esta diversidad permite que el formador de profesores comprenda mejor la variedad de posturas y la cantidad de factores que intervienen en la visión epistemológica y didáctica del estudiante. De esta forma, el formador tomará conciencia de la importancia de actuar sobre aspectos personales, más que suministrar un cuerpo de conocimiento didáctico. La conciencia de la pluralidad de opciones, y el dominio de factores que intervienen en las expectativas de los estudiantes durante sus cursos de formación, debe hacer que el formador adopte una tendencia abierta en el currículo de formación. Esta actitud debe verse reflejada en una tendencia a articular, en la formación de profesores, la teoría y la práctica, la reflexión epistemológica y didáctica, el contexto de formación y el contenido, etc. En resumen, la conciencia de la pluralidad de visiones debe hacer que el formador dirija su acción hacia la formación de profesores reflexivos, y se ocupe él mismo de reflexionar sobre el contenido didáctico del contenido, que además asuma las características del contexto (conocimiento situado).

Torregrosa, G. (2001) Propiedades del cono característico de un sistema de desigualdades lineales. Redundancia y estabilidad realiza un estudio desde distintos puntos de vista, los sistemas de infinitas desigualdades lineales definidos sobre espacios vectoriales topológicos, localmente convexos, reales y Hausdorff, en la primera parte de la memoria se estudian propiedades del conjunto factible de los sistemas considerados, concretamente: acotación, dimensión y estructura poliédrica; estudiando seguidamente condiciones suficientes para que un sistema sea farkas-minkowski. En los capítulos 2 y 3 se estudian y clasifican las desigualdades redundantes de los sistemas, distinguiendo tres tipos de redundancia, dando ejemplos donde se identifican. También se proponen criterios de clasificación que se particularizan a los sistemas f-m y a los sistemas finitos. En la última parte se estudia la estabilidad de los sistemas, en el sentido de ver si mantienen su carácter inicial (de consistencia o inconsistencia) al perturbar arbitrariamente todos los coeficientes en todas las restricciones. El problema se resuelve construyendo un espacio topológico pseudométrico, donde se caracterizan los interiores de los conjuntos: lc (sistemas consistentes) y li (sistemas inconsistentes).

López, S. (s/f) Reforzamiento de modelos en programación lineal 0-1, cuyo objetivo fundamental de esta memoria es el desarrollo teórico de métodos de reforzamiento de formulaciones en problemas de programación lineal 0-1 pura, Los temas principales que se tratan son la identificación de ciclados dominantes respecto de un conjunto de ciclados, identificación de cubrimientos maximales respecto del conjunto de cubrimientos implicados por una restricción de tipo mochila, detección de infactibilidad, identificación de restricciones redundantes, fijación de variables y reformulación de restricciones a partir de cubrimientos. Las aportaciones más destacables son algunos algoritmos de identificación de ciclados dominantes y cubrimientos maximales, nuevos procedimientos de detección de infactibilidad y redundancia que permiten considerar conjuntamente varias restricciones, y métodos de incremento y reducción de coeficientes que consiguen reforzar la modelización de un problema a partir de ciertas restricciones redundantes

Reaño, C. (2015) en su Tesis: S*istemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas y problemas de programación lineal: una mirada desde la teoría de situaciones didácticas*. Detalla la construcción, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica que contribuye a que los alumnos usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal (P.L). Aunque este tema está presente en los diseños curriculares escolares y reaparece en los cursos iniciales de varias carreras universitarias, su desarrollo generalmente está basado en el manejo de algoritmos o reglas, desaprovechando oportunidades de interrelacionar lo intuitivo con lo formal y de transitar por los diversos registros de representación. El marco teórico para el presente trabajo es fundamentalmente la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau. El proceso metodológico para concretar lo propuesto se apoya en la Ingeniería Didáctica y en el análisis de los resultados se usa también la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval. Se aplica a los estudiantes del segundo ciclo de la carrera de Turismo Sostenible que estudian en la Universidad Antonio Ruiz de Montoya (UARM). El objetivo general del trabajo es diseñar, elaborar, aplicar, analizar y proponer una secuencia didáctica que permita usar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables poniendo énfasis en sus aplicaciones a problemas contextualizados de programación lineal. Algunas de las conclusiones encontradas fueron las siguientes: A partir de la revisión de textos hecha como parte del análisis preliminar, en su dimensión didáctica, se puede afirmar que los libros usados en la enseñanza de la P.L. al tratar el método gráfico para la resolución de problemas de Programación Lineal con dos variables, no plantean preguntas que induzcan al alumno a interpretar qué ocurre en distintos puntos de la región factible. En general, se plantean situaciones donde se pide hallar el óptimo utilizando el método gráfico, sin hacer preguntas que favorezcan una aproximación intuitiva a la solución del problema de P.L. La propuesta contribuye también a que los alumnos obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal, en el marco de la resolución de problemas contextualizados de optimización con función objetivo y restricciones lineales.

Santos, E. (2014) *El modelo Van Hiele para el aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes de segundo de secundaria haciendo uso del Geogebra*. El trabajo tiene por objetivo determinar los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión de los elementos de la circunferencia que pueden alcanzar los estudiantes de segundo año de secundaria al realizar actividades que son mediadas por el Software Geogebra. En el capítulo 1 se realiza una presentación de los aspectos generales de la investigación, tales como los antecedentes, el problema de investigación y los objetivos de la investigación. En el capítulo 2 se presenta el modelo Van Hiele como elemento teórico considerado en el desarrollo de la presente investigación, describiendo los niveles de razonamiento. De la misma forma, se hace una descripción de algunos términos usados en nuestra investigación como la justificación, conjetura, etc. y también se hace un estudio sobre el concepto de circunferencia y las propiedades que se le atribuyen. En el capítulo 3 se justifica la metodología a emplear en nuestro trabajo, explicando el método a seguir. En el capítulo 4 se describe el diseño de las actividades. En el capítulo 5 se describe la implementación de las actividades En el capítulo 6 se describen el análisis de los resultados y el contraste entre las respuestas esperadas con las respuestas observadas y los logros por parejas de estudiantes.

Díaz, R. (2014) realiza la tesis titulada *La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software Geogebra en estudiantes de quinto de secundaria*. Con el objetivo de analizar, a través de una secuencia de actividades que siguen las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediada por el software GeoGebra, la construcción del concepto de circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en alumnos de quinto de secundaria. Para este estudio, emplea como marco teórico la teoría de la Dialéctica Herramienta-Objeto presentada por Douady, que nos propone un enfoque cognitivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre la actividad matemática. El principio básico de este marco, para construir una noción matemática, consiste en hacer uso o movilizar conocimientos antiguos como herramientas para desarrollar nuevos conocimientos que se denominan objetos matemáticos, los cuales, una vez desarrollados, se utilizan como herramientas en nuevas situaciones de aprendizaje. Bajo este principio, se verificó que los alumnos del quinto de secundaria lograron construir el concepto de circunferencia a través de una secuencia de actividades. Este proceso de construcción del objeto circunferencia permitió a los alumnos mejorar y organizar su estructura cognitiva sobre este concepto, lo que favoreció su aprendizaje. Asimismo, el GeoGebra como instrumento mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje fue muy importante porque, usando algunas herramientas de este software, los alumnos lograron consolidar la definición de la circunferencia como lugar geométrico a través de la percepción dinámica de los infinitos puntos que constituyen una circunferencia, y de sus representaciones gráfica y algebraica.

Bello, J. (2013) *Mediación de software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de secundaria.* Realiza su investigación de tesis centrada en la enseñanza de la Programación Lineal mediada por el software GeoGebra con alumnos del quinto grado de educación secundaria, de la Institución Educativa N° 1136 "John F. Kennedy".

Este tema forma parte del Diseño Curricular Nacional y por tanto del libro texto de quinto grado de educación secundaria; sin embargo, o bien no se considera en la programación curricular anual o bien se enseña haciendo construcciones geométricas usando lápiz y papel. Investigaciones como Malaspina (2008) y Moreno (2011), detectaron que la mayoría de alumnos no tiene nociones sobre Programación Lineal, porque no las estudiaron en el colegio, esto se debe a que la mayoría de docentes no las incluyeron en su programación curricular anual. Usa GeoGebra como mediador de la enseñanza de la Programación Lineal, pues pensamos que con este software y las situaciones de aprendizaje propuestas a través de una serie de actividades lograremos que los alumnos puedan manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones mientras construyen el conocimiento sobre este tema y transitar por los Registros de Representación verbal, algebraico y gráfico de manera natural y espontánea, de ahí que el marco teórico elegido sea la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y el método de investigación propuesto es cualitativo y está basado en Hernández, Fernández & Baptista (2007).

Angulo, A. (2014) en su tesis "*Aplicación de Software Matemático en el Aprendizaje de Cálculo* 1…" en estudiantes de la carrera profesional de Ingeniería, sostiene que en la formación de profesional de ingeniería, la matemática constituye una herramienta para resolver problemas siendo la base de su perfil. Pero en la universidad se proporcionan pocas herramientas para el óptimo aprendizaje, siendo un reto para el docente universitario. El problema a investigar fue ¿Cómo influye la aplicación del software matemático en el aprendizaje de Cálculo 1 en los estudiantes indígenas en el segundo ciclo de la carrera profesional de ingeniería de Agroforestal Acuícola de la Universidad Intercultural de la Amazonía? El objetivo fue determinar la influencia de la aplicación del Software matemático en el aprendizaje de estos estudiantes, teniendo como muestra 40 personas. El diseño fue de dos grupos. Se usaron tests, evaluando antes y después de la aplicación del software. Los datos se contrastaron mediante la prueba t Student de muestras pareadas con un nivel de significación 0,05. Los resultados indicaron que hubo una diferencia significativa en el aprendizaje de cálculo 1, y por lo tanto la aplicación del software tuvo efecto positivo en los estudiantes indígenas de ingeniería. La aplicación del software y las horas de práctica de cálculo 1 fueron determinantes para tener diferencia significativa entre el aprendizaje de los estudiantes al término de la aplicación del Software College Pre cálculo Solved.

2.2 BASES TEÓRICAS

En esta sección se recoge los fundamentos teóricos que sirvieron como referentes para la realización de la investigación. En primer lugar se presentan la teoría referida a la educación matemática, las teorías de aprendizaje y el uso de software educativo, luego los conceptos fundamentales referidos a la programación lineal mediados por software matemático, luego para explicar los métodos algebraicos y gráficos en la resolución de problemas de ecuaciones, inecuaciones y de programación lineal.

2.2.1 La educación matemática

La educación matemática como campo de investigación es aún joven; sin embargo, es fuente de muchos estudios con métodos y paradigmas variados; este aspecto es consecuencia de que recibe aportaciones de diversas áreas como la psicología, pedagogía, filosofía, matemáticas e historia de las ciencias, entre otras. Tal variedad de contribuciones hace que afloren distintas facetas y consideraciones dinámicas entre la teoría y la práctica en educación matemática (Torralbo et al., 2001); así mismo hay enriquecimiento con las interacciones que se establecen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como consecuencia de esta múltiple conexión de la educación matemática.

Pese a estos matices, la investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales (Shoenfeld, 2000; p. 41): uno puro *a fin de entender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje* y otro aplicado *a fin de usar tales comprensiones para mejorar la instrucción de las matemáticas*. Estos propósitos están enmarcados dentro de la perspectiva compartida por la comunidad de investigadores españoles del área, sobre la educación matemática *como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional* (Rico y Sierra, 2000, p. 79).

La educación matemática, especialmente en nivel secundario, se desarrollan de forma que los casos especiales se evitan y los estudiantes sólo manejan funciones “bonitas” y “buenos” ejemplos. Esta tendencia puede crear muchas falsas concepciones que se pueden explicar por medio del *principio de extensión* de Tall (1991b): “*Si un individuo trabaja en un contexto restringido en el que todos los ejemplos que se consideran tienen una cierta propiedad, entonces, en ausencia de contraejemplos, la mente asume las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos*”.

Watson & Mason (2002) también afirman que el aprendizaje de las Matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de definiciones formales y técnicas (de hecho, afirman, es a través de los ejemplos que las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con los que el aprendiz debe familiarizarse). Informan que la solicitud de ejemplos que satisfagan ciertas restricciones puede alentar a los estudiantes a extender su pensamiento más allá de los ejemplos “típicos”. Se ve una gran fuerza en su efectividad como estrategia de enseñanza cuando los estudiantes se enfrentan a una nueva definición. Además, proponen grupos de tareas que requieran que los estudiantes generen ejemplos con combinaciones dadas de propiedades. Otra posibilidad implicaría dar una lista de objetos y propiedades y preguntar a los estudiantes que decidan qué propiedades aplicar a cada objeto.

Situación de cambio en la educación matemática

Los últimos cuarenta años han sido escenario de cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas. Por los esfuerzos que la comunidad internacional de expertos en educación matemática sigue realizando por encontrar moldes adecuados está claro que vivimos aun actualmente una situación de experimentación y cambio.

El movimiento de renovación de los años 60 y 70 hacia la «matemática moderna» trajo consigo una honda transformación de la enseñanza, tanto en su talante profundo como en los contenidos nuevos con él introducidos. Entre las principales características del movimiento y los efectos por él producidos se pueden contar los siguientes:

- Se subrayaron las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en álgebra.
- Se pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.
- Esto último condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.
- La geometría elemental y la intuición espacial sufrió un gran detrimento. La geometría es, en efecto, mucho más difícil de fundamentar rigurosamente.
- Con respecto a las actividades fomentadas, la consecuencia natural fue el vaciamiento de problemas interesantes, en los que la geometría elemental tanto abunda, y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres, que es, en buena parte, lo que el álgebra puede ofrecer a este nivel elemental.

Los años 70 y 80 presentaron una discusión sobre los valores y contravalores de las tendencias que se iban haciendo paso, y luego una búsqueda intensa de formas más adecuadas de afrontar los nuevos retos de la enseñanza matemática por parte de la comunidad matemática internacional. En la actualidad parece claro que en la comunidad matemática se va produciendo un cambio profundo, al menos en lo que a la valoración que en ella se hace de la educación matemática.

Por otra parte en los países más avanzados matemáticamente el interés creciente de muchos matemáticos profesionales por los problemas que plantea actualmente la educación matemática de los diferentes niveles, incluido el nivel universitario. En artículos escritos muy recientemente por matemáticos prestigiosos la educación matemática figura en lugar prominente como uno de los que hay que considerar con prioridad si pretendemos tener un desarrollo sano de la comunidad matemática.

Tendencias generales actuales

Una consideración de fondo. ¿Qué es la actividad matemática?

La actividad matemática tiene un fuerte influjo, más efectivo a veces de lo que aparenta, sobre las actitudes profundas respecto de la enseñanza matemática. La reforma hacia la «matemática moderna» tuvo lugar en pleno auge de la corriente formalista (Bourbaki) en matemáticas. Y alguna de las personas especialmente influyentes en el movimiento didáctico de los años 60, como Dieudonné, fueron importantes miembros del grupo Bourbaki. En los últimos 20 años, especialmente a partir de la publicación de la tesis doctoral de I. Lakatos (1976), Proofs and refutations, se han producido cambios bastante profundos en el campo de las ideas acerca de lo que verdaderamente es el quehacer matemático.

La actividad científica en general es una exploración de ciertas estructuras de la realidad, entendida ésta en sentido amplio, como realidad física o mental. La actividad matemática se enfrenta con un cierto tipo de estructuras que se prestan a unos modos peculiares de tratamiento, que incluyen:

a) una simbolización adecuada, que permite presentar eficazmente, desde el punto de vista operativo, las entidades que maneja;

b) una manipulación racional rigurosa, que compele al ascenso de aquellos que se adhieren a las convenciones iniciales de partida;

c) un dominio efectivo de la realidad a la que se dirige, primero racional, del modelo mental que se construye, y luego, si se pretende, de la realidad exterior modelada.

La antigua definición de la matemática corresponde a un estadio de la matemática en que el enfrentamiento con la realidad se había plasmado en dos aspectos fundamentales, la complejidad proveniente de la multiplicidad (lo que da origen al número, a la aritmética) y la complejidad que procede del espacio (lo que da lugar a la geometría, estudio de la extensión). Más adelante el mismo espíritu matemático se habría de enfrentar con:

- la complejidad del símbolo (álgebra);
- la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo);
- la complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística);
- complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática)...

Continuo apoyo en la intuición directa de lo concreto basado en lo real

Desde los 80, para la educación matemática, es necesario cuidar y cultivar la intuición en general, la manipulación operativa del espacio y de los mismos símbolos. Es preciso no abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace, por supuesto, pero no debemos permitir que este esfuerzo por entender deje pasar a segundo plano los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos. Si la matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter de empírica, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que la inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge. La formalización rigurosa de las experiencias iniciales corresponde a un estadio posterior. A cada fase de desarrollo mental, como a cada etapa histórica o a cada nivel científico, le corresponde su propio rigor, haciéndose obvio cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible. Nuestra enseñanza ideal debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, ganando con ello en asequibilidad, dinamismo, interés y atractivo.

Los procesos del pensamiento matemático. El centro de la educación matemática

Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática, más que en la mera transferencia de contenidos. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas.

Por otra parte, existe la conciencia, cada vez más acusada, de la rapidez con la que, por razones muy diversas, se va haciendo necesario traspasar la prioridad de la enseñanza de unos contenidos a otros. En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la que nos encontramos, es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó «ideas inertes», ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente.

En esta dirección se encauzan los intensos esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general, por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más bien que la mera transmisión de recetas adecuadas en cada materia.

Atención a los nuevos instrumentos proporcionados por los avances tecnológicos: la utilización de los programas de cálculo simbólico

La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y el ordenador actuales comenzaron a influir fuertemente en los intentos por orientar nuestra educación primaria y secundaria, de forma que se aprovechen al máximo de tales instrumentos. Es claro que, por diversas circunstancias tales como coste, inercia, novedad, impreparación de profesores, hostilidad de algunos... aún no se ha logrado encontrar moldes plenamente satisfactorios. Este es uno de los retos importantes del momento presente. Ya desde ahora se puede presentir que nuestra forma de enseñanza y sus mismos contenidos tienen que experimentar drásticas reformas. Por esta razón, en la comprensión de los procesos matemáticos se basa en la ejecución de ciertas rutinas en el proceso de aprendizaje de la matemática en los alumnos con preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente.

Una discusión en detalle de las posibles formas de proceder en lo que se refiere a la utilización de los programas de cálculo simbólico se puede ver a través Internet que es un instrumento muy versátil que admite diferentes usos matemáticos que ya se van aprendiendo a manejar adecuadamente. Una exposición de algunos de ellos relacionados con la información rica y variada que a través de la red se puede proporcionar a los estudiantes, así como la interacción que facilita entre todos los miembros de la comunidad educativa.

Conciencia de la importancia de la motivación

Una preocupación general que se observa en el ambiente conduce a la búsqueda de la motivación del alumno desde un punto de vista más amplio, que no se limite al posible interés intrínseco de la matemática y de sus aplicaciones. Se trata de hacer patentes los impactos mutuos que la evolución de la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, por una parte, y la matemática, por otra, se han proporcionado.

Cada vez va siendo más patente la enorme importancia que los elementos afectivos que involucran a toda la persona pueden tener incluso en la vida de la mente en su ocupación con la matemática. Es claro que una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de nuestros estudiantes tienen su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros. Por eso se intenta también, a través de diversos medios, que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos en ella de un modo más hondamente personal y humano.

En nuestro ambiente contemporáneo, con una fuerte tendencia hacia la deshumanización de la ciencia, a la despersonalización producida por nuestra cultura computarizada, es cada vez más necesario un saber humanizado en que el hombre y la máquina ocupen cada uno el lugar que le corresponde. La educación matemática adecuada puede contribuir eficazmente en esta importante tarea.

Cambios en los principios metodológicos aconsejables

A la vista de estas tendencias generales en la educación matemática se pueden señalar unos cuantos principios metodológicos que podrían guiar apropiadamente nuestra enseñanza. *¿Cómo debería tener lugar el proceso de aprendizaje matemático a cualquier nivel*?, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con el problema de matematización de la parcela de la realidad de la que se ocupa.

Se trata pues, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos. Para ello deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente.

La modelización matemática de la realidad

En otras ocasiones el acercamiento inicial se puede hacer a través del intento directo de una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que han de aparecer las estructuras matemáticas en cuestión. Se puede acudir para ello a las otras ciencias que hacen uso de las matemáticas, a circunstancias de la realidad cotidiana o bien a la presentación de juegos tratables matemáticamente, de los que en más de una ocasión a lo largo de la historia han surgido ideas matemáticas de gran profundidad, como veremos más adelante. Ello nos conduce a que con nuestros estudiantes delante de las situaciones-problema en las que tuvo lugar la gestación de las ideas con las que queremos ocuparnos, de estimular su búsqueda autónoma, su propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural.

Es claro que no se puede esperar que nuestros alumnos descubran en un par de semanas lo que la humanidad elaboró tal vez a lo largo de varios siglos de trabajo intenso de mentes muy brillantes. Pero es cierto que la búsqueda con guía, sin aniquilar el placer de descubrir, es un objetivo alcanzable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la detección de técnicas concretas, de estrategias útiles de pensamiento en el campo en cuestión y de su transmisión a los estudiantes.

La teoría, así concebida, resulta llena de sentido, plenamente motivada y mucho más fácilmente asimilable. Su aplicación a la resolución de los problemas, que en un principio aparecían como objetivos inalcanzables, puede llegar a ser una verdadera fuente de satisfacción y placer intelectual, de asombro ante el poder del pensamiento matemático eficaz y de una fuerte atracción hacia la matemática.

Sobre la utilización de la historia en la educación matemática

El valor del conocimiento histórico no consiste en tener una batería de historietas y anécdotas curiosas para entretener a nuestros alumnos a fin de hacer un alto en el camino. La historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado.

Los diferentes métodos del pensamiento matemático, tales como la inducción, el pensamiento algebraico, la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, la topología la probabilidad,... han surgido en circunstancias históricas muy interesantes y muy peculiares, frecuentemente en la mente de pensadores muy singulares, cuyos méritos, no ya por justicia, sino por ejemplaridad, es muy útil resaltar. La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas;
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes;
- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente;
- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes

2.2.2 Procedimientos matemáticos Fundamentales

El crecimiento exponencial de la información científica y lo cambiante de las tecnologías, unido al impacto cada vez mayor de las potencialidades computacionales están poniendo fin al enciclopedismo en el aprendizaje, cediendo paso a formas generalizadas, sistémicas e integradoras del conocimiento teniendo como soporte un pensamiento flexible basado en estrategias cognitivas y metacognitivas de aplicación en amplias esferas del saber. Para ello, la experiencia viva del docente y del estudiante es fundamental para constatar para tener solidez en la asimilación de conceptos y procedimientos matemáticos para solucionar diversos problemas.

Para (Talizina, 1984) “no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer”. Pero para que ésta sea eficiente es necesario tener ciertas habilidades como definir y demostrar, que por su naturaleza nos llevan a un vínculo primario con el sistema de conocimientos que se dan a través de la identificación, interpretación, recodificación, graficación, algoritmación y cálculo mediante los cuales se desarrolla el saber matemático, es decir es posible resolver problemas matemáticos en su acepción propia (Hernández, 1989).

Los procedimientos son beneficiosos en tanto y en cuanto:

- Constituyen un stock de verbos bien definidos, que sirven para unificar el lenguaje en la formulación de los objetivos en los programas de asignaturas de matemática.
- Están en el centro de la atención de la formación matemática de los estudiantes, pues ellas modelarán las habilidades en su estructura cognitiva.
- Son tomadas en cuenta en la formación de docentes de matemática, pues ellos son consustanciales al pensamiento que deben poseer primero y ser capaces de formar después en sus estudiantes.
- Poseen un valor didáctico y metodológico para los docentes, muchos de los cuales no tienen conciencia de su existencia y la importancia de su formación en sus alumnos, toda vez que permitirán organizar el proceso de asimilación de los conocimientos y crear en ellos estructuras mentales perdurables, flexibles y generalizables.
- Constituyen una suerte de “instrucción de código máquina”, que serían lo suficientemente generales para ser utilizables en la solución de muchos problemas distintos y con ello propiciar el enfrentamiento de situaciones problemas para el aprendizaje de nuevos contenidos.

Entre algunas acciones o tareas que apuntan y permiten ilustrar procedimientos generales de uso frecuente en la matemática podemos destacar:

- La acción de acomodar y resolver ecuaciones e inecuaciones en el plano para graficar por semejanza regiones poligonales y bandas en el plano $\mathbf{R}^2$, en esta operación intervienen los procedimientos de Identificar, recodificar y calcular en su interacción.

- El representar la idea de subconjuntos del plano $\mathbf{R}^2$, mediante una recta que pase por el origen de coordenadas presupone: graficar e identificar.
- Considerar que si el núcleo de la función $f(x) = 0$, la función lineal f es inyectiva y el sistema de ecuaciones lineales $ax = b$ correspondiente, es compatible con la solución única, presupone: identificar e interpretar.
- Plantear la sucesión de pasos a realizar si una matriz es diagonalizable, para una aplicación lineal concreta, presupone: algoritmizar, calcular e identificar su interacción.
- Resolver un problema algebraico de sistemas lineales en la secundaria cuando aún el estudiante no conoce el método gráfico de resolución, presupone: identificar, resolver, modelar, comparar, calcular e interpretar.
- Estimar la producción diaria de una fábrica conocida la productividad y el número de trabajadores, presupone: modelar, aproximar, calcular e interpretar.
- Calcular utilizando vías ventajosas que reduzcan el tiempo de cálculo numérico o analítico, presupone: identificar, optimizar, algoritmizar y calcular.

Los procedimientos matemáticos que permitirán resolver problemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal, destacan:

Interpretar, es atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate. Este procedimiento permite adaptar a un marco matemático, el lenguaje de las otras disciplinas objeto de estudio, para luego en un proceso reversible, traducirlo en un nuevo lenguaje del usuario. Por ejemplo, se interpreta cuando se asume que el signo negativo del valor numérico de la velocidad está asociado a que el movimiento se efectuó en sentido contrario a la orientación del sistema de referencia.

Identificar, es distinguir el objeto de estudio matemático, sobre la base de sus rasgos esenciales. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan ciertas características distintas. Actúa directamente con las definiciones y teoremas, su ejercitación y sistematización en el proceso de enseñanza-aprendizaje posibilita un dominio adecuado de los conceptos, disminuyendo con ello la comisión de errores en el quehacer matemático del estudiante. En la formación de esta habilidad es imprescindible la concepción sistemática de una ejercitación variada donde estén presentes ejercicios de corte teórico donde se utilicen las definiciones (teniéndose en cuenta su estructura lógica), así como el trabajo en otras condiciones necesarias y suficientes.

Recodificar, es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Pues recodificar es expresar el mismo tipo de objeto a través de formas diferentes, no es más que la utilización de signos diferentes para un mismo modelo. Este proceso, permite la flexibilidad del pensamiento en la resolución de problemas, pues posibilita la resolución de problemas desde otra perspectiva, en otro dominio del conocimiento matemático o haciendo reacomodos convenientes del objeto en cuestión. El procedimiento recodificar posee en su sistema operatorio la acción transformar y éste está básicamente ligado al concepto de función, visto como el objeto matemático por excelencia que modela las acciones de transformación.

Calcular, es una forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo en forma manual, verbal (oral o escrita), mental y mediante el uso de tablas, calculadoras u ordenadores.

Algoritmizar, es plantear una sucesión estricta de operaciones matemáticas que describan un procedimiento conducente a la solución de un problema. Tiene una doble significación: cognoscitiva y metodológica. Cognoscitiva, porque con el establecimiento del algoritmo se posee un soporte teórico materializado que expresa la secuencia lógica y estricta de la dinámica del modelo y de su formación. Metodológica, porque la sucesión de operaciones planteadas en el algoritmo, puede servir como base de orientación para realizar la acción, la tarea o el problema que exige el modelo para su resolución.

Graficar, es representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, corregir las relaciones existentes, a partir de su representación gráfica. Es importante, porque permite a los estudiantes comunicar información de manera visual y sucinta, así como representar como objetos mentales. Su uso es muy importante en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conceptos:

durante la motivación permite que los estudiantes capten por la vía sensorial las representaciones gráficas de determinados conceptos y relaciones, lo cual orienta la atención del sujeto: durante la elaboración de la base de orientación, se manifiesta desde diferentes ópticas: tanto porque facilita la representación de tantos hechos o casos particulares de extensión del concepto, necesarias para llegar a una generalización, prescindiendo de las formulaciones analíticas. La imagen geométrica funciona en muchas ocasiones como el umbral para que el sujeto acceda al concepto, lo que lo relaciona con mecanismos de la memoria. La visualización puede servir de base a una abstracción o como elemento heurístico, pero también puede ayudar a comprender más profundamente una relación abstracta.

Definir, es establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio. Es importante, porque presupone precisar el objeto a definir, describir o enunciar los elementos con que se cuenta para hacer la definición y referir los atributos que lo caracterizan, la formación de este procedimiento desarrolla en el sujeto un pensamiento reflexivo, riguroso y crítico. Por ejemplo, se define al formalizar como un objeto matemático abstracto, una figura convexa en el plano cartesiano.

Demostrar, es establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la validez de una proposición o su refutación. Permite, tanto la posibilidad de fundamentar toda afirmación que se hace y que sea el resultado de la asimilación consciente de la acción o concepto correspondiente, es decir, esgrimir argumentos sólidos que confirmen la veracidad de una proposición, como la posibilidad de expresar un razonamiento correctamente estructurado que contenga un sistema de deducciones.

Modelar, es asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos. Posibilita el estudio del mundo objetivo que rodea al hombre a través de la simulación y procesamiento matemático de los comportamientos y características de los objetos. Este procedimiento se manifiesta en tres niveles fundamentales: de selección, cuando es conocido el objeto matemático que se utiliza para modelar; de adaptación, cuando no se conoce de antemano el modelo matemático y se adapta o usa en condiciones nuevas y de creación, cuando no existe un modelo matemático ni es posible adaptar alguno existente debido a las exigencias del objeto a modelar. Por ejemplo, se modela al asociar a la velocidad instantánea el concepto de derivada.

Comparar, es establecer una relación entre lo cualitativo y cuantitativo que hay entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase. Es importante, porque permite establecer una relación entre dos elementos asociándolos según características comunes a ambos. Pero en la actividad matemática adquiere tintes esenciales, diferenciándose sistemas operatorios particulares en dependencia del objeto de comparación. El comparar está presente en todo quehacer matemático, aunque discurre por diferentes niveles y debe ser formada, así como los modos de actuación que son inherentes, en todos los niveles de enseñanza, acorde a los contenidos que se imparten.

2.2.3 Enfoques de Enseñanza de Matemática en la Educación Secundaria

Dahlberg y Housman (citado por Selden, 1998) sugieren que puede ser beneficioso para los estudiantes el hecho de presentarles los nuevos conceptos pidiéndoles que sean ellos los que generen sus propios ejemplos, o pidiéndoles que decidan si los candidatos ofrecidos por el profesor son ejemplos o no-ejemplos, antes de enseñarles con ejemplos y explicaciones. Sin embargo, algunos estudiantes se resistieron a implicarse tanto en la generación de ejemplos como en su uso (algo no muy extraño, pues la mayoría de trabajos de investigación señala que los estudiantes encuentran muy distintas de sus clases usuales aquéllas en las que se dan ejemplos y explicaciones). Esto muestra que muchos estudiantes muestran incertidumbre a la hora de proceder cuando se les piden ejemplos y experimentan problemas a la hora de tomar elecciones en Matemáticas. Una posible medida para aliviar esto podría ser que los profesores de todos los niveles asignaran más problemas del tipo "*dame un ejemplo*".

Bajo la óptica Piagetiana los procesos de enseñanza y aprendizaje se efectúan debido a que al tener que enfrentarse a una situación problemática, el individuo tiende a integrarla a la estructura mental que posee si su estructura cognitiva permite que se dé la acomodación, de no hacerlo se crea una situación conflictiva entre lo que su estructura mental lo capacita para entender y lo que el medio le exige. Lo que desencadena una ruptura del equilibrio, creando en el sujeto la necesidad de restablecerlo, buscando la respuesta que de la manera más adecuada le permita acomodarse a la nueva situación.

La naturaleza axiomática- deductiva de la matemática debe verse reflejada en la experimentación concreta y la actividad específica del alumno. Razón por la cual Piaget se refiere a dos tipos de experiencias: la física y la lógico-matemática. Con las primeras el sujeto manipula al objeto para abstraer del mismo sus propiedades y con las segunda la abstracción tiene lugar a partir de las acciones ejecutadas por el objeto.

Una vez que se efectúa la manipulación del objeto se debe orientar la atención del sujeto hacia la operación realizada con el objeto, teniendo como objetivo alcanzar la abstracción lógico matemática de la operación y no que solo la realice para ver su resultado. De esta manera la actividad consistirá en valerse de recursos puramente matemáticos para descubrir la operación y luego volver la atención sobre la operación misma y no sobre el objeto. Para lo cual el docente debe suministrar hábilmente los recursos matemáticos requeridos para lograr la abstracción apoyándose en los conceptos matemáticos previos que posee el individuo. El docente debe preocuparse por estimular las capacidades de los educandos y no por sustituir sus razonamientos por los de él, con la finalidad de realizar una autentica actividad lógico-matemática y de incrementar la capacidad de conocimiento que el alumno posee y además los relacione con el problema.

La enseñanza de la matemática está orientado proveer a los estudiantes de conceptos, procedimientos y formas de razonamiento que le permitan comprender otras disciplinas y el papel que juegan la información y la tecnología en el mundo actual. La matemática se ha convertido en una parte de la riqueza cultural de la humanidad que debe ser compartida por todos. Desde esta premisa, la enseñanza de la matemática en los niveles básicos tiene como propósitos fundamentales:

- Transmitir al adolescente parte del acervo cultural de la sociedad.
- Desarrollar en los estudiantes nociones y conceptos que les sean útiles para comprender su entorno.
- Proporcionarles un conjunto de procedimientos e instrumentos del pensamiento que les permitan el acceso a otras áreas del conocimiento y de la actividad humana.

Mientras que en la educación secundaria el aprendizaje de la matemática debe estar orientado a favorecer en el estudiante:

- La apreciación y valoración de su trabajo personal.
- Su capacidad para explorar y buscar soluciones a problemas.
- Su amplitud para comunicar, analizar y justificar sus afirmaciones.

El aprendizaje de la matemática no debe reducirse a una simple memorización de hechos y definiciones, ni a la práctica rutinaria de procedimientos. Es necesario que los contenidos se presenten a partir de situaciones y actividades con sentido, tales que permitan a los estudiantes generar conjeturas, analizarlas con sus compañeros y pone en juego, de manera consciente, los conocimientos adquiridos con anterioridad. Para que al abordar y resolver el problema, el estudiante experimente la satisfacción personal que recompensa el esfuerzo realizado.

Entre las actividades que se diseñen en el enfoque analizado, se ubican las situaciones problemas, tales como:

- Problemas de exploración y búsqueda, necesarios para la formación de conceptos para el desarrollo de la capacidad de trabajo personal del docente, -aptitud para la investigación, la comunicación y la justificación de sus afirmaciones.
- Los problemas de aplicaciones, que sirven para relacionar ciertos conceptos con su uso en la vida cotidiana, en las diversas disciplinas o en las ramas de la matemática, contribuyendo a una visión integral de ésta.
- Los ejercicios, cuyo objetivo es favorecer la apropiación de conocimientos básicos y que los estudiantes adquieran seguridad y destreza en el uso de ciertas técnicas y procedimientos.

En la implementación de los contenidos de aprendizaje es necesario tener en cuenta tres razones fundamentales:

- La primera queda determinada por los requerimientos sociales y los productos que la sociedad ha obtenido del avance tecnológico.
- La segunda se apoya en el desarrollo de la propia matemática.
- La tercera responde a los resultados en el campo de la investigación sobre matemática educativa.

Enfoque del programa curricular de matemática

Los contenidos matemáticos pueden ser manejados de acuerdo a cierta flexibilidad; esto es, el profesor puede seleccionar su propia ruta curricular de ascenso del conocimiento, basado en dos motivos: las condiciones propias del grupo y el hecho de que el alumno, además de los saberes obtenidos en los grados anteriores, tiene los saberes que le da la información cotidiana, social y familiar y que no debe descartarse. La condición única que se impone es que los estudiantes puedan llegar a los aprendizajes propuestos y así se cumplan los objetivos educativos.

Otro aspecto a tener en cuenta es, la de cambiar las prácticas docentes tradicionales, en ocasiones excesivamente lineales y con apoyo extremadamente artificiosos. La vida es la mejor fuente del conocimiento matemático y está saturada de ejemplos que pueden ser utilizados adecuadamente en el aula.

El aula es un laboratorio de conocimientos, de discusión de ideas donde surge nuevos conocimientos fruto de la confrontación con experiencias previas y nuevas, que permiten la estructuración de los nuevos contenidos para que los alumnos manipulen los objetos (entes matemáticos); que pueden ser en un momento dado números, en otro las formas geométricas, en otro más las situaciones azarosas, pero también considerando como objeto de conocimiento la escuadra, un dado, la carta de una baraja, un programa matemático o una noticia periodística.

La intención de los nuevos contenidos deben ser fáciles de incorporar al esquema mental de los estudiantes, para que hagan suyas los saberes que utilizan cotidianamente, estableciendo una estrecha relación entre la ciencia y su realidad inmediata, en la que se desenvuelve y desarrolla el placer de saber y utilizar la matemática con base en sus observaciones, opiniones y juicios de valor, trabajando en equipo y revalorizando la opinión de los demás y la suya propia.

El enfoque actual tiene una mayor tendencia hacia el aprendizaje que a la enseñanza, pone mayor énfasis en el alumno y en el desarrollo de sus habilidades y sus competencias que logra al aprender la matemática. Esto no es fácil ya que, en ocasiones se escuchan razonamientos que no se entiende con facilidad, que cuesta mucho esfuerzo seguir y entender. Lo aprendido es el resultado de nuestra síntesis dialéctica en el aprendizaje, el choque con nuestras propias ideas y experiencias y por ello no nos podemos despojar fácilmente de su arropamiento, cambiando la práctica docente para que se entienda más a la personalidad de los alumnos, sus experiencias, sus propuestas y razonamientos y, cuando haya trabas, nuestra intervención sirva para orientar los modelos perseguidos por los estudiantes, impulsando sus conjeturas, sus supuestos y llevarlos a que vean si tienen la posibilidad de ser aplicables.

Finalidad de la educación matemática

Las nuevas tendencias en la pedagogía, prodigadas al educando, proponen finalidades educativas del siguiente orden: Estimular la formación del pensamiento en lo: reflexivo, crítico y creativo; tales que permitan el desarrollo de los procesos de autoaprendizaje. Los procesos educativos en el área de matemática se sustentan en:

-la flexibilidad del pensamiento
-la reversibilidad del pensamiento
-la memoria generalizada
-la planificación completa, y
-la imaginación espacial

La flexibilidad del pensamiento

El desarrollo de esta habilidad matemática pone hincapié en la necesidad y en la posibilidad de resolver un problema por, al menos dos estrategias diferentes. Ello es posible para un buen número de problemas, pues se pueden contar entre las formas de resolución, aquellos que usan los recursos gráficos más que los analíticos, el uso de las tablas de relación y las formas reversibles en muchos enunciados lineales y que actualmente son muy poco utilizados.

Esta idea de buscar formas distintas de resolver un problema, tiene una clara intención, pues es a través de éstas como se pueden lograr la claridad, la simplicidad, la economía de esfuerzo y de racionalidad en las resoluciones.

La reversibilidad del pensamiento

El desarrollo de esta habilidad involucra varias ideas pedagógicas: la primera y más importante es que el alumno aprenda a resolver problemas y pueda plantearlos; la segunda es que sepa establecer secuencias de orden progresivo y regresivo en planteamientos problemáticos diversos, y, tercera, a la reconstrucción de procesos mentales en forma directa e inversa.

En la mera resolución de problemas esto se puede establecer con el criterio de desarrollar en el alumno la habilidad de llegar del enunciado de un problema específico, partiendo de los datos significativos, al resultado y, conocido éste y algún que otro dato del enunciado directo del problema, construir enunciados problemáticos que lleven a obtener un resultado que en el enunciado original era dato.

La memoria generalizada

El desarrollo de esta habilidad comprende cuatro ideas formales dentro de la matemática a nivel de la educación secundaria:

-Buscar la generalización de las propiedades de los objetos matemáticos, sean estos números, líneas, relaciones, etc.

-Determinar cuándo se dan las relaciones matemáticas y cuándo las operaciones matemáticas y cómo son éstas, a su vez, integrantes de las primeras.

-Derivarse hacia las formas simplificadoras, resumidas y abreviadas en razonamiento matemático, visto éste como un proceso.

-Determinar con precisión cuál es la estructura de un problema y cómo es que muchos enunciados problemáticos responden a esa estructura formal, variando la magnitud y condición de los datos, no necesariamente en el modelo que se presentan.

La planificación completa

Esta habilidad matemática se considera desarrollada cuando es posible dar, a partir de una definición, ejemplos y contraejemplos al objeto de la definición; cuándo es posible deslindar, sin error, los objetos de estudio que pertenecen a una clasificación y cuáles no deben quedar incluidos, a fin de estudiarlos en conjunto, de acuerdo a propiedades que les sean comunes. Por otro lado, hacer ver cuándo el uso que se le da a un objeto de estudio matemático puede asignársele a otro objeto, pero que, por su forma de manifestación, actúa al igual que aquél.

La imaginación espacial

Es otra habilidad que se considera en proceso de desarrollo cuando se busca formas diferentes de expresar en forma geométrica la solución y la resolución de un problema. Ello es posible cuando se logra la integración de contenidos de un bloque, sección, capítulo o unidad en situaciones como la medición, la pre álgebra, el plano cartesiano, el tratamiento de la información, etc., de tal modo que pueden y deben entretejerse las nociones de número y medición con apoyos geométricos y, en una tendencia final, llegar a enfoques geométricos en la resolución de problemas.

2.2.4. La resolución de problemas

En cuanto al aprendizaje de la demostración, Duval (2000) afirma que es aquí donde aparece claramente la alternativa entre los objetos y conceptos matemáticos y los procesos de pensamiento implicados, siendo la demostración uno de los tópicos más difíciles en la educación matemática. Esto se debe en gran medida a que las formas de mostrar por qué una proposición es verdadera, no son las mismas para los teoremas matemáticos que para las sentencias sobre fenómenos del mundo externo. Se podría enfatizar la necesidad de proveer no uno, sino varios métodos de prueba, o de confrontar a los estudiantes con contextos ricos epistemológicamente (como problemas físicos). Pero lo que realmente importa no es sólo llegar a comprender por qué tal proposición puede ser cierta, sino comprender cómo funciona la demostración en Matemáticas y obtener los procesos de pensamiento implicados en la demostración.

La resolución de problemas en el proceso de aprendizaje de la matemática se constituye en la actividad central en el trabajo el salón de clase y fuera de ella; problemas de lo cotidiano, reales, adecuados al nivel del desarrollo intelectual del aprendiz, en los que el cómo resolverlo no parta, de preferencia, del docente sino del propio alumno, cuando más emplee su energía, ingenio y facultades a las orientaciones necesarias dirigidas a tal propósito, escuchando las hipótesis de los alumnos, dando ejemplos y contraejemplos, matizando las estrategias y aplicando varias, cuando sea posible. Haciendo que el estudiante comprenda que la matemática es un arma útil para despejar muchas incógnitas diarias, interpretar la realidad, conocer la verdad y el engaño, la belleza y la fealdad, lo simple y los complejos, lo definido y lo indefinido, lo real y lo imaginario.

Desde la perspectiva problemática los contenidos matemáticos apelan al desarrollo de muchas habilidades y la adquisición de otras: fundamentalmente los referidos a los conceptos, a los procedimientos y a las actitudes; esto es, al qué hacer, cómo hacer y para qué hacer. Para ello es necesario el desarrollo de la creatividad en el alumno, dejando que las ideas novedosas afloren, los diversos caminos se discutan, apreciando los procesos más que los resultados e interpretando adecuadamente éstos.

Hitt (2000a) afirma que es en la resolución de problemas donde se pone a prueba todo el conocimiento del estudiante, donde es posible que éste haya construido dos esquemas que son incompatibles y cuando esté frente a una tarea compleja, resurjan esas concepciones mal formadas produciendo un mal desempeño. En este sentido, la instrucción jugará un papel importante en la construcción de un esquema apropiado.

Una construcción correcta conlleva una red de conocimientos más amplia y coherente que opaca la vieja construcción (en el sentido de que esta nueva construcción puede ser más fácil de recordar por la amplitud de su red). Tal amplitud tendrá que ver también con la articulación entre representaciones de un concepto. Sin embargo, esto no quiere decir que el otro esquema desaparezca totalmente. Además, no es fácil poder detectar cuándo uno se ha percatado de una incoherencia y la ha resuelto adecuadamente.

El estudiante que toma una parte activa en su aprendizaje decodifica y analiza una situación a partir de las representaciones, concepciones y modelos que ha desarrollado previamente. Estas representaciones desarrolladas por el estudiante se forman de imágenes mentales, de técnicas de resolución, de procedimientos y de algoritmos que provienen, en parte, de los aprendizajes anteriores. Así, si el aprendizaje reposa sobre conocimientos anteriores, puede darse que una concepción dada sea insuficiente o inadecuada en un nuevo contexto.

Según lo expuesto, el conocimiento pasa de un estado de equilibrio a otro a través de unas fases transitorias en el curso de las cuales los conocimientos anteriores son cuestionados, lo que provoca un estado de desequilibrio. ¿Pero qué actividades plantear para provocar estas fases de desequilibrio? Se podrá, por ejemplo, presentar al estudiante problemas que le colocarán delante de un conflicto. Para ello, se elegirán problemas para los cuales los conocimientos del estudiante sean insuficientes, o se recurrirá al conflicto cognitivo: se le presentará problemas cuyas soluciones entren en contradicción con su anticipación del resultado, basada en concepciones. Las situaciones que favorecen un conflicto se denomina “situaciones problemas”.

Poirier (2001) plantea realizar estas actividades reconociendo la importancia de las interacciones en la clase, desde una perspectiva socio constructivista. De esta forma, “el estudiante es llevado a ajustar su forma de proceder a la del otro, durante la misma realización de la tarea, así como a explicar su forma de actuar o su estrategia, lo que lleva a precisar su pensamiento. Confrontando a diversas formas de proceder, reestructura progresivamente su pensamiento y refina sus métodos de trabajo”. La cuestión que se plantea entonces para el enseñante es la de saber cómo llevar al estudiante a pasar de una concepción inicial a una nueva concepción sobre la noción dada. Teniendo en cuenta para ello tres niveles de tareas:

Técnico	Se refiere a situaciones donde se pide a los estudiantes aplicar definiciones, propiedades y teoremas directamente. Las tareas en este nivel también implican el uso de lenguaje formal hasta el grado apropiado al nivel escolar del estudiante.
Movilizable	Se refiere a una forma más amplia de aplicar el conocimiento matemático. La tarea no es de aplicación directa: se necesitan varios pasos, o hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teorema necesarios.
Disponible	Se refiere a la habilidad de resolver problemas sin pistas o contextos, dar contraejemplos, cambiar métodos, utilizar conocimientos de otras ramas de la matemática.

Tabla N° 2. Cuadro resumen del proceso de construcción de conocimientos.

Para construir nuevos conocimientos, es necesario volver a poner en duda el saber adquirido. El estudiante debe darse cuenta de que sus conocimientos iniciales son insuficientes. Y una de las mejores formas de llegar a la puesta en duda del saber adquirido es la resolución de problemas.

Estos aspectos permitirán que el alumno logre un aprendizaje más permanente, en cierta medida construida por él mismo y que no le ha sido dado de antemano, ya que parte del criterio de que la resolución de problemas es el punto de arranque por medio del cual se construye el conocimiento matemático que le permite generar otros más, ya que puede poner en juego estrategias, habilidades, destrezas y conocimientos que traía como aprendizajes previos. Así concebido el aprendizaje matemático, el alumno puede hacer análisis, inducciones, generalizaciones, describir conjeturas y proponer problemas que pueden ser entendidos en contextos diferentes y resueltos mediante estrategias variadas, así como actividades que lo lleven al análisis de procedimientos, a la asunción de actitudes positivas hacia el área y su utilidad en la vida, a la reflexión sobre conceptos y a la comprobación de planteamientos acerca de los problemas propuestos. Con esta concepción se pretende una matemática contextualizada y lleno de significados en donde los objetos matemáticos se perciban en distintas situaciones en la que es necesaria la comunicación por medio de los signos y símbolos matemáticos que permitan leer e interpretar gráficos, tablas, esquemas, modelos, índices, etc., y en donde es mucho más importante el significado que el símbolo y que le lleve comprender, entender y comunicar las relaciones cuantitativas de su entorno (Valiente, 2000).

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo y de inculturación mencionados anteriormente. Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

Los libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas. En un ejercicio se expone una situación y se pide que se llegue a otra: Escribir el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(1+x)^{32}$. Pero si esta actividad, que fue un verdadero problema para los algebristas del siglo XVI, se encuentra, como suele suceder, al final de una sección sobre el binomio de Newton, no constituye ya ningún reto notable. El alumno tiene los caminos bien marcados. Si no es capaz de resolver un problema semejante, ya sabe que lo que tiene que hacer es aprenderse la lección primero.

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces. En esta perspectiva, se trata de considerar como lo más importante:

- que el alumno manipule los objetos matemáticos;
- que active su propia capacidad mental;
- que ejercite su creatividad;
- que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente;

- que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;
- que adquiera confianza en sí mismo;
- que se divierta con su propia actividad mental;
- que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;
- que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

¿Cuáles son las ventajas de este tipo de enseñanza? ¿Por qué esforzarse para conseguir tales objetivos? He aquí unas cuantas razones interesantes:

- porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;
- porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;
- porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autor realizador y creativo;
- porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;
- porque es aplicable a todas las edades.

¿En qué consiste la novedad? ¿No se ha enseñado siempre a resolver problemas en la clase de matemática? Posiblemente los buenos profesores de todos los tiempos han utilizado de forma espontánea los métodos que ahora se propugnan. Pero lo que tradicionalmente se ha venido haciendo por una buena parte de nuestros profesores se puede resumir en las siguientes fases:

- exposición de contenidos, ejemplos, ejercicios sencillos, ejercicios más complicados, ¿problemas?

La forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder más o menos del siguiente modo:

- propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...)
- manipulación autónoma por los estudiantes
- familiarización con la situación y sus dificultades
- elaboración de estrategias posibles
- ensayos diversos por los estudiantes
- herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados)

- elección de estrategias
- ataque y resolución de los problemas
- recorrido crítico (reflexión sobre el proceso)
- afianzamiento formalizado (si conviene)
- generalización
- nuevos problemas
- posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas...

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. Las ventajas del procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido.

El método de enseñanza por resolución de problemas presenta algunas dificultades que no parecen aun satisfactoriamente resueltas en la mente de algunos profesores y mucho menos en la forma práctica de llevarlo a cabo. Se trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran, la componente heurística, es decir, la atención a los procesos de pensamiento, y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

Por ello, cuando en la acción educativa se establecen situaciones de carácter problemático debe tenerse en cuenta que en el análisis resolutivo deben quedar presentes los conceptos, procedimientos y las actitudes.

♦ ***Entre los conceptos se pueden considerar:***

- el establecer si es en realidad un problema o un enunciado trivial
- el estudio de la posibilidad de resolución con los conocimientos que hasta el momento se tienen
- el nivel de dificultad del problema
- las etapas de resolución
- el o los procedimientos de resolución.

♦ ***Entre los procedimientos se encuentran:***

- el uso de simbolismo adecuado de representación
- el enunciado de la o las estrategias que pueden seguirse

- la aplicación de la estrategia específica
- la elección de herramientas matemáticas operativas
- la discriminación de los datos que son necesarios para la resolución
- el apoyo en enunciados análogos en problemas anteriores
- la comprobación de la o las soluciones
- la explicación del procedimiento seguido

♦ ***Entre las actitudes se entienden:***

- el impacto del enunciado del problema
- la decisión de resolverlo
- la iniciativa para elaborar un plan de resolución
- el tipo de procedimiento por su originalidad
- el empeño puesto en la resolución
- la determinación para enfrentar su punto de vista con el de los demás
- la disposición de cambiar de estrategia o punto de vista
- la valoración de los resultados obtenidos
- la decisión para elaborar un nuevo problema a partir del problema resuelto
- la disposición para el trabajo en equipo.

Momentos en la resolución de problemas

El ***primer momento*** que se presenta en la resolución de un enunciado problemático es la de discriminar si es en realidad un problema, un mero ejercicio o una información trivial.

Un ***segundo momento*** es el de analizar si el problema es resoluble o no, dependiendo de los elementos que se tiene para tal fin.

Un ***tercer momento*** es averiguar si el problema es resoluble por el número o la calidad de los datos que ofrezca el enunciado del problema.

Un ***cuarto momento*** es el de apreciar si el enunciado ha sido debidamente comprendido, invitando a redactar otro problema similar o enunciando el mismo con otras palabras.

Un ***quinto momento*** es el de la aplicación de la o las estrategias convenientes para su resolución.

Un ***sexto momento*** es el de la interpretación de o de los resultados obtenidos; ver si la estimación previa corresponde con la magnitud encontrada, si las unidades son correctas, si corresponden con el contexto del problema, si se llegó a varias soluciones ver el porqué de ello y si los resultados son reales o ficticios.

Un ***séptimo momento*** es el de ver la posibilidad de lograr un enunciado que permita “hacer el problema al revés”; esto es, si se puede establecer un problema que considere el resultado como dato y que pueda llevarnos a un nuevo resultado que sea dato del problema original.

2.2.5 Las teorías de aprendizaje y el software educativo

Al momento en que decidimos incorporar un software en nuestra clase para desarrollar actividades de enseñanza-aprendizaje, estamos eligiendo a su vez en forma directa o indirecta diferentes estrategias. Esto es, podemos pretender, por ejemplo, que los alumnos se ejerciten y practiquen, desarrollen actividades de simulación, las que a su vez se pueden planificar en forma individual o grupal.

Las diferentes teorías sobre cómo logramos nuestros aprendizajes, han incluido en sus estudios al rol de los software educativos y páginas online. Como indica Salcedo Lagos (2000), los aportes de cada teoría no son necesariamente convergentes, como no lo es la perspectiva desde la cual se analiza el fenómeno de cada caso, ni los métodos usados para obtener el conocimiento. Si hubiera una teoría que atendiera todos los aspectos del fenómeno, que abarca a las demás teorías, no habría que estudiar las otras. Pero la realidad es diferente. Así surge la necesidad de por lo menos conocer los puntos más importantes de los diferentes aportes relacionados al tema. Por tal motivo, a continuación se presenta una breve descripción de las características de dichas teorías, considerando entre otros.

2.2.5.1 El ***Conductismo*** considera que la asociación es uno de los mecanismos centrales del aprendizaje teniendo en cuenta la secuencia básica estímulo respuesta.

Uno de los autores más representativo del conductismo es Skinner (1985). Su teoría del condicionamiento operante es una gran influencia conductista en el diseño de software.

Las primeras aplicaciones educativas de las computadoras se basan en la enseñanza programada de Skinner (1985). Esta enseñanza consiste en la formulación de preguntas y la sanción correspondiente de la respuesta de los alumnos.

Así, se constituyó la enseñanza asistida por ordenador (EAO). Este tipo de instrucción adquirió un gran auge en la década del 60. Esta enseñanza se centra en programas de ejercitación muy precisos y basados en la repetición.

Están diseñados en pequeños módulos que se desarrollan en forma lineal, y el sujeto no debería tener inconvenientes en avanzar en la solución de la ejercitación. De lo contrario el software estaría mal elaborado.

2.2.5.2 La teoría del *Aprendizaje Significativo* de Ausubel y otros (1997) se centra en el aprendizaje de materias escolares, fundamentalmente. Con el término significativo se opone al memorístico. Aquí son muy importantes los conocimientos previos del alumno; para que un nuevo contenido sea significativo, el alumno los incorpora a los que ya posee previamente, consideran que la enseñanza asistida por ordenador constituye un medio eficaz para proponer situaciones de descubrimiento, pero no reemplaza a la realidad del laboratorio. Señalan además, la falta de interacción entre la computadora, los alumnos y el profesor. A este último, le adjudican un rol fundamental que no puede reemplazar una computadora.

En su teoría, Bruner (1972) le asigna gran importancia a la acción en los aprendizajes, surgiendo así la expresión **A*prendizaje por Descubrimiento*** oponiéndose a la postura anterior de Ausubel et al. (1997), en la cual el aprendiz es sólo receptor del contenido a aprender. En esta teoría de Bruner, es muy importante en la enseñanza de los conceptos básicos que se ayude a los estudiantes a pasar de un pensamiento concreto a un estado de representación conceptual y simbólica. De lo contrario, sólo se lograría la memorización sin establecer ningún tipo de relación.

Considerando los materiales para el aprendizaje, se propone la estimulación entrenando las operaciones lógicas básicas. Se persigue así el objetivo de reorganizar la evidencia, para poder obtener a partir de ella nuevos conocimientos.

El enfoque básico de Piaget (1985) consiste en el estudio de cómo se llega a conocer el mundo exterior a través de los sentidos, atendiendo a una perspectiva evolutiva. Piaget afirma que el desarrollo de la inteligencia se logra por la adaptación de la persona al medio, considerando la *adaptación* como una instancia en la cual ingresa información y otra de *organización* en la cual se estructura esta información. Si bien Piaget no se mostraba a favor de la utilización de la computadora en la enseñanza, sus ideas influyeron en trabajos futuros de otros autores relacionados con la incorporación de la computadora en educación.

2.2.5.3 La teoría del Procesamiento de la información considera al aprendizaje y a la instrucción como dos dimensiones de una misma teoría, ya que ambos deben estudiarse conjuntamente. Se torna de fundamental importancia conocer los factores internos que intervienen en el proceso de aprendizaje y las condiciones externas que pueden favorecer un mejor aprendizaje, Gagné y Glaser (1987).

Para Papert (1987), creador del lenguaje LOGO, la computadora reconfigura las condiciones de aprendizaje y supone nuevas formas de aprender.

Papert inicialmente trabajó con Piaget y tomo como base de su trabajo las obras de éste, surgiendo así la teoría del ***Procesamiento de la información***. Sin embargo, mientras que Piaget no veía grandes ventajas en el uso de la computadora para modelizar la clase de estructuras mentales que postulaba, Papert se vio muy atraído por esta idea y trabajó con los principales investigadores de inteligencia artificial, donde el uso adecuado de la computadora puede significar un importante cambio en las formas de aprender de los alumnos. La computadora se debe convertir para el alumno en una herramienta con la que va a llevar a cabo sus proyectos y debería ser tan funcional como el lápiz.

Ante la postura de Papert, se sostiene que sus planteos son demasiados optimistas, dado que en las escuelas sólo se realizan con la computadora un conjunto de ejercicios rutinarios. Además, la posibilidad de que el alumno interactúe con la computadora es útil, pero se hace muy necesaria la figura de un profesor que le permita extraer conclusiones. Si bien es importante que el alumno pueda reflexionar sobre sus errores, es posible que no pueda encontrar la solución si no se posee el acompañamiento de un profesor.

2.2.5.4 *Aprendizaje cognitivo,* Es el proceso en el que los docentes proveen a los alumnos un sistema de andamios para apoyar su crecimiento y desarrollo cognitivo (UNESCO, 2004). De esta manera, se permite que los alumnos construyan por medio de la interacción sus propias estructuras. Las TIC son herramientas muy importantes para apoyar el aprendizaje cognitivo, permitiendo que los grupos compartan ámbitos de trabajo desarrollando actividades y materiales en colaboración.

Como afirma Urbina Ramírez (1999), el diseño, el contexto de aprendizaje y el rol del sujeto ante el aprendizaje, son factores fundamentales a considerar al momento de analizar un software o páginas online desde las teorías del aprendizaje.

2.2.5.5 Teoría del aprendizaje situado, el concepto de ***"aprendizaje situado"*** (*situated learning,* Lave y Wenger, 1991) indica el carácter contextualizado del aprendizaje que no se reduce a las nociones convencionales de aprendizaje *in situ* o aprendizaje activo, sino a la participación del aprendiz en una comunidad de práctica; esto es, en un contexto cultural, social, de relaciones, del cual se obtiene los saberes necesarios para transformar la comunidad y transformarse a sí mismo.

Esta acepción del aprendizaje que se fundamenta en la participación y la colaboración supone un cambio relevante en cuanto a la perspectiva clásica del aprendizaje. No se trata exactamente de una teoría del aprendizaje o didáctica, sino de una teoría social del aprendizaje (teoría socio-cognitiva) que transforma la concepción de los contextos de aprendizaje y de la interacción entre docentes y discentes así como una nueva visión de las relaciones de cooperación de los actores y agentes. Esta teoría sostiene que la adquisición de habilidades y el contexto sociocultural no pueden separarse. Es decir, el aprendizaje situado es un aprendizaje de conocimiento y habilidades en el contexto que se aplica a situaciones cotidianas reales.

El uso de multimedia en educación es una tendencia muy popular en educación. En los últimos años ha aparecido la utilización de los multimedia tanto por parte de los tutores como de los alumnos. Desde esta perspectiva, el aprendizaje situado es:

1. Un aprendizaje social más que un aprendizaje individual.
2. Un aprendizaje basado en herramientas más que un aprendizaje independiente de herramientas.

3. Un aprendizaje ocupado en los objetos más que un aprendizaje dependiente de símbolos.
4. Un aprendizaje basado en una situación específica más que un aprendizaje teórico.

El modelo de aprendizaje situado considera que la transferencia tiene lugar cuando una situación nueva determina o desencadena una respuesta. Los procesos de aprendizaje son las actividades que realizan los estudiantes para conseguir el logro de los objetivos educativos que pretenden. Constituyen una actividad individual, aunque se desarrolla en un contexto social y cultural, que se produce a través de un proceso de interiorización en el que cada estudiante concilia los nuevos conocimientos a sus estructuras cognitivas previas. La construcción del conocimiento tiene pues dos vertientes: una vertiente personal y otra social.

En general, para que se puedan realizar aprendizajes son necesarios tres factores básicos:

♦ *Inteligencia y otras capacidades, y conocimientos previos* (poder aprender): para aprender nuevas cosas hay que estar en condiciones de hacerlo, se debe disponer de las capacidades cognitivas necesarias para ello (atención, memoria…) y de los conocimientos previos imprescindibles para construir sobre ellos los nuevos aprendizajes

♦ *Experiencia* (saber aprender): los nuevos aprendizajes se van construyendo a partir de los aprendizajes anteriores y requieren ciertos hábitos y la utilización de determinadas técnicas de estudio:
  - instrumentales básicas: observación, lectura, escritura…
  - repetitivas (memorizando): copiar, recitar, adquisición de habilidades de procedimiento…

♦ *De comprensión*: vocabulario, estructuras sintácticas…
- elaborativas (relacionando la nueva información con la anterior): subrayar, completar frases, resumir, esquematizar, elaborar diagramas y mapas conceptuales, seleccionar, organizar…
- exploratorias: explorar, experimentar…
- de aplicación de conocimientos a nuevas situaciones, creación.
- regulativas (metacognición): analizando y reflexionando sobre los propios procesos cognitivos.

- Motivación (querer aprender): para que una persona realice un determinado aprendizaje es necesario que movilice y dirija en una dirección determinada energía para que las neuronas realicen nuevas conexiones entre ellas.

Todo aprendizaje supone una modificación en las estructuras cognitivas de los aprendices o en sus esquemas de conocimiento y, se consigue mediante la realización de determinadas operaciones cognitivas. A lo largo del tiempo se han presentado diversas concepciones sobre la manera en la que se producen los aprendizajes y sobre los roles que deben adoptar los estudiantes en estos procesos.

2.2.5.6 Teoría del aprendizaje fundamentada, es la teoría derivada de los datos recopilados de manera sistemática y analizada por un proceso de investigación. En este método, la recolección de datos, el análisis y la teoría que surgirá de ellos guardan estrecha relación entre sí. Un investigador no inicia una investigación con una teoría preconcebida (a menos que su propósito sea elaborar o ampliar una teoría existente). Comienza con un área de estudio y permite que la teoría emerja a partir de los datos y sea reflejo de la realidad sustentado en conceptos basados en la experiencia. Por ello, la teoría fundamentada está orientado a la generación de conocimientos, aumentar la comprensión del fenómeno en estudio y proporcionar una guía significativa para la acción (Strauss y Corbin, 1998).

Según Patton (1990), la investigación de la evaluación cualitativa se basa tanto en el pensamiento crítico como en el creativo, tanto en la ciencia como en el arte del análisis; para Patton la creatividad y el análisis deben tener en cuenta: a) estar abierto a múltiples posibilidades, b) generar una lista de opciones, c) explorar varias posibilidades antes de explorar una, d) hacer múltiples formas de expresión para estimular el pensamiento, e) usar formas no lineales de pensamiento, tales como ir hacia atrás y hacia adelante, f) divergir de las formas normales de pensamiento y de trabajo, g) confiar en el proceso sin amedrentarse, h) poner energía y esfuerzo al trabajo, i) disfrutar mientras se ejecuta.

Para la teoría fundamentada, el análisis es la interacción entre el investigador y los datos. Es al mismo tiempo arte y ciencia. Es ciencia en el sentido de que mantiene un cierto grado de rigor y se basa el análisis en los datos. La creatividad se manifiesta en la capacidad del investigador que mantiene un equilibrio entre ciencia y la creatividad. Existen procedimientos que proporciona algún grado de estandarización y rigor al proceso. Pero, estos procedimientos no han sido diseñados para seguirse en forma dogmática, sino para usarlos de manera creativa y flexible si se considera apropiado para un proceso investigativo.

2.2.5.7 GEOGEBRA; software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida. ... Es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo -y por eso puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas. El GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas; puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas... etc. - mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible; así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc. **Al estudiante, permite** realizar construcciones desde cero, ya sean dirigidas o abiertas, de **resolución** o de **investigación**. **Al profesor,** para realizar materiales educativos **estáticos** (imágenes, protocolos de construcción) o **dinámicos** (demostraciones dinámicas locales, applets en páginas web), para utilizarlo como ayuda pedagógica.

2.2.5.8 PHPSimplex; es una herramienta online para resolver problemas de programación lineal de uso libre y gratuito. Está pensada principalmente para estudiantes ya que no sólo muestra los resultados sino también las operaciones intermedias.

Según la propia web, entre sus ventajas podemos destacar las siguientes:

- No precisa de ningún lenguaje en el que enunciar el problema
- Ofrece una interfaz amigable
- Es cercano al usuario
- Su manejo es fácil e intuitivo

- No es necesario instalar nada para poder usarlo

PHPSimplex es capaz de resolver problemas mediante el Método Simplex, el Método de las Dos Fases, y el Método Gráfico, y no cuenta con limitaciones en el número de variables de decisión ni en las restricciones de los problemas.

Método Simplex: Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución.

Método de las dos Fases: Éste método difiere del Simplex en que primero hay que resolver un problema auxiliar que trata de minimizar la suma de las variables artificiales. Una vez resuelto este primer problema y reorganizar la tabla final, pasamos a la segunda fase, que consiste en realizar el método Simplex normal.

Método Gráfico: También conocido como método geométrico, consiste en utilizar el cuadrante positivo de las coordenadas cartesianas, mediante el trazo de rectas horizontales, verticales y diagonales, las que permiten determinar un área de solución común, también llamada área factible, es decir, un área que proporciona puntos factibles de solución que satisfacen todas las restricciones, dentro de la cual se localiza la solución óptima.

Entre sus ventajas son que no precisa de ningún lenguaje en el que enunciar el problema, ofrece una interfaz amigable, es cercano al usuario, de manejo fácil e intuitivo, no es necesario instalar nada para poder usarlo, y está disponible en varios idiomas.

Después de probar el funcionamiento de PHPSimplex es preciso resaltar algunos puntos importantes.

1. Posee la función de dar los resultados cuadro por cuadro del método Simplex.
2. Posee la función de dar la respuesta directa del método Simplex.
3. Posee la función de dar los resultados del área factible de forma gráfica del método gráfico.

2.3 LA PROGRAMACIÓN LINEAL

El desarrollo de la programación lineal se considera entre los avances científicos más importantes del siglo XX, pues su impacto ha sido extraordinario. Actualmente es una herramienta de uso común que ha beneficiado a muchas organizaciones en distintos países con ahorros de cualquier índole, por lo que su uso se está ampliando rápidamente a todos los sectores de la sociedad. Una gran mayoría de los cálculos científicos en computadoras usan la programación lineal proliferando las publicaciones y libros sobre esta materia de gran aplicación.

2.3.1 Historia de la programación lineal

En los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos, como Newton, Leibnitz, Bernoulli y, sobre todo, Lagrange, que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.

Posteriormente, el matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático Gaspar Monge (1746-1818), quien en 1 776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1 939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En ese año, el matemático ruso Leonid Vitalevich Kantorovitch publica una extensa monografía titulada Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida, llamada hoy en día programación lineal.

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y por Kantorovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de problema de Koopmans-Kantorovftch. Luego, tres años más tarde, G. Stigler plantea otro problema particular conocido con el nombre de régimen alimenticio optimal.

En los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, G. B. Dantzig formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del United States Departament of Air Force, formarían el grupo que dio en denominarse SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).

Respecto al método simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma International Business Machines (IBM).

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro John (Janos) Von Neumann (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo Teoría de juegos. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la Universidad de Princeton de Estados Unidos, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

La programación lineal constituye un importante campo de la optimización por varias razones, muchos problemas prácticos de la investigación de operaciones pueden plantearse como problemas de programación lineal. Algunos casos especiales de programación lineal, tales como los problemas de flujo de redes y problemas de flujo de mercancías se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar por si mismos mucha investigación sobre algoritmos especializados en su solución. Una serie de algoritmos diseñados para resolver otros tipos de problemas de optimización constituyen casos particulares de la más amplia técnica de la programación lineal. La programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción. Algunos ejemplos son la mezcla de alimentos, la gestión de inventarios, la cartera y la gestión de las finanzas, la asignación de recursos humanos y recursos de máquinas, la planificación de campañas de publicidad, etc.

En la tabla 3, se resume algunos momentos históricos de la programación lineal.

Cronología	
Año	**Acontecimiento**
1826	Joseph Fourier anticipa la programación lineal. Carl Frieddrich Gauss resuelve ecuaciones lineales por eliminación "gaussiana"
1902	Gyula Farkas concibe un método para resolver sistemas de desigualdades.
1947	George Dantzig publica el algoritmo simplex y John von Neuman desarrolla la teoría de la dualidad. Se sabe que Leonid Kantoróvich también formuló la teoría en forma independiente.
1984	Narenda Kamarkar introduce el método de punto interior para resolver problemas de programación lineal.

Tabla 3. Resumen cronológico de la evolución de la Programación Lineal

2.3.2 Programación Lineal

La **Programación Lineal** es un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de ecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.

Consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

Variables

Las variables son números reales mayores o iguales a cero $X_i \geq 0$.

En caso que se requiera que el valor resultante de las variables sea un número entero, el procedimiento de resolución se denomina *Programación entera*.

Restricciones

Las restricciones pueden ser de la forma:

Tipo 1: $A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times X_i$, tipo 2: $B_j \leq \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \times X_i$ y tipo 3: $C_j \geq \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \times X_i$.

Dónde:

- ***A*** = valor conocido a ser respetado estrictamente;
- ***B*** = valor conocido que debe ser respetado o puede ser superado;
- ***C*** = valor conocido que no debe ser superado;
- ***a; b***; y, ***c*** = coeficientes técnicos conocidos;
- **X** = Incógnita;
- *i* = número total de las restricciones, variable de 1 a *n*.
- *j* = número de incógnitas, variable de 1 a *m*.

En general no hay restricciones en cuanto a los valores de ***n*** y ***m***. Pueden ser ***n* = *m***; ***n* > *m***; ó, ***n* < *m***. Los tres tipos de restricciones pueden darse simultáneamente en el mismo problema.

Función Objetivo

La función objetivo puede ser: $Max.\, z = \sum_{i=1}^{m} f_i \times X_i$ o $Min.\; z = \sum_{i=1}^{m} f_i \times X_i$.

Donde:

*f*i = coeficientes son relativamente mayores o iguales a cero

m = número de incógnitas.

Finalmente el Modelo de Programación Lineal queda como se muestra en el ejemplo de maximización:

$Max.\, z = \sum_{i=1}^{m} f_i \times X_i$ ó $C_j \geq \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \times X_i$,con *j* = 1, 2, 3, …, *m*.

2.3.3 Aplicaciones de la programación lineal

La programación lineal constituye un importante campo de la optimización por varias razones, muchos problemas prácticos de la investigación de operaciones pueden plantearse como problemas de programación lineal. Algunos casos especiales de programación lineal, tales como los problemas de flujo de redes y problemas de flujo de mercancías se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar por si mismos mucha investigación sobre algoritmos especializados en su solución. Históricamente, las ideas de programación lineal han inspirado muchos de los conceptos centrales de la teoría de optimización tales como la dualidad, la descomposición y la importancia de la convexidad y sus generalizaciones. Del mismo modo, la programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción. Algunos *ejemplos* son la mezcla de alimentos, la gestión de inventarios, la cartera y la gestión de las finanzas, la asignación de recursos humanos, producción de alimentos, planificación de campañas de publicidad, etc. Figuras 1 y 2, respectivamente.

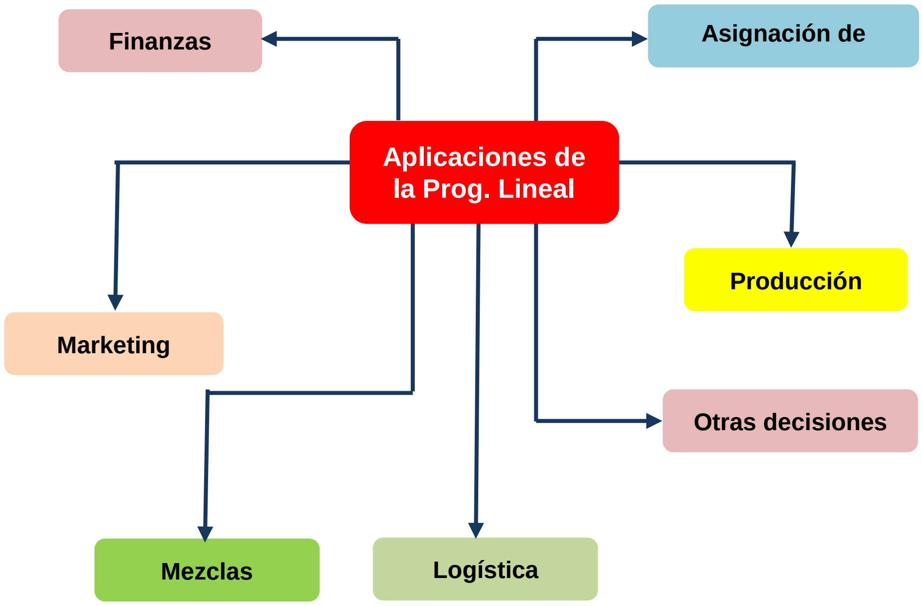


Figura 1: Aplicación de la programación lineal a distintas actividades humanas.

Figura 2: Algunas aplicaciones de la programación lineal al proceso de gestión

Como se puede observar en las figuras 1 y 2, la programación lineal se aplica en muchas ramas del conocimiento y también en actividades específicas.

En las actividades el presente trabajo de investigación solo se resolvió problemas de programación lineal con dos y tres restricciones en el plano, trabajándose para este propósito con dos variables a través del método simplex y representar en forma gráfica usando el PHPSimplex.

2.4 ENSEÑANZA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

2.4.1 Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Definición: Una ecuación de la forma $ax + by = c$ donde a, b y c son constantes con a diferente de cero, b diferente de cero, x, ***e incógnitas***, se conoce como una **ecuación lineal en dos variables de forma general**.

Ejemplos: $2x + y = 4$; $3x - 4y = 9$.

Las ecuaciones $y = -3x + 5$ y $y = -2x$ son ecuaciones lineales en dos variables pero no están expresadas de la forma general. Lo podemos lograr cambiando de lugar los términos correspondientes. De manera que:

$\boldsymbol{y = -3x + 5}$ en la forma general es $\boldsymbol{3x + y = 5}$

$\boldsymbol{y = -2x}$ en la forma general es $\boldsymbol{2x + y = 0}$

El **conjunto solución de una ecuación lineal en dos variables** es el conjunto de pares que hace la ecuación cierta. Por *ejemplo*: ¿cuál de los siguientes pares ordenados $(5, 1)$ y $(8, 3)$ es solución de la ecuación $3x - 4y = 12$? La respuesta a esta pregunta la podemos hallar sustituyendo los valores de las coordenadas x e y en la ecuación dada. Veamos:

1) Si $3x - 4y = 12$ entonces $3(5) - 4(1) = 15 - 4 = 11$. El par ordenado $(5, 1)$ no es solución de la ecuación $3x - 4y = 12$.
2) Si $3x - 4y = 12$ entonces $3(8) - 4(3) = 24 - 12 = 12$. Por tanto, el par ordenado $(8, 3)$ es solución de la ecuación $3x - 4y = 12$.

Gráfica de ecuaciones lineales en dos variables

Las gráficas de las ecuaciones lineales son **líneas rectas**. Una forma de construir gráfica de líneas recta es a través de interceptos.

La coordenada x del punto donde interseca la gráfica de la ecuación en el eje X se llama **intercepto en x**. Para hallarlo se le asigna a y el valor de cero. El intercepto en X se expresa de la forma $(x, 0)$.

La coordenada y del punto donde interseca la gráfica de la ecuación en el eje de Y se llama **intercepto en y**. Para hallarlo se le asigna a x el valor de cero. El intercepto en Y se expresa de la forma $(0, y)$.

Ejemplo: La gráfica de las ecuaciones: a) $x - y = 3$ y b) $2x + 3y = 6$, usando interceptos se realiza, del siguiente modo:

Para $x - y = 3$: $x = 0 \rightarrow y = -3$, la recta intercepta al eje *Y* en $(0, -3)$

$y = 0 \rightarrow x = 3$, la recta intercepta al eje *X* en $(3, 0)$

Para $2x + 3y = 6$: $x = 0 \rightarrow y = 2$, la recta intercepta al eje *Y* en $(0, 2)$

$y = 0 \rightarrow x = 3$, la recta intercepta al eje *X* en $(3, 0)$

Siendo su representación gráfica lo que se muestra en la gráfica de la figura 3.

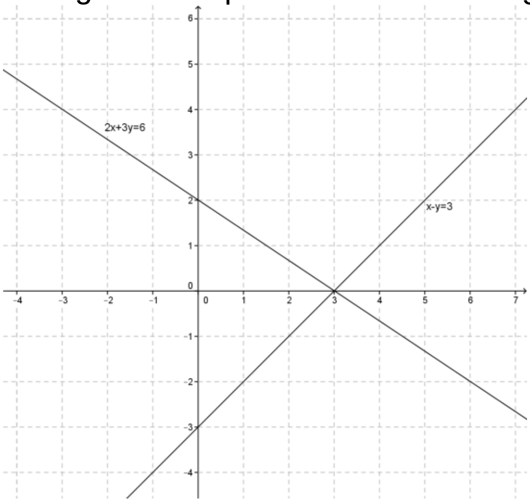


Figura 3: Gráfica de dos ecuaciones con dos incógnitas de solución única

2.4.2 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Se llama sistema de ecuaciones a un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen idéntica solución, es decir, que las soluciones satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas; también se les llama sistema de ecuaciones simultaneas.

La Solución de un sistema de ecuaciones requiere de tantas ecuaciones independientes como incógnitas se tengan que determinar; así un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas constara de dos ecuaciones independientes; así un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas constará de tres ecuaciones independientes; etc.

Si un sistema tiene solución se dice que es un sistema posible o **Compatible**. Si la solución es única diremos que el sistema es **Compatible y determinado**. Si tiene infinitas soluciones diremos que el sistema es **Compatible e indeterminado**. Cuando el sistema no tiene solución, diremos que las ecuaciones y el sistema son incompatibles.

Una expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es:

$$\cdot \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + b_{22}y = b_2 \end{cases},$$

Donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 son números reales. Cada una de estas ecuaciones en forma gráfica representa a la ecuación de una línea recta. La pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y la pendiente de la segunda recta es $-a_{21}/a_{22}$ (con $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$. Una solución de este sistema es un par de números reales, denotado por (x, y), que satisface a las dos ecuaciones del sistema a la vez. Si las pendientes de las rectas son diferentes el sistema tiene solución única. Si las pendientes de las rectas son iguales, el sistema puede admitir infinitas soluciones o ninguna solución.

Las ecuaciones equivalentes son las que se obtienen al multiplicar o dividir una ecuación por un mismo número. Por *ejemplo*, $x + y = 4$ y $2x + 2y = 8$, son equivalentes porque dividiendo por 2 la segunda ecuación se obtiene la primera. Las ecuaciones equivalentes tienen infinitas soluciones comunes. Ecuaciones independientes son las que no se obtienen una de la otra.

Una solución de un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas es una pareja ordenada (x, y) que hace que ambas ecuaciones sean verdaderas. Como la solución de un sistema satisface ambas ecuaciones simultáneamente, decimos que tenemos un sistema de ecuaciones simultáneas. Cuando encontramos todas las soluciones de un sistema, se dice que el sistema está resuelto.

Método de Gauss-Jordan para la Resolución de sistema de ecuaciones

El método de Gauss-Jordan, llamado también eliminación de Gauss-Jordan (o simplemente operaciones elementales entre filas, es un método práctico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con n número de variables, encontrando matrices y sus inversas.

Para resolver sistema de ecuaciones lineales de la forma: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

Se utiliza los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales en su anotación matricial, expresando como una matriz cuadrada aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & b_2 \end{bmatrix}$$

Una vez hecho esta operación se procede a convertir la matriz de los coeficientes de las variables en una matriz identidad mediante las operaciones de filas, con el siguiente convenio:

- $f_1 \times f_2$: intercambiar la fila ***i*** con la fila ***j***.
- $k.f_i$: Multiplicar la fila ***i*** por el número real k.
- $f_i \pm k.f_j$: sumar o restar a la fila ***i*** la fila ***j*** multiplicado por k.

Si mediante las operaciones elementales se llega a la matriz de la forma:

$.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & b_2 \end{bmatrix}$ se llega a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & d_1 \\ 0 & 1 & . & d_2 \end{bmatrix}$. El sistema tiene solución única $\{(d_1, d_2)\}$.

Cuya gráfica son dos rectas secantes.

Ejemplo. *Sistema de ecuación de primer grado con dos incógnitas de solución única.*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$.

a) **Método de Gauss-Jordan**

De $\begin{bmatrix} 2 & 1 & . & 7 \\ 3 & -5 & . & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - \frac{3}{2}f_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & . & 7 \\ 0 & -\frac{13}{2} & . & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{13}f_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & . & 7 \\ 0 & 1 & . & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & . & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}$,

$\xrightarrow{f_1 - \frac{1}{2}f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 3 \\ 0 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}$. Luego conjunto solución es el conjunto $\{(3, 1)\}$.

No existe ningún otro punto del plano que satisfaga a la vez a las dos ecuaciones del sistema.

Método gráfico. Se representa mediante dos rectas secantes cuyo punto de intersección es el conjunto solución.

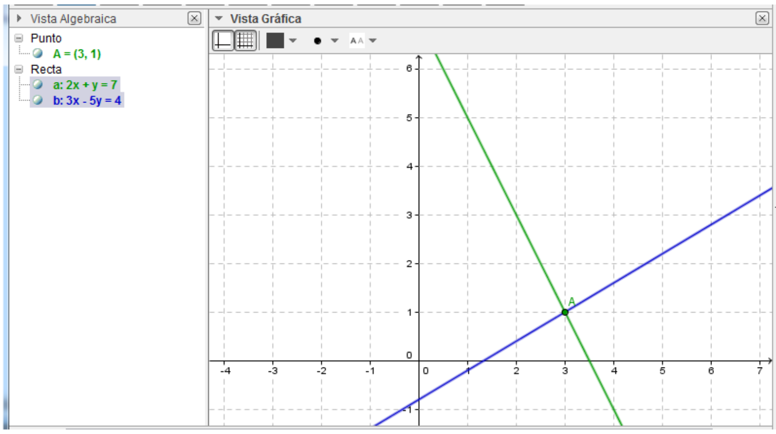


Figura 4: Solución gráfica de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

Si mediante las operaciones elementales se llega a la matriz de la forma:

De $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_1 \\ a_{21} & b_{22} & . & b_2 \end{bmatrix}$ se llega a $\begin{bmatrix} 1 & m & . & d_1 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix}$. El sistema está formada por ecuaciones equivalentes y solución infinita, una recta de ecuación: $ax + by = c$.

Ejemplo. *Sistema con un conjunto infinito de soluciones.*

Resolver: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$.

Método de Gauss-Jordan

De $\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 2 \\ 2 & 2 & . & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(½)f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 2 \\ 1 & 1 & . & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 2 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix}$. Se tiene que los dos sistemas equivalen a: $x + y = 2$, siendo la solución $(x, 2–x)$.

Método gráfico. Al ingresar las dos ecuaciones al Geogebra se obtiene sólo una recta, por ser las ecuaciones del sistema equivalentes.

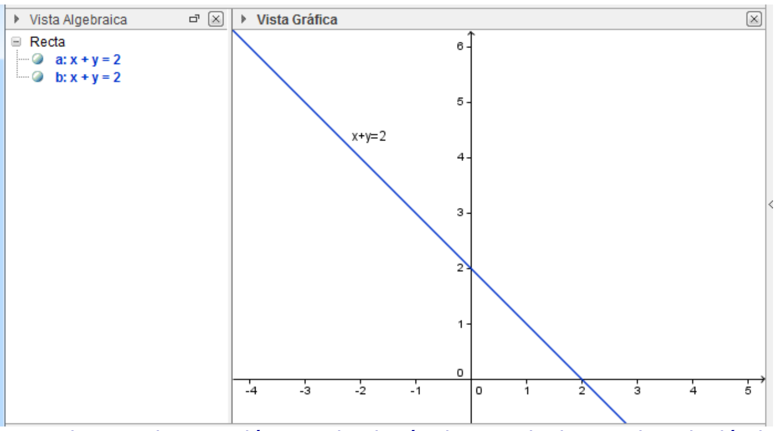


Figura 5: Sistema de ecuación con dos incógnitas equivalentes de solución infinita

Si mediante las operaciones elementales se llega a la matriz de la forma:

De $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & b_2 \end{bmatrix}$ se llega a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & d_1 \\ 0 & 0 & . & d_2 \end{bmatrix}$. El sistema tiene no tiene solución (es inconsistente, cuya gráfica son dos rectas paralelas.

Ejemplo. *Sistema sin solución o inconsistente.*

Resolver: $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=8 \end{cases}.$

Método de Gauss-Jordan

De $\begin{bmatrix} 1 & -2 & . & 2 \\ 2 & -4 & . & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(½)f_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & . & 2 \\ 1 & -2 & . & 7/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 2 \\ 0 & 0 & . & 3/2 \end{bmatrix}$. La matriz aumentada no resulta escalonada, en consecuencia el sistema no admite solución alguna: ϕ.

Método gráfico: Ingresando las dos ecuaciones al Geogebra se obtiene como gráfica dos rectas paralelas, como se muestra en la figura 6.

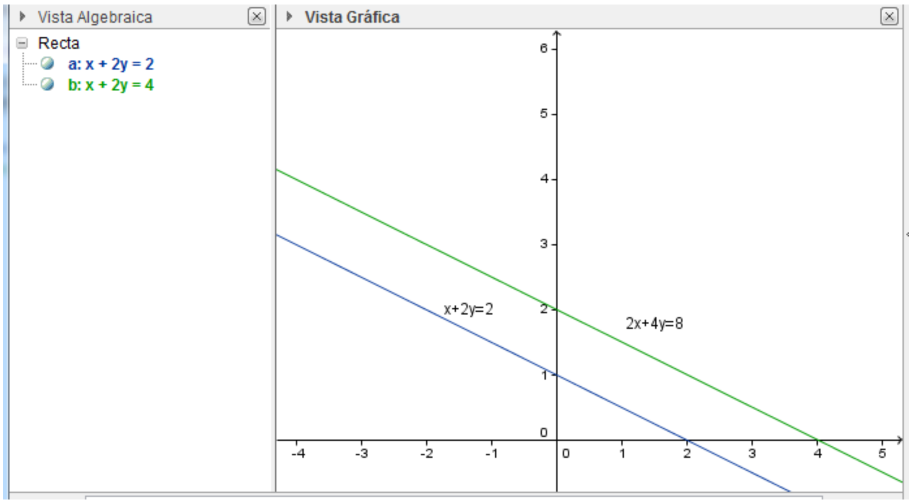


Figura 6: Gráfica de sistema de ecuaciones inconsistente de solución nula.

2.4.3 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es cualquier desigualdad que, directamente o mediante transformaciones de equivalencia, se pueden expresar de una de las formas siguientes:

$\boldsymbol{ax + by + c > 0;} \quad \boldsymbol{ax + by + c < 0;} \quad \boldsymbol{ax + by + c \leq 0}$ **ó** $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$

con a, b y c números reales.

La solución general está formada por el conjunto de todos los pares (s_1, s_2) que verifican la inecuación o desigualdad.

Gráficamente, la solución, son los puntos del plano que tienen por coordenadas (s_1, s_2).

Para resolver esta inecuación recurrimos a la ecuación $ax + by + c = 0$, que es la ecuación de una recta y que, para cada uno de sus puntos, tiene por ordenada $y = \frac{-ax - c}{b}$.

La inecuación anterior, mediante transformaciones de equivalencia, se puede expresar, dependiendo del signo de relación, como $y \leq \frac{-ax - c}{b}$, es decir, la verifican todos los puntos que tiene una ordenada (y) menor (o mayor o igual, según el signo de relación) que la ordenada de los puntos de la recta.

Por lo tanto, la *solución general de una inecuación lineal con dos incógnitas es un semiplano*, delimitado por una recta que toma el nombre de frontera. Siendo (s_1, s_2), el conjunto solución de la desigualdad el conjunto de puntos que pertenecen al semiplano.

Ejemplo. *Conjunto solución de una inecuación de tipo estricto y no estricto.*

Una inecuación de tipo estricto tiene como desigualdades (> ó <), así al graficar la inecuación $\mathbf{2x - y - 3 < 0}$**,** el conjunto solución está referido al semiplano abierto por encima de la recta $2x - y - 3 = 0$, donde los puntos que pertenecen a esta recta no son parte de la solución, como se muestra en la figura 7.

Una inecuación de tipo no estricto tiene como desigualdades (≥ ó ≤), así al graficar la inecuación $\mathbf{3x + 2y \leq 4}$**,** el conjunto solución está referido al semiplano cerrado por debajo de la recta $3x + 2y = 4$, y los puntos que pertenecen a esta recta son parte de la solución, como se muestra en la figura 7.

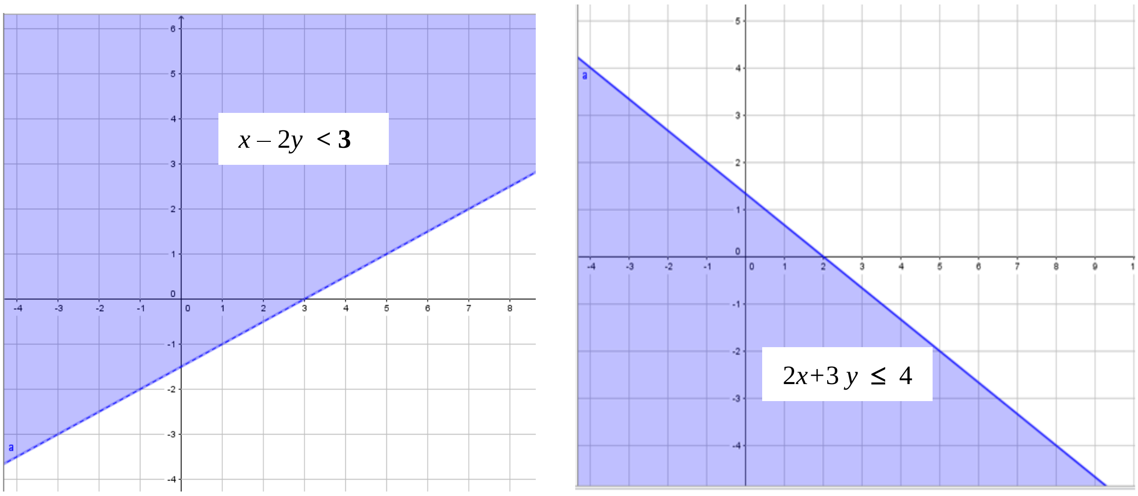


Figura 7: Gráfica de la inecuaciones: $\mathbf{x - 2y - 3 < 0}$ **y** $\mathbf{2x + 3y \leq 4}$**,** respectivamente.

2.4.4 Sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas están dados por la relación de dos o más inecuaciones, siendo la solución de ellas la unión o intersección de semiplanos.

Ejemplo. *Conjunto solución de dos inecuaciones lineales*

Consideremos, en la escena, el sistema formado por las dos inecuaciones lineales con dos incógnitas: $\begin{cases} 2x+2y+3<0 \\ x-y+3<0 \end{cases}$.

Aparecen representadas en la figura 8, los semiplanos abiertos, solución de ambas inecuaciones. La solución es el conjunto de puntos $\{(x_1, x_2)\}$, que pertenecen a la vez a los dos semiplanos.

A intersección de los semiplanos se denomina es la región común a ambos semiplanos.

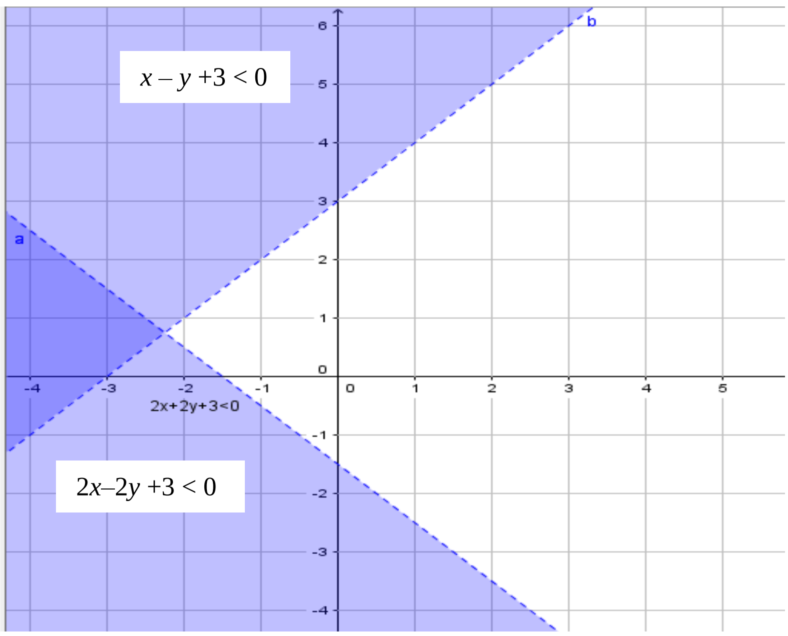


Figura 8. Gráfica de sistema de inecuaciones formado por: $2x+ 2y + 3 < 0$ y $x - y + 3 < 0$.

Ejemplo. *Conjunto solución de varias inecuaciones lineales*

Dibujemos el conjunto solución del sistema de tres inecuaciones: $\begin{cases} x+y-6<0 \\ x-2y+1<0 \\ 2x-y-1>0 \end{cases}$.

Solución. En la figura 9, se muestra el conjunto solución del sistema formado por las tres inecuaciones, la región triangular (la más sombreada del plano), corresponde al conjunto solución de las tres desigualdades.

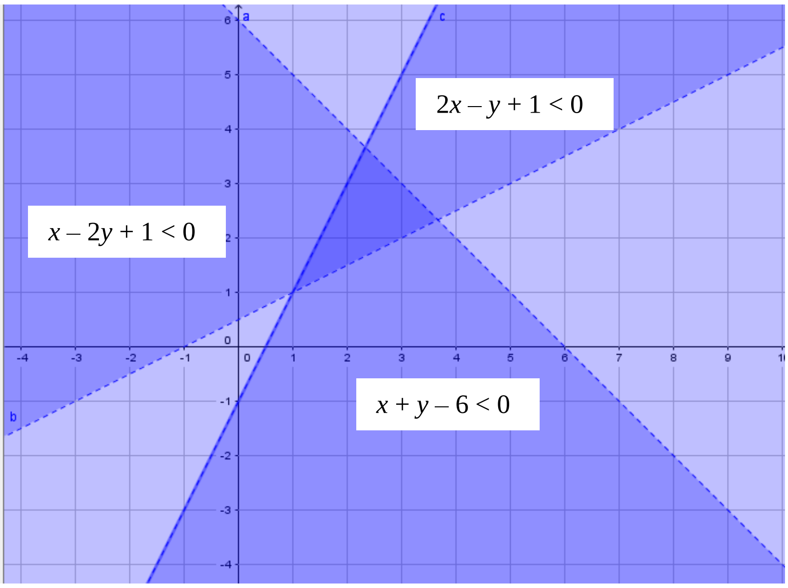


Figura 9. Gráfica de sistema inecuación formado por: $x + y - 6 < 0$, $x - 2y + 1 < 0$, $2x - y - 1 > 0$

Ejemplo. ***Sistema de inecuaciones con solución vacía***

Graficar el sistema de inecuación: $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ 2x + 2y \geq 6 \end{cases}$.

La solución de este sistema formado por las dos inecuaciones se representa en la figura 10. Se observa que los dos semiplanos son disjuntos, su intersección es vacía, en consecuencia no existe ningún punto de $\mathbf{R}^2$ que satisfaga a las dos inecuaciones.

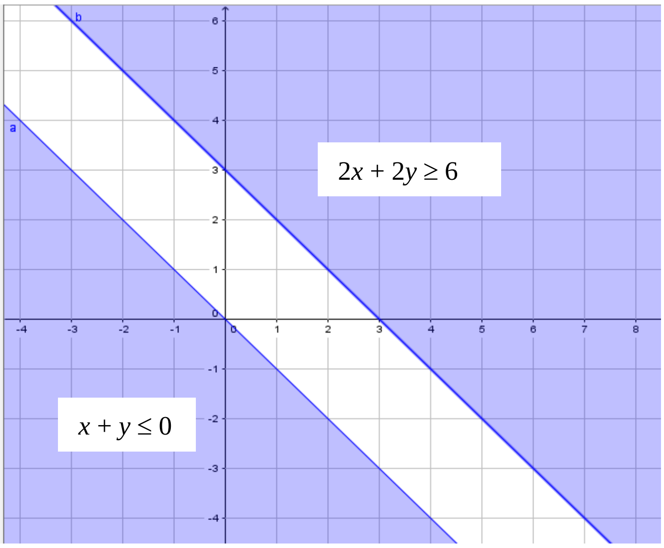


Figura 10. Gráfica de sistema formado por: $x + y \leq 0$ y $2x + 2y \geq 6$, con solución vacía.

2.4.4 Programación lineal

Según (Haeussler, 1997:306) en un problema de Programación Lineal, la función a ser maximizada o minimizada es llamada función objetivo, para esta función existen infinitas soluciones para el sistema de restricciones (llamadas **soluciones factibles** o **puntos factibles**), la meta es encontrar una que sea una solución óptima (esto es, una que dé el valor máximo o mínimo de la función objetivo.

Elementos básicos

El modelo de Programación Lineal está formado por tres elementos básicos: a) Variables de decisión que se trata de determinar, b) Objetivo (meta) que se trata de optimizar y c) Restricciones que se necesita satisfacer.

a) VARIABLES

En programación lineal a menudo se hace referencia a los aspectos controlables de un problema de decisión como actividades. Por lo tanto, las variables x_1 y x_2 representan a dos niveles de actividad, entonces se procede:

Hipótesis 1: de programación lineal:

DIVISISILIDAD: Todas las variables pueden asumir cualquier valor real.

Muchas actividades en el mundo real pueden variar de forma continua, es decir son divisibles infinitamente. Por *ejemplo*, la cantidad de un artículo fabricado por hora puede ajustarse a cualquier valor dentro de unos límites razonables. Sin embargo, hay actividades reales que sólo pueden tomar valores enteros, por *ejemplo* el número de viajes necesarios para trasladar cierto objeto de un lugar a otro o el número de equipos informáticos que debe adquirir una empresa. Si la actividad real no es divisible de forma infinita; pero el nivel normal de actividad es un número grande, las condiciones de divisibilidad pueden servir como una aproximación conveniente, aproximando al entero más cercano. Si el nivel normal de actividad es relativamente pequeño, digamos menor que 10, se necesita recurrir a la programación entera.

Hipótesis 2: de programación lineal:

CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD: Todas las variables son no negativas

Si $X_i \leq 0$, entonces sustituir en el modelo X_i por X_i'; $X_i' \geq 0$

Si X_i no restringida en signo, entonces indicar $X_i = X_{i1} - X_{i2}$; $X_{i1}, X_{i2} \geq 0$. Sustituir X_i por $(X_{i1} - X_{i2})$

Esta hipótesis refleja la naturaleza de la mayoría de las actividades del mundo real; donde rara vez tiene sentido, dentro de un contexto económico o de ingeniería, hablar de niveles negativos de actividad. Sin embargo, esta consideración no significa una pérdida de generalidad. Cualquier número (positivo, cero o negativo) puede expresarse como la diferencia algebraica de dos números no negativos. Si una actividad puede ocurrir tanto en niveles negativos como positivos (por ejemplo, comprar o vender bonos), se introducen dos variables para esta actividad, X^+ para niveles no negativos, y X- para niveles no positivos. Su diferencia $X = X^+ - X$- representa el nivel real de la actividad. El software de optimización suele permitir al usuario definir directamente este tipo de variables como libres e interpretando que su rango de variación está entre menos y más infinito.

b) FUNCIÓN OBJETIVO

Los problemas de programación lineal se refieren a la manera de encontrar el máximo o mínimo de una función lineal: $Z = F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$, llamada función objetivo sobre un conjunto convexo poliédrico **F** que incluye las condiciones de que las incógnitas (variables) sean no negativas: $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0$.

Cada punto de **F** recibe el nombre de solución factible del problema, y un punto en **F** para el cual f toma su valor máximo (o mínimo) recibe el nombre de solución óptima.

Hipótesis 3: de programación lineal:

LINEALIDAD: Todas las relaciones entre variables son lineales

En programación lineal esto implica:

- Proporcionalidad de las contribuciones. La contribución individual de cada variable es estrictamente proporcional a su valor; y el factor de proporcionalidad es constante para toda la gama de valores que la variable puede asumir.
- Actividad de las contribuciones. La contribución total de las variables es igual a la suma de las contribuciones individuales, sea cual sea el valor de las variables.

La hipótesis 3, implica beneficios constantes a escala e impide economías y deseconomías de escala. En la práctica esta condición posiblemente no se cumpla con exactitud; en particular para valores muy pequeños o muy grandes de actividad. Sin embargo, si se cumple en forma aproximada dentro del intervalo normal de los valores de solución, es posible emplear el modelo de programación lineal como una buena aproximación.

c) RESTRICCIONES

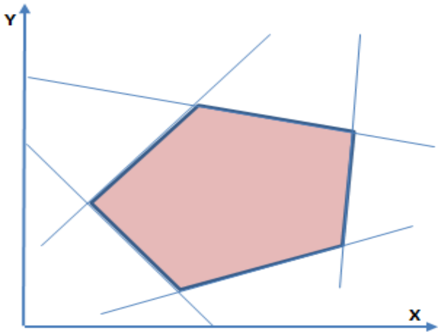
Los coeficientes de las variables en las restricciones se denominan coeficientes técnicos y al segundo miembro de la desigualdad o término independiente se conoce como coeficiente del segundo miembro o parámetro del lado derecho de la restricción (en la página de PHPSimplex). La programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción.

Limitaciones de la programación lineal

- No hay garantía de obtener soluciones enteras.
- No necesariamente al redondear se llega a soluciones óptimas.
- Para esto es necesario emplear la programación entera.
- En algunos casos las soluciones podrían ser deficientes.
- Tal es el caso de las decisiones donde las variables deben tomar un valor como 0 ó 1, como las decisiones de sí o no.
- No permite la incertidumbre, ya que es un modelo determinístico y no probabilístico
- Asume que se conocen todos los coeficientes de las ecuaciones.
- Tanto la función objetivo como las restricciones están limitadas a ser lineales.
- Existen técnicas más avanzadas de programación no lineal.
- Los problemas representan los límites del escenario de la situación planteada.
- Muestran por desigualdades de tipo lineal. El sistema completo muestra una región del plano.

Región Factible

Es precisamente la región determinada por el sistema de restricciones de tipo lineal. Es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen restricciones del problema, las regiones se determinan en un sistema de coordenadas cartesianas y, pueden ser acotado o no acotados, figura 11.



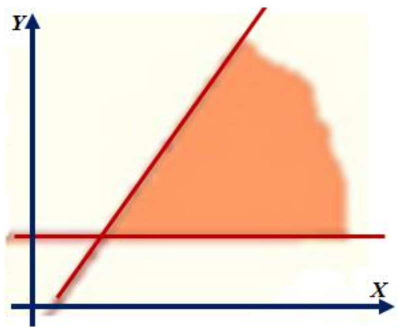


Figura 11. Gráfica de región acotada y no acotada en el plano $\mathbf{R}^2$.

Soluciones factibles

Cualquier solución dentro de la región factible, es decir cualquier punto dentro de la región factible determina valores numéricos para las variables que satisfacen las restricciones.

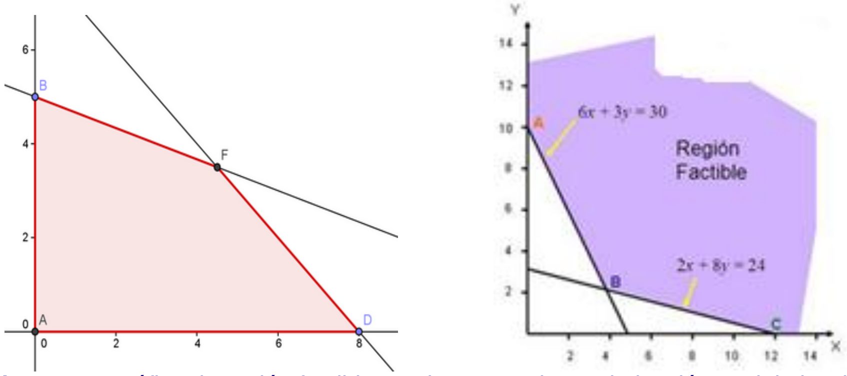


Figura 12. Gráfica de región factible en el proceso de maximización y minimización.

Métodos de resolución de problemas de Programación Lineal

Entre los métodos para resolver problemas de Programación lineal, destacan: el **método Gráfico**, el **método de Dos Fases** y el **método Simplex**; en la presente investigación se utilizarán los métodos Simplex y Gráfico.

Método simplex

El método Simplex es un procedimiento interactivo que permite mejorar la solución de la función objetivo en cada paso. El proceso concluye cuando no es posible continuar mejorando dicho valor, es decir, se ha alcanzado la solución óptima (el mayor o menor valor posible, según el caso, para el que se satisfacen todas las restricciones).

Partiendo del valor de la función objetivo en un punto cualquiera, el procedimiento consiste en buscar otro punto que mejore el valor anterior. Como se verá en el gráfico los puntos son los vértices del polígono, cuya búsqueda se realiza mediante desplazamientos por las aristas del polígono, desde el vértice actual hasta uno adyacente que mejore el valor de la función objetivo. Siempre que exista región factible, como su número de vértices y de aristas es finito, será posible encontrar la solución.

El método Simplex se basa en la propiedad: si la función objetivo $Z = f(X, Y)$ no toma su valor máximo en el vértice A, entonces existe una arista que parte de A y a lo largo de la cual el valor de Z aumenta.

El método Simplex únicamente trabaja con restricciones del problema cuyas inecuaciones sean del tipo "≤" (menor o igual) y sus coeficientes independientes sean mayores o iguales a 0. Por tanto habrá que estandarizar las restricciones para que cumplan estos requisitos antes de iniciar el algoritmo del Simplex. En caso de que después de éste proceso aparezcan restricciones del tipo "≥" (mayor o igual) o "=" (igualdad), o no se puedan cambiar, será necesario emplear otros métodos de resolución, siendo el más común el método de las Dos Fases.

Preparando el modelo para adaptarlo al método Simplex

La forma estándar del modelo de problema consta de una función objetivo sujeta a determinadas restricciones:

Función objetivo:	$Z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$.
sujeta a las restricciones:	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$
en donde	$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$

El modelo debe cumplir las siguientes condiciones:

1. El objetivo consistirá en maximizar o minimizar el valor de la función objetivo (por ejemplo, incrementar ganancias o reducir pérdidas, respectivamente).

2. Todas las restricciones deben ser ecuaciones de igualdad (identidades matemáticas).

3. Todas las variables (x_i) deben tener valor positivo o nulo (condición de no negatividad).

4. Los términos independientes (b_i) de cada ecuación deben ser no negativos.

Es preciso adaptar el problema a modelar a la forma estándar para poder aplicar el algoritmo del Simplex.

Tipo de optimización.

Como se ha comentado, el objetivo del método consistirá en optimizar el valor de la función objetivo. Sin embargo se presentan dos opciones: obtener el valor óptimo mayor (maximizar) u obtener el valor óptimo menor (minimizar).

Además existen diferencias en el algoritmo entre el objetivo de **maximización** y el de **minimización** en cuanto al criterio de condición de parada para finalizar las iteraciones y a las condiciones de entrada y salida de la base. Así:

Objetivo de maximización

Condición de parada: cuando en la fila Z no aparece ningún valor negativo.

Condición de entrada a la base: el menor valor negativo en la fila Z (o el de mayor valor absoluto entre los negativos) indica la variable P_j que entra a la base.

Condición de salida de la base: una vez obtenida la variable entrante, la variable que sale se determina mediante el menor cociente P_0/P_j de los estrictamente positivos.

Objetivo de minimización

Condición de parada: cuando en la fila Z no aparece ningún valor positivo.

Condición de entrada a la base: el mayor valor positivo en la fila Z indica la variable P_j que entra a la base.

Condición de salida de la base: una vez obtenida la variable entrante, la variable que sale se determina mediante el menor cociente P_0/P_j de los estrictamente negativos.

Normalización de las restricciones

Otra de las condiciones del modelo estándar del problema es que todas las restricciones sean ecuaciones de igualdad (también llamadas restricciones de igualdad), por lo que hay que convertir las restricciones de desigualdad o inecuaciones en dichas identidades matemáticas.

La condición de no negatividad de las variables (x_1, x_2, ..., $x_n \geq 0$) es la única excepción y se mantiene tal cual.

Restricción de tipo "≤"

Para normalizar una restricción con una desigualdad del tipo "≤", hay que añadir una nueva variable, llamada variable de holgura x_s (con la condición de no negatividad: $x_s \geq 0$). Esta nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y sumando en la ecuación correspondiente (que ahora sí será una identidad matemática o ecuación de igualdad).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 1.x_s = b_1 .$$

Restricción de tipo "≥"

Para una desigualdad del tipo "≥", también hay que añadir una nueva variable llamada variable de exceso x_s (con la condición de no negatividad: $x_s \geq 0$). Esta nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y restando en la ecuación correspondiente.

Surge ahora un problema con la condición de no negatividad con esta nueva variable del problema. Las inecuaciones que contengan una desigualdad de tipo "≥" quedarían:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 1.x_s = b_1 .$$

Al realizar la primera iteración con el método Simplex, las variables básicas no estarán en la base y tomarán valor cero. En este caso la nueva variable x_s, tras hacer cero a x_1 y x_2, tomará el valor $-b_1$ y no cumpliría la condición de no negatividad. Es necesario añadir otra nueva variable x_r, llamada variable artificial, que también aparecerá con coeficiente cero en la función objetivo y sumando en la restricción correspondiente. Quedando entonces de la siguiente manera:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - 1.x_s + 1.x_r = b_1 .$$

En la siguiente tabla se resume según la desigualdad el tipo de variable que aparece en la ecuación normalizada, así como su signo:

Tipo de desigualdad	Tipo de variable que aparece
≥	- exceso + artificial
=	+ artificial
≤	+ holgura

Desarrollando el método Simplex

Una vez estandarizado el modelo puede ocurrir que sea necesario aplicar el método Simplex o el método de Dos Fases. La figura 13, ilustra los pasos a seguir en la resolución de un problema de programación lineal.

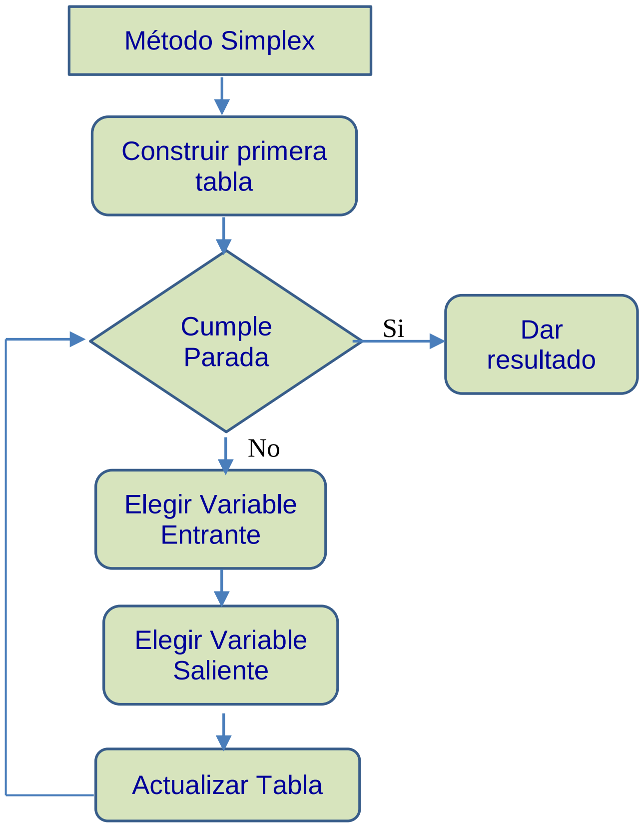


Figura 13. Diagrama de flujo para el proceso ejecución del método Simplex.

A continuación se explican paso a paso los puntos de cada método, concretando los aspectos a tener en cuenta.

Proceso de desarrollo con el Método Simplex

Problema:

Maximizar o minimizar

$$Z = F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \text{, tal que } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \end{cases}.$$

donde x_1, x_2, b_1 y b_2 son no negativos

Método

1. Configuración de la tabla inicial

	x_1	x_2	s_1	s_2	Z	$\boldsymbol{b}$
s_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
s_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…
Z	$-c_1$	$-c_2$	0	0	1	0

indicadores

Existen 2 variables de holgura s_1 y s_2 – una por cada restricción

2. Si todos los indicadores en el último reglón son no negativos, entonces Z tienen un valor máximo cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. El máximo es 0. Si existen indicadores negativos, localice la columna en lo que aparezca el indicador más negativo. Esta columna pivote proporciona la variable entrante.
3. Divida cada entrada positiva por encima de la línea punteada en la columna de la variable entrante, con el correspondiente valor de b (tomando el valor de b como dividendo y la entrada positiva como divisor).
4. Marque la entrada en la columna pivote que corresponde al cociente más pequeño del paso 3. Ésta es la entrada pivote. La variable saliente es aquella que está a la izquierda del reglón pivote.
5. Utilice operaciones elementales sobre filas para transformar la tabla en una nueva tabla equivalente que tenga un 1 donde estaba la entrada pivote y ceros en las otras entradas de esa columna.
6. En el lado izquierdo de esta tabla la variable entrante reemplaza a la variable saliente.
7. Si los indicadores de la nueva tabla son todos no negativos, tendremos una solución óptima. El valor máximo de Z es la entrada en la última fila y la última columna. Ocurre cuando las variables a la izquierda de la tabla son iguales a las correspondientes entradas en la última columna. Todas los demás variables son iguales a cero. Si al menos uno de los indicadores es negativo, se repite el procedimiento empezando por el paso 2 aplicado en la nueva tabla.

Método gráfico

Para la resolución de problemas de programación lineal mediante este método, consiste en un procedimiento que consignan la mayoría de los autores, consta de siete pasos:

1. Elegir las incógnitas y se dibuja el sistema de coordenadas asociando a un eje la variable "x_1" y al otro la "x_2", asociando al eje horizontal X y al eje vertical Y.

2. Marcar en dichos ejes una escala numérica apropiada a los valores que pueden tomar las variables de acuerdo a las restricciones del problema. Para ello en cada restricción se hacen nulas todas las variables excepto la correspondiente a un eje concreto, determinándose así el valor adecuado para dicho eje. Este proceso se repite para cada uno de los ejes.
3. Escribir la función objetivo en función de los datos del problema.
4. Presentar las restricciones, comenzando con la primera, se dibuja la recta que se obtiene al considerar la restricción como igualdad, que serán regiones (semiplanos cerrados delimitado por las rectas), haciéndose esta operación para cada una de las restricciones.
5. Averiguar el conjunto de soluciones factibles representando gráficamente las restricciones. La región factible es la intersección de las regiones delimitadas tanto por el conjunto de restricciones, como por las condiciones de no negatividad de las variables.
6. Determinar las coordenadas de los vértices de la región factible (región convexa) y determinar sus puntos extremos, o vértices del polígono que representa (de la región convexa, sector acotado). Estos vértices son los puntos candidatos a soluciones óptimas.
7. Evaluar la función objetivo $\mathrm{Z} = \mathrm{F}(x_1 , x_2)$ en cada uno de los puntos (vértices de la región convexa). Luego, hallar la solución óptima para o valor de Z, (según el problema sea para maximizar o minimizar).

A continuación se desarrolla **ejemplos** de maximización, minimización y sin solución, tanto por el método Simplex como método gráfico.

EJEMPLO 1. Maximizar la función objetivo: $Z = F(x_1 , x_2) = 10x_1 + 20x_2$, sujeto a las restricciones: $4x_1 + 2x_2 \leq 20$;

$$8x_1 + 8x_2 \leq 20;$$

$$2x_2 \leq 10; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Método Simplex

Replanteando las ecuaciones adhiriendo variable holgura

$4x_1 + 2x_2 + s_3 + 0s_4 + 0s_5 = 20;$

$8x_1 + 8x_2 + 0s_3 + 1s_4 + 0s_5 = 20;$

$0x_1 + 2x_2 + 0s_3 + 0s_4 + 1s_5 = 10;$

$Z – 10x_1 – 20x_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5 = 0$

Tabla Simplex y elección del elemento pivote:

Variable	Z	x_1	x_2	S_3	S_4	S_5	CD	
s_3	0	4	2	1	0	0	20	20÷2=10
s_4	0	8	8	0	1	0	20	20÷8=2,5
s_5	0	0	2	0	0	1	10	10÷2= 5
Z	1	–10	–20	0	0	0	0	

Tabla N°4. Cuadro resumen para el inicio del método Simplex para maximizar ejemplo 1.

El –20 por ser el menor negativo indica la columna pivote y 20÷8=2,5, por ser el menor resultado de la división indica la fila pivote, siendo 8 el elemento pivote.

Dividiendo entre 8 los elementos de la fila pivote

Variable	Z	X_1	X_2	S_3	S_4	S_5	CD
S3	0	2	0	1	-1/4	0	15
S4	0	1	1	0	1/8	0	5/2
S5	0	-2	0	0	1/4	1	5
Z	1	10	0	20	5/2	20	50

Para el rellenado de la tabla anterior se hace las operaciones con las filas y la fila pivote, realizar operaciones la fila vieja menos el elemento pivote multiplicado por una constante que corresponde al elemento de la columna pivote de la fila vieja:

Para s_3:

S_3	0	4	2	1	0	0	20
S_4	0 2	1 2	1 2	0 2	1/8 2	0 2	5/2 2
	0	2	0	1	-1/4	0	15

Para s_5

S_5	0	0	2	0	0	1	10
S_4	0 2	1 2	1 2	0 2	1/8 2	0 2	5/2 2
	0	-2	0	0	1/4	1	5

Para Z

Z	1	–10	–20	0	0	0	0
S_4	0 -20	1 -20	1 -20	0 -20	1/8 -20	0 -20	5/2 -20
	1	10	0	0	5/2	20	50

Al trasladar los valores obtenidos para s_3, s_5 y Z en la parte inferior de las tres tablas auxiliares, se tiene que en la fila Z todos los valores son positivos. En consecuencia el valor máximo resulta 50, que corresponde a: $x_2 = 5/2$ y $x_1 = 0$.

Método Gráfico. El método gráfico es fácil de realizar usando el PHPSimplex y se procede como se muestra en la figura 14:

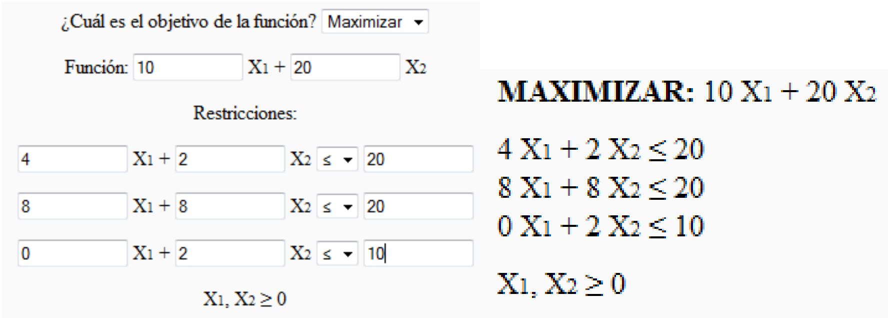


Figura 14. Solución gráfica del ejemplo 1, proceso de maximización con el PHPSimplex.

Siendo el gráfico lo que se muestra en la figura:

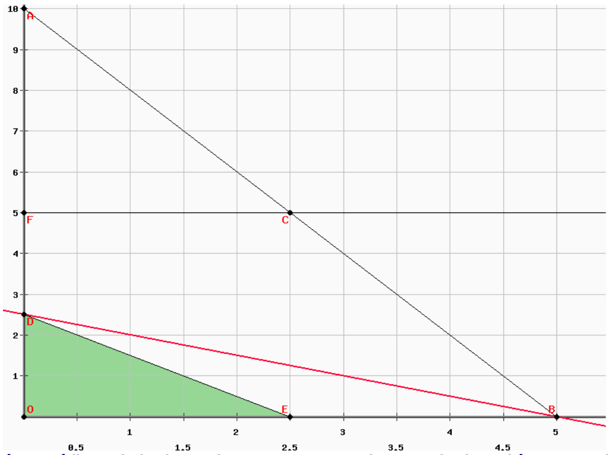


Figura 15. Solución gráfica del ejemplo 1, proceso de maximización con el PHPSimplex.

Cuyos valores obtenidos en el proceso de pivoteo se muestra en la siguiente tabla:

Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	10	200
B	5	0	50
C	2.5	5	125
D	0	2.5	50
E	2.5	0	25
F	0	5	100

Tabla N°5. Resultados de la aplicación del método Simplex con PHPSimplex, ejemplo 1.

siendo:

Los puntos de la fila de color verde pertenecen a la región factible

Los puntos de la fila de color rojo no pertenecen a la región factible.

EJEMPLO 2. Minimizar la función objetivo: $Z = F(x_1 , x_2) = 40x_1 + 50x_2$, sujeto a las restricciones: $x_1+2x_2 \geq 60$; $2x_1 + x_2 \geq 60$; $x_1, x_2 \geq 0$

Método Simplex. Ingresemos la función objetivo y las restricciones al PHPSimplex y elegimos la opción minimizar:

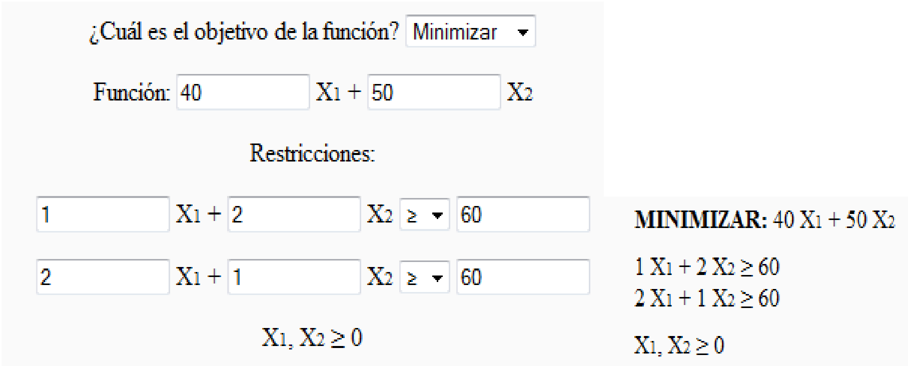


Figura 16. Solución gráfica del ejemplo 2, proceso de minimización con el PHPSimplex.

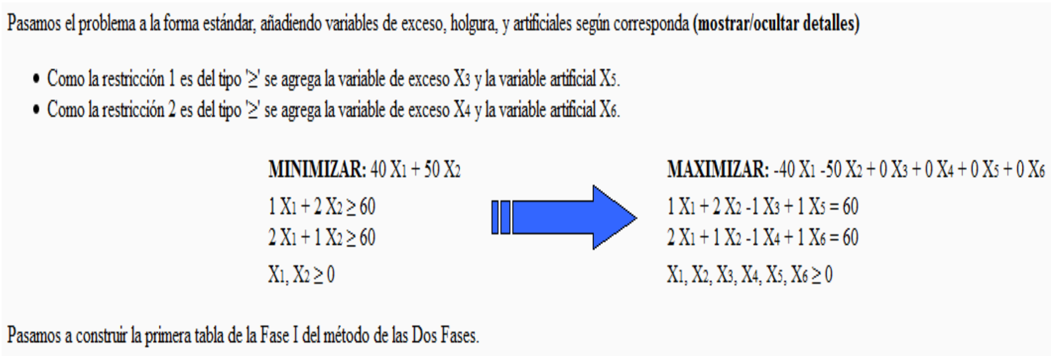


Figura 17. Solución con el método Simplex del ejemplo 2, la minimización con el PHPSimplex.

Elección del elemento pivote para el proceso de minimización:

Tabla 1			0	0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_5	-1	60	1	2	-1	0	1	0
P_6	-1	60	2	1	0	-1	0	1
Z		-120	-3	-3	1	1	0	0

La variable que sale de la base es P_6 y la que entra es P_1.

Tabla 2			0	0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_5	-1	30	0	3 / 2	-1	1 / 2	1	-1 / 2
P_1	0	30	1	1 / 2	0	-1 / 2	0	1 / 2
Z		-30	0	-3 / 2	1	-1 / 2	0	3 / 2

La variable que sale de la base es P_5 y la que entra es P_2.

Tabla 3			0	0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_2	0	20	0	1	-2 / 3	1 / 3	2 / 3	-1 / 3
P_1	0	20	1	0	1 / 3	-2 / 3	-1 / 3	2 / 3
Z		0	0	0	0	0	1	1

Existe alguna solución para el problema, por lo que podemos pasar a la Fase II para calcularla.

Tabla 1			-40	-50	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
P_2	-50	20	0	1	-2 / 3	1 / 3
P_1	-40	20	1	0	1 / 3	-2 / 3
Z		-1800	0	0	20	10

La solución óptima es Z = F(20, 20) = 1800, y se produce para: $x_1 = 20$ y $x_2 = 20$.

Método Gráfico. Ejecutando la opción de Método Gráfico en el PHPSimplex se obtiene la gráfica (Figura 18) que corresponde al problema del ejemplo 2.

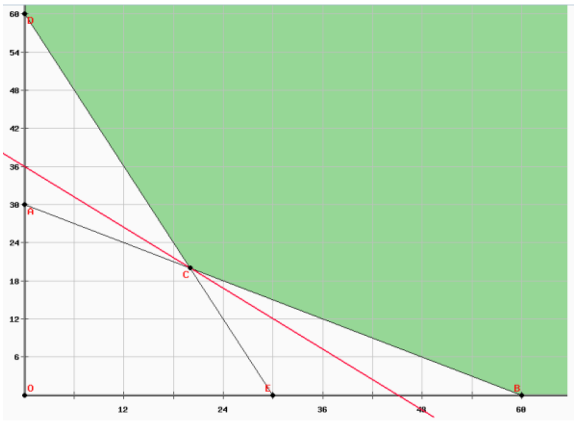


Figura 18. Solución gráfica del ejemplo 2, proceso de minimización con el PHPSimplex.

Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	30	1500
B	60	0	2400
C	20	20	1800
D	0	60	3000
E	30	0	1200

Tabla N°6. Resultados de la aplicación del método Simplex con PHPSimplex, ejemplo 2.

- Los puntos de la fila de **color verde** pertenecen a solución óptima de la región factible
- Los puntos de la fila de **color blanco** pertenecen a la región factible pero no representan a la solución óptima.
- Los puntos de la fila de **color rojo** no pertenecen a la región factible.

2.5. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE TÉRMINOS

A continuación se tiene un glosario de algunos términos que serán de uso frecuente en el desarrollo de la investigación, tales como:

1. **Educación matemática:** Es un área de la matemática que se ocupa del proceso de aprendizaje, como la práctica y enseñanza de las matemáticas, así como a un campo de la investigación académica sobre esta práctica.
2. **Enseñanza:** Se sustenta en la generación y difusión de conocimiento científico y tecnológico es tan dinámica y creciente, que nos obliga a pensar y ofrecer un enfoque innovador que soporte el proceso de enseñanza - aprendizaje con herramientas y elementos que le permitan al estudiante desarrollar la capacidad de aprender a aprender, resolver problemas, desarrollar ideas, proyectos y de insertarse con éxito en el mundo laboral.
3. **Aprendizaje:** El aprendizaje es el resultado de una interacción entre el sujeto que aprende y su entorno (lo que sostiene una visión absoluta de la Matemática y no toma en cuenta las concepciones previas de los estudiantes). Algunas limitaciones de esta concepción son que el estudiante que logra resolver todas las tareas intermedias de un problema no sabrá, necesariamente, resolver la totalidad de la tarea. E, incluso si lo consigue, no habrá comprendido, necesariamente, la materia en estudio. Esta laguna será perceptible, entre otras, en el momento de la transferencia o de la generalización en otros contextos, Poirier (2001).
4. **Capacidad:** Conjunto de recursos y aptitudes que tiene un individuo para desempeñar una determinada tarea. En este sentido, esta noción se vincula con la de educación, siendo esta última un proceso de incorporación de nuevas herramientas para desenvolverse en el mundo. El término capacidad también puede hacer referencia a posibilidades positivas de cualquier elemento.
5. **Competencia:** “Es sinónimo de: idoneidad, suficiencia, capacidad, habilidad, maestría o excelencia”. En algunos países se señala que, la competencia profesional, no es la simple suma inorgánica de saberes, habilidades y valores, sino la maestría con que el profesional articula, compone, dosifica y pondera constantemente estos recursos y es el resultado de su integración.

(Comisión Nacional para la Modernización de la Educación, 1999 (http://www.enlaces.cl/index.php?t=44&i=2&cc=93&tm=2)

6. **Competencia matemática: C**apacidad para utilizar y relacionar números, sus operaciones básicas y el razonamiento matemático y la capacidad para interpretar la información, ampliar conocimientos y resolver problemas tanto de la vida cotidiana como del mundo laboral.
7. **La programación lineal**: es un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas a través de un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de inecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal. Constituye un importante campo de la optimización por varias razones, muchos problemas prácticos de la investigación de operaciones pueden plantearse como problemas de programación lineal.
8. **Software educativo:** Es un conjunto de programas, documentos, procedimientos y rutinas "asociados a programas de computación realizados con la finalidad de ser utilizados como facilitadores del proceso de enseñanza y consecuentemente del aprendizaje, con algunas características particulares tales como: la facilidad de uso, la interactividad y la posibilidad de personalización de la velocidad de los aprendizajes" (Cataldi, 2000).
9. **Software Libre:** se refiere a la libertad de los usuarios para ejecutar, copiar, distribuir, estudiar, cambiar y mejorar el software. De modo más preciso, se refiere a cuatro libertades de los usuarios del software: La libertad de usar el programa, con cualquier propósito, la libertad de estudiar cómo funciona el programa, adaptarlo a tus necesidades, así como la libertad de mejorar el programa y hacer públicas las mejoras a los demás, de modo que toda la comunidad se beneficie. El ser libre de hacer esto significa (entre otras cosas) que no tienes que pedir o pagar permisos.

2.6. BASES EPISTÉMICAS

La matemática surge desde la antigüedad, con la búsqueda de soluciones a las necesidades inmediatas de aquel entonces. El hombre prehistórico que daba nombre a las cosas y a los actos, que conservaba el fuego e imaginaba trampas para cazar animales, que construía viviendas y tumbas; que observaba el movimiento de los astros y destacaba direcciones especiales, que computaba distancias con su cuerpo y sus pasos; en ese hombre y en esas actividades estaban prefigurados los conceptos básicos de la matemática: número, medida, orden. Pero ¿Qué es la matemática?, más aún, ¿Cómo educar desde la matemática? ¿Cómo fundamentar la educación matemática?

Para Aristóteles es la ciencia de la cantidad; para Rene Descartes, es la ciencia del orden y la medida; para Carl Gauss, es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas; para Henri Poincaré, la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias; Bertrand Russell la define como la materia en la que nunca se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es cierto (Mariano Perero (1994).

Por su parte Fredy González (1997) en su libro Paradigmas en la Enseñanza de la Matemática, refiriéndose a la definición de la matemática cita a los siguientes autores:

Toranzos (1963), al preguntarse qué es la matemática, sostiene que la estructura de la matemática está constituida por los elementos siguientes: los conceptos, las proposiciones y relaciones referidas a los conceptos y los procesos de conceptuación (encadenamientos de conceptos) y demostraciones (proceso que permite pasar de una proposición o relación a otra). Asimismo Núñez Tenorio (1975) afirma que la matemática es un sistema de conocimientos científicos integrado por conceptos no definidos, axiomas, definiciones, reglas de deducción u operación y teoremas.

Definir la naturaleza de la matemática no es tarea fácil, pues su origen reside en un proceso histórico, por lo que su desarrollo depende de las interacciones dialécticas entre diversas fuerzas económicas, políticas y sociales en distintas épocas históricas determinadas. Lo que si es cierto es que la misma es una ciencia que evoluciona lentamente hacia la axiomatización y la abstracción. Su naturaleza es bastante compleja, por lo tanto para responder a las otras interrogantes, es preciso asumir una postura filosófica que permita asentar las bases sobre las cuales se formará al individuo. En mi opinión dicha postura es el idealismo, razón por la cual en el presente trabajo se estudiarán sus fundamentos y sus implicaciones con la educación matemática.

Según Verneaux (1989) Epistemología General o Crítica del Conocimiento, plantea **“**es imposible conocer algo que exista en sí, fuera del pensamiento o de la conciencia", puesto que todo conocimiento reside en la representación que se tenga del objeto o lo que es lo mismo en la idea. El principio mencionado anteriormente se explicita en el principio del fenomenismo y el principio de la relatividad. Según el primero lo que conocemos son fenómenos, los cuales no son más que las representaciones que el individuo se hace de los objetos. El segundo afirma que el conocimiento es relativo al sujeto, depende de la percepción de cada individuo, por lo que es subjetivo. Estos principios se aplican especialmente a la percepción, ya que mediante ésta el sujeto se pone en contacto con la realidad.

La matemática es la elaboración de modelos de la realidad que guardan cierta similitud con los hechos reales, los cuales se construye a partir de los sucesos observables seleccionando sólo algunos de los tantos datos extraíbles de la realidad. Asimismo, los datos que se consideran importantes no son los mismos para cada individuo. En tal sentido, Jean Piaget denomina esquemas al conjunto de secuencias bien definidas de acciones en las cuales el individuo encaja los datos sensoriales que el ambiente le va aportando. Y sostiene que en los individuos se dan los procesos de asimilación, adaptación y acomodación. El primero de estos procesos consiste en incorporar nuevos datos o información a los esquemas ya existentes, para lo cual es necesario que se lleve a cabo la acomodación, que no es más que desarrollar nuevos esquemas o modificar los ya existentes para darle sentido a las nuevas percepciones de la realidad. Cuando se logra la asimilación y la acomodación se lleva a cabo la adaptación; lo que quiere decir, que la adaptación es la capacidad que poseen todos los organismos a adecuarse a las exigencias de su entorno.

Según Piaget existe un equilibrio entre estos tres procesos, al cual se llega cuando el sujeto logra la apropiación de la nueva información, bien sea desarrollando nuevos esquemas o modificando los que posee, adaptándose de esta manera al medio que lo rodea; en otras palabras, cuando se completan los procesos de asimilación, acomodación y adaptación se alcanza el equilibrio. Por lo tanto el desequilibrio trae consigo una pérdida de la estabilidad de la estructura mental de la persona y son los procesos de asimilación y adaptación los que permiten el restablecimiento del mismo. El individuo consigue el equilibrio y luego se enfrenta de nuevo al desequilibrio lo que lo lleva a sentir la necesidad de volverlo a alcanzar. Todo esto trae como consecuencia el desarrollo y maduración de las estructuras mentales. Según Fredy González (1997**): "**la equilibración no es el único factor de desarrollo intelectual; además de éste hay al menos otros cuatro: maduración, experiencias físicas, experiencias lógico-matemáticas y experiencias sociales". La maduración se refiere al desarrollo fisiológico del cerebro, las experiencias físicas están relacionadas con la interacción que tienen las personas con los objetos de su ambiente, las experiencias lógico matemáticas constituyen las reflexiones internas de la secuencias de acciones realizadas sobre los objetos con la que se reestructuran los esquemas y las experiencias sociales tienen que ver con las interacciones entre los individuos. Así, las experiencias físicas permiten la construcción del conocimiento a partir de la manipulación de los objetos mientras que con las experiencias lógico matemáticas, el conocimiento se construye a través de la acción relacionada con los objetos y las experiencias sociales contribuyen a la construcción del conocimiento por la interacción de un individuo con otro. Todos estos son factores externos del ambiente que influyen en las personas y a los que tienen que adaptarse.

Piaget buscó la explicación del desarrollo cognoscitivo inspirándose en los modelos físico- matemáticos de aquella época. Al explicar la formación de las estructuras lógicas, se basa en las definiciones físicas usuales del equilibrio estable, en sus caracteres no específicamente físicos, los caracteres generales, que pueden ser aplicados tanto al comportamiento como a los estados materiales y se refiere a dos propiedades de las definiciones mecánicas: la compensación de las transformaciones virtuales y el mínimo de acción.

Rolando García (2000) plantea "Piaget declara que el desarrollo de la causalidad presenta problemas mucho más difíciles que el estudio de las operaciones del sujeto", llega a tal afirmación al darse cuenta de que el estudio de la causalidad trae consigo la necesidad de extender el alcance de la teoría del desarrollo cognoscitivo, ya que hasta el momento ésta se limitaba a dar cuenta del desarrollo de las estructuras lógicas a partir de los niveles de inteligencia sensorio motriz, pasando por los niveles operatorios y culminando en las operaciones formales que constituyen la lógica del adulto. En medio de esta limitación es imposible enmarcar la causalidad. Asimismo es necesario también tomar en cuenta el papel que juegan los contenidos y las relaciones causales en el desarrollo de las estructuras. Ante esta situación Piaget responde realizando una reformulación de su teoría de equilibración. Piaget señala que en las actividades iniciales de un niño toda acción es causal, puesto que su propio organismo está sometido a interacciones físicas; para él la causalidad está implicada en la formación de los esquemas de acción y en sus coordinaciones, de donde se originan las operaciones. El desarrollo cognoscitivo consistirá en un principio en la toma de conciencia de las relaciones causales que proceden de las acciones del propio sujeto, diferenciándolas de las relaciones entre los objetos, distinguiéndose la construcción sucesiva de dos sistemas: las operaciones del sujeto y la causalidad, teniendo en cuenta que esta última conduce a los hechos y a las leyes a partir de propiedades observables.

Vergnaud (1990) la educación matemática hereda las cuestiones de las epistemologías de la matemática y de la psicología, añadiendo otras cuestiones tales como: "*¿Cuál es la relación entre nuevas competencias y concepciones matemáticas y los problemas teóricos o prácticos que las hacen útiles y significativas?" ¿Qué relación existe entre conocimiento y problemas?*

Desde el punto de vista del profesor, las preguntas que nos planteamos son más abiertas, referidas a la enseñanza y el aprendizaje. Entre las correspondientes al aprendizaje:

¿Qué es saber matemáticas? ¿Qué es comprender matemáticas? ¿Cómo se aprenden?

Desde la enseñanza:

¿Qué es enseñar matemáticas? ¿Cómo se enseñan? ¿Qué matemáticas enseñar?

Los elementos del segundo nivel del modelo de ideología de Ernest (1991) están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje. La distinción con los elementos del primer nivel no es absoluta, sino que se diferencian por la especialización que suponen para la educación matemática. Entre estos elementos aparecen concreciones de los elementos del primer nivel a la educación matemática, como una **teoría del conocimiento matemático escolar** y **los objetivos de la educación matemática**. Otros elementos se refieren a teorías para analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, como la

teoría de la enseñanza de la matemática y **la teoría de recursos para la educación matemática**. Partiendo de la base de que "*la enseñanza es sólo un instrumento para el aprendizaje"*, Ernest demanda una **teoría del aprendizaje de la matemática**. También una **teoría de la evaluación del aprendizaje matemático**. La raíz social de su modelo le hace requerir una **teoría de la habilidad matemática** y **una teoría de la diversidad social en educación matemática**.

2.6.1 Formas de concebir el aprendizaje de las matemáticas

La primera pregunta que afrontamos se refiere a la esencia del aprendizaje: *¿Qué es aprender? ¿Cómo se contempla el aprendizaje desde diversas posturas?*

a) ¿Qué es aprender?

Desde las teorías psicológicas del aprendizaje. Pozo (1989) distingue dos grandes corrientes en la interpretación del aprendizaje: las teorías asociacionistas y las teorías estructuralistas. Mientras que las asociacionistas parten de una actitud analítica, que les hace descomponer los procesos psicológicos en unidades elementales, las estructuralistas consideran que las unidades de estudio de la psicología son globalidades que no pueden reducirse atomísticamente.

La postura conductista es la que ha tenido más auge en la corriente asociacionista, según el cual el conocimiento se alcanza mediante la asociación de ideas siguiendo ciertos principios (semejanza contigüidad espacial y temporal y causalidad). Este asociacionismo se complementa con otras características, que no son compartidas por todos los conductistas a través de la *teoría estímulo-respuesta*, con lo que se parte de una consideración atomista y elementalista *derivada directamente del núcleo asociacionista, por el que toda conducta, por compleja que sea, es reducible a una serie de asociaciones entre elementos simples, en este caso, estímulos y respuestas* (Pozo, p. 28). El siguiente paso en la psicología del aprendizaje lo constituye el procesamiento de la información, que parte de la metáfora de la mente como un ordenador. Los rasgos característicos del procesamiento de la información son: a) la descomposición recursiva de los procesos cognitivos; b) el funcionamiento cognitivo humano, al igual que el ordenador, están definido por leyes exclusivamente sintácticas, que se ocupan de determinar las reglas mediante las que esas actividades se agregan para constituir procesos complejos; c) irrelevancia de los contextos culturales y la afectividad.

Las teorías estructuralistas consideran al sujeto como un organismo cambiante, que modifica la realidad al conocerla, con lo que su papel es activo. Esto obliga a estudiar los procesos de cambio del organismo y los fenómenos que los posibilitan. Para Piaget este cambio es un proceso dialéctico de asimilación y acomodación, mediante el cual el sujeto comienza por alterar la realidad para encajar en sus estructuras mentales, y posteriormente altera sus estructuras para adaptarlas a la forma en que percibe los fenómenos. A través de la asociación y restructuración basada en un sistema de signos que median nuestras acciones, a la vez que modifica la persona que interactúa con su entorno. *La ley fundamental de la adquisición del conocimiento para Vygotski afirmaría que éste comienza siendo objeto de intercambio social, es decir, comienza siendo interpersonal para, a continuación, internalizar seo hacerse intrapersonal* (Pozo, 1989, p. 196).

También Farnham-Diggory (1994), considera tres paradigmas excluyentes: el modelo conductista, el modelo de desarrollo y el modelo de aprendizaje. En el modelo conductista, aprender (ser experto) es alcanzar una posición dentro de una escala; en el modelo de desarrollo, aprender es alcanzar un modelo cualitativamente diferente al que se poseía antes de ese aprendizaje (cuando se era novato); para el modelo de aprendizaje aprender es alcanzar un mundo social diferente en cultura y práctica del mundo del novato. El segundo factor de diferencia entre estas conceptualizaciones del aprendizaje se refiere a la forma en que se adquiere el aprendizaje.

Tymoczko (1986) estudia la relación que existe entre la postura filosófica sobre las matemáticas y la filosofía de la mente, que obviamente se relaciona con los procesos para aprender. Empleando la dicotomía **constructivismo** - **realismo**, argumentando que la aceptación de una visión **constructivista** de las matemáticas, reconoce a la matemática como una actividad mental, que encajará en una cierta teoría de la mente en la que se aceptaría que todos nacemos con la posibilidad de hacer matemáticas. Por otra parte, si nos situamos en la postura **realista,** la filosofía de la mente consiguiente, aceptaría que la mente está dotada de una facultad primitiva de intuición matemática o percepción del reino de las matemáticas que diferencia el papel individual de la construcción y del constructivismo radical, de la actuación compartida social del aprendizaje apropiación.

b) ¿Qué es saber matemáticas?

Douady (1986) identifica "saber matemáticas" con ser capaces de usarlas en diferentes situaciones. Distingue dos posibles actitudes del alumno a instancia del profesor: si se dice qué hay que hacer, siendo posible comprender el enunciado del problema pero sin sugerir el método de solución, estamos considerando principalmente la matemática como herramienta; si se trata de conocer cómo las nociones están relacionadas desde un punto de vista científico cultural estamos considerando principalmente las matemáticas como objeto. Más adelante concreta "tener algún conocimiento de matemáticas" es ser capaz de implementar su empleo como una herramienta explícita en problemas a resolver.

En la metáfora de la enseñanza de las matemáticas de la "escuela de samba" (Papert,1981), todos son maestros y aprendices al mismo tiempo, y se produce la expresión de un ambiente de vocación para estimular la creatividad. La metáfora del matemático "creativo" contempla que el alumno debe investigar situaciones, resolver problemas formulados por sí mismo e incluso inventar conceptos y notaciones. La metáfora del "ingeniero" ve al alumno como una persona situada delante de una situación compleja que procura poner en juego diferentes métodos de resolución a su alcance, modificándolos eventualmente o combinándolos para llegar a la solución (Flores, 1997).

c) Forma en que se adquiere el aprendizaje. ¿Cómo aprender?

Siguiendo a Brousseau (1989), Robert y Robinet (1989) sitúan las actividades para aprender entre los tres polos siguientes: se aprende por la escucha e imitación / únicamente por actividades / por una dialéctica actividades bien elegidas - intervenciones magistrales.

Peterson y cols. (1989) formulan una oposición entre los términos: los alumnos construyen activamente su propio conocimiento / reciben pasivamente el conocimiento matemático del profesor u otro.

Los tres paradigmas educativos indicados por Farnham-Diggory (1994), también marcan formas de llegar al aprendizaje: el modelo conductista plantea el aprendizaje a través del aumento de destrezas; el modelo de desarrollo considera que se llega a aprender proporcionando a los estudiantes teorías personales, para lo cual se debe perturbar al estudiante cuestionando, contradiciendo y cambiando estas teorías; por último el modelo de aprendizaje considera el aprender como un proceso de enculturación.

El resultado del aprendizaje es el conocimiento, Farnham-Diggory(1994) diferencia cinco formas de conocimiento: el declarativo (que acepta el lenguaje como vehículo de comunicación y validación); conocimiento procedimental (en forma de secuencias de acción); conocimiento conceptual (de categorías -listas de atributos-, y esquemas -añaden atributos espacio temporales-); conocimiento analógico (conserva la correspondencia entre el mundo exterior y el interior); y conocimiento lógico (sistemas de implicaciones causales).

Para caracterizar el conocimiento/aprendizaje, Ponte (1992) establece cuatro niveles de competencia. Las competencias elementales son procesos de simple memorización y ejecución. Las competencias intermedias, o procesos con cierto grado de complejidad pero que no exigen mucha creatividad. Las competencias complejas suponen capacidad significativa de tratar con situaciones nuevas. Y, por último, los saberes de orden general, que tienen componentes metacognitivas, en los que el aprendiz tiene conciencia de su saber (meta saber). Estos saberes tienen influencia en las propias concepciones del aprendiz. Cada uno de estos tres primeros niveles supone un dominio del anterior, mientras que el cuarto nivel, tiene un papel regulador. La manifestación del aprendizaje en cualquiera de estos niveles, se realiza en dos tipos de actividades, según Ponte: actividades de acción, en las que se manipulan objetos y representaciones; y actividades de reflexión, en las que se piensa sobre la acción. Estas actividades de reflexión son estimuladas por la explicación y la discusión.

2.6.2 Formas de concebir la enseñanza de las matemáticas

a) ¿Qué es enseñar?

Respecto a la concepción epistemológica de las matemáticas, por ejemplo en lo que concierne a la relación entre el enseñante y el saber, Robert y Robinet (1989) indican dos extremos en la concepción de esta relación: el profesor es el único y verdadero poseedor del saber en clase / muchas cosas pueden ser descubiertas por los alumnos solos, incluso por procedimientos que el profesor no ha previsto.

Joyce y Weil (1985) diferencian familias de modelos de enseñanza, en los que implícita o explícitamente hay una forma de concebir la enseñanza y están relacionados con los modelos de aprendizaje. Para el modelo de procesamiento de la información, enseñar significa mejorar la capacidad de procesar la información de los alumnos, entendido como incrementar el manejo de estímulos del medio, afianzar datos, generar conceptos y soluciones, utilizar símbolos verbales y no verbales. Los modelos personales orientados hacia el desarrollo del yo individual, consideran enseñar como una ayuda al individuo a desarrollarse, con lo que se mejorarán las relaciones personales y la capacidad de procesar información. Para los modelos de interacción social la enseñanza se interesa en las relaciones entre el individuo y otras personas, dando prioridad al proceso democrático y al trabajo social productivo. Por último, en los modelos conductistas enseñar es cambiar el comportamiento visible del sujeto más que la estructura psicológica y la conducta no observable, lo que les hace basarse en principios de control de estímulos y refuerzos, fraccionando el comportamiento en pequeños segmentos de conducta.

b) Cómo enseñar

Farnham-Diggory (1994) indican cuatro *tácticas de enseñanza*, que responden a la sintaxis de la enseñanza: hablar o leer; exponer; entender; organizar el entorno del aprendizaje; que aparecen en todos los tipos de enseñanza.

Robert y Robinet (1989) analizan *el papel del profesor* en la clase de matemáticas, estableciendo el continuo comprendido entre la clase magistral (explicar, repetir, repetir variando las explicaciones, realizar ejercicio de aplicación después de la clase) y la actuación del profesor como organizador de las actividades del alumno en clase, pasando una parte del tiempo supervisando el aprendizaje que se realiza por la acción.

Ernest (1985) estable un continuo entre formas autoritarias y formas democráticas de enseñanza. Los puntos de conflicto entre estos polos son los siguientes: a) Caminos mediante los que se presenta la materia (características de las definiciones, aproximación a las pruebas y demostraciones -formas estilizadas "mitificadas" o emplearlas para estimular el razonamiento plausible-, actitud del profesor hacia las técnicas y algoritmos -métodos "oficiales" o estimular los métodos de los alumnos). b) Formas de intervenir en el trabajo de los estudiantes (formas de control, cómo se tratan los errores, el control de las respuestas, etc.) . c) Organización de la clase (colocación y distribución de los alumnos -separados, en grupo-, acceso al material, vía de selección de tareas para los alumnos, tipo de preguntas que hace el profesor, etc.). d) Relaciones que se permiten o se estimulan y relaciones que se evitan (competición individual o en colaboración, trabajando en grupos). e) El currículo, (como se dirige el profesor a los alumnos -clase expositiva y magistral o mediante proyectos y grupos de trabajo individualizado-).

En otro momento, Ernest (1989) relacionó la forma de enseñanza con la forma en que el profesor concibe la matemática, clasificando en tres posturas: utilitarista, platónica y constructiva. Los criterios para clasificar los modelos de aprendizaje son dos. El primero está relacionado con la concepción del aprendizaje, que puede extenderse de considerar el aprender como construcción activa del conocimiento como un cuerpo significativamente conectado (constructivismo), a considerarlo como recepción pasiva de conocimiento (platonismo). El segundo se refiere a la autonomía del alumno, y se extiende entre enfatizar el desarrollo de la autonomía y los propios intereses del niño en Matemáticas (constructivismo), o considerar al aprendiz como sumiso y complaciente (platonismo). Los criterios para diferenciar la enseñanza son tres. El tercero está ligado a la forma en que se concibe el uso del material curricular: la matemática basada en seguir estrictamente un texto o un esquema, frente a la postura en que el profesor o la escuela construyen virtualmente todos los materiales curriculares de matemáticas, pasando por a un punto de vista en que el profesor enriquece el texto con problemas y actividades adicionales.

En el *constructivismo social,* que Lerman sitúa en Gergen, la metáfora que define al profesor es la de *mediador.* En el *constructivismo radical*, contextualizado el papel del profesor se encierra en la metáfora de *facilitador*. Las aportaciones de Vergnaud (1990), nos permiten desarrollar estas metáforas. Para él, el **constructivismo radical** minimiza el papel de los profesores al negar que la mente llegue a reflejar aspectos objetivos de la realidad, con lo que enfatiza la construcción personal del aprendiz. El

constructivismo social (Ernest, 1992) enfatiza el conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad, con lo que considera que la enseñanza de las matemáticas se realiza creando conflictos cognitivos.

c) Otras cuestiones relacionadas con la enseñanza

Tratadas las cuestiones ontológica y gnoseológica esenciales (el qué es enseñar y el cómo se enseña), aparecen otras cuestiones relacionadas con ellas, que las particularizan o complementan. Robert y Robinet diferencian la forma particular de **enseñanza** que tiene por objeto **ayudar a los alumnos con dificultades** en matemáticas. Los autores indican dos posturas extremas para esta actuación propedéutica: simplificar, descomponer y no mezclar tareas y aplicaciones, llegando a darles recetas en caso de dificultad extrema / llevar a los alumnos al corazón de los obstáculos por problemas apropiados y no privándolos de una visión global que haga que los contenidos pierdan sentido. También se interesan en las **prioridades sociales que afronta el enseñante**, una de las cuales se debate entre detectar y formar prioritariamente los buenos alumnos de matemáticas o, por el contrario, favorecer el aprendizaje de toda la clase (NCTM, 1991; Informe Cockcroft, 1985)

Según Robert y Robinet (1989) la enseñanza de la matemática se componen de teoremas, procedimientos, recetas de cálculo / matemáticas para resolver problemas y plantear cuestiones. Concretan la oposición diciendo que la idea de que es necesario enseñar técnicas ante todo, en cualquier condición, se opone a aquella según la cual no se puede pretender que los alumnos utilicen una técnica antes de que sea percibido el sentido del concepto que subyace a esta técnica. Peterson y Cols. (1987) lo formulan más precisamente: las destrezas matemáticas deberían ser enseñadas como componentes discretas aisladas de la comprensión y de la resolución de problemas / en relación a la comprensión y resolución de problemas.

Articulación entre epistemología e instrucción matemática

Las cuestiones sobre la naturaleza y origen del conocimiento matemático, y sobre los procesos de comunicación de los mismos en el seno de distintas instituciones, son objeto de estudio de diversas disciplinas: filosofía de las matemáticas, sociología del conocimiento, psicología, etc. La complejidad de estas cuestiones hace que las respuestas que se dan se refieran a aspectos parciales, siendo no obstante necesario, para la educación matemática, realizar esfuerzos de articulación entre los distintos componentes del problema.

Brousseau (Brousseau, 1986; 1989), desde la didáctica de las matemáticas ha intentado proponer una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consecuente con unos planteamientos epistemológicos explícitos. Su *teoría de las situaciones didácticas* se basa en un análisis previo de la actividad matemática, de la reflexión sobre papel que juega en ella la organización axiomática y deductiva, así como de los inconvenientes de usar tal organización como modelo para la enseñanza.

Según Brousseau (1986), la presentación axiomática supone virtudes para la propia ciencia matemática e incluso parece maravillosamente adaptada para la enseñanza. Permite en cada instante definir los objetos que se estudian con ayuda de nociones introducidas anteriormente y, organizar la adquisición de nuevos saberes apoyándose en las adquisiciones anteriores. Cuando se trata de aplicar en la enseñanza, la presentación axiomática parece proporcionar al estudiante y al profesor un medio de ordenar su actividad y de acumular en un mínimo de tiempo un máximo de "saberes", bastante próximos al "saber sabio".

Para hacer posible tal actividad, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las cuales los conocimientos van a aparecer como la solución óptima a los problemas planteados, solución que el alumno puede reinventar. El trabajo del profesor de matemáticas es equiparable, en ciertos aspectos, al del investigador matemático, aunque la relación que debe mantener entre la teoría matemática y las aplicaciones se produce en sentido inverso a la de aquél. El investigador parte de problemas de la vida real o de la propia matemática; por medio de un proceso de descontextualización y despersonalización de las soluciones informales que encuentra a los mismos, elabora nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, extendiendo y generalizando al máximo estas soluciones a los problemas particulares.

CAPITULO III
MARCO METODOLÓGICO

En esta sección del estudio se considera los argumentos referidos a la metodología a utilizar en el proceso investigativo. Abarca los siguientes aspectos: Definición del tipo de investigación, método de investigación, nivel de la investigación, población de estudio, técnicas de recolección de datos y las técnicas e instrumento para el análisis e interpretación de los resultados.

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta algunos aspectos de la clasificación hecha por Sierra Bravo (1995 y 2002). El tipo de investigación desde el ***grado de abstracción*** es una ***investigación descriptiva*** ya que su principal objetivo se basa en describir y analizar el desempeño académico de los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la programación lineal.

En el ***grado de generalización*** es una ***investigación acción***, porque se centra en generar cambios en el proceso de aprendizaje y no coloca tanto énfasis en lo teórico. Trata de unir la investigación con la práctica a través de la resolución de problemas haciendo el uso pertinente del software matemático.

En lo correspondiente a su ***naturalez****a* es ***cuantitativa y cualitativa***, a través de la primera se intenta identificar leyes generales referidas al grupo de estudiantes participantes utilizando instrumentos para recoger datos cuantitativos los cuales ayudarán a realizar la medición sistemática y el empleo del análisis estadístico como característica resultante. En lo referente a la segunda es una investigación subjetiva e individual del desempeño académico a través del uso del software donde interactuarán los estudiantes, esto lo hace una investigación interpretativa, referida a un particular.

Según la ***naturaleza de los objetivos*** es una ***investigación teórica****,* porque el objeto está centrado en controlar el fenómeno a estudiar, empleando el razonamiento inductivo-deductivo, sustentado en la descripción objetiva del proceso de enseñanza aprendizaje.

Con ***relación al tiempo*** es una investigación ***sincrónica***, puesto que se hace un estudio analítico de la evolución del proceso didáctico en un tiempo breve.

Con ***relación al lugar*** es una investigación ***de campo*** porque se centró en hacer el estudio donde el fenómeno se da de manera natural.

La presente investigación se encuadra dentro del paradigma cualitativo en su variante investigación-acción participativa. Este tipo de investigación interviene un conjunto de tradiciones y métodos que anteponen la acción a la misma investigación, conlleva en todo momento reflexionar sobre nuestra práctica pedagógica permitiendo la administración y la solución de problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje, desde una perspectiva metodológica participativa. Por medio de la investigación-acción, se logró formular una propuesta pedagógica alternativa, basado en un plan de acción, la misma que permitió superar los problemas detectados en el ámbito pedagógico y académico.

Para Kemmis (1988), la investigación-acción ha de desarrollarse en forma participativa, transformando las prácticas educativas, sociales y personales, por medio de un proceso sistemático de aprendizaje apoyado en el análisis crítico de las situaciones; a través de las fases:

planificación $\Rightarrow$ acción $\Rightarrow$ observación $\Rightarrow$ evaluación-reflexión.

Entonces, la investigación acción se realizó en forma colaborativa, participativa y de investigación en el aula, siendo el profesor investigador sujeto y objeto de la investigación.

3.2. DISEÑO Y ESQUEMA DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo que persigue este diseño metodológico es la transformación social a través de un proceso dialéctico de reflexión-acción, donde la comunidad o grupo adquiere un carácter protagónico en la delimitación, atención y análisis del problema investigado, siendo el equipo de investigación un agente dinamizador y orientador del proceso (Contreras, 2002). En este caso las fases de indagación, producción de conocimiento y gestión del problema de investigación son simultáneas y, pertenecen a los actores en cuestión (incluido el equipo de investigación). Dado lo anterior, este diseño está orientado a la comprensión e interpretación del problema de investigación, desde la perspectiva de los actores que participan de él (Dávila, 1995).

El diseño de investigación-acción se sustenta en la resolución de problemas cotidianos e inmediatos, y en la mejora de prácticas educativas concretas. Su propósito fundamental se centra en aportar información que guíe la toma de decisiones para programas, procesos y reformas estructurales. Los pilares sobre los cuales se fundamentan los diseños de investigación-acción son:

- Los participantes que desarrollan un problema son los que están mejor capacitados para abordarlo en un entorno naturalista.
- La conducta de los sujetos de investigación es influida de manera importante por el entorno natural en que se encuentran.
- La metodología cualitativa es la mejor para el estudio de los entornos naturalistas.

Según Stringer (1999) las tres fases esenciales del diseño de investigación-acción son: Observar (construir un bosquejo del problema y recolectar datos), pensar (analizar e interpretar) y actuar (resolver problemas e implementar mejoras), las cuales se dan de una manera cíclica, una y otra vez, hasta que el problema es resuelto, el cambio se logra o la mejora se introduce satisfactoriamente (Citado por Hernández, Fernández & Baptista, 2006). Creswell (2005) divide a los diseños fundamentales de la investigación-acción en dos clases: Práctico y Participativo.

Siguiendo el modelo propuesto por (Kimmins, 1992) y (Stringer, 1999) entre las fases del diseño de investigación destacan: problema (exploración: antecedentes, teorías), observar (planificar y construir un bosquejo), pensar (implementar, analizar e interpretar), actuar (resolver problemas e interpretar mejoras) que se puede interpretar y representar a través del esquema de la figura 19.

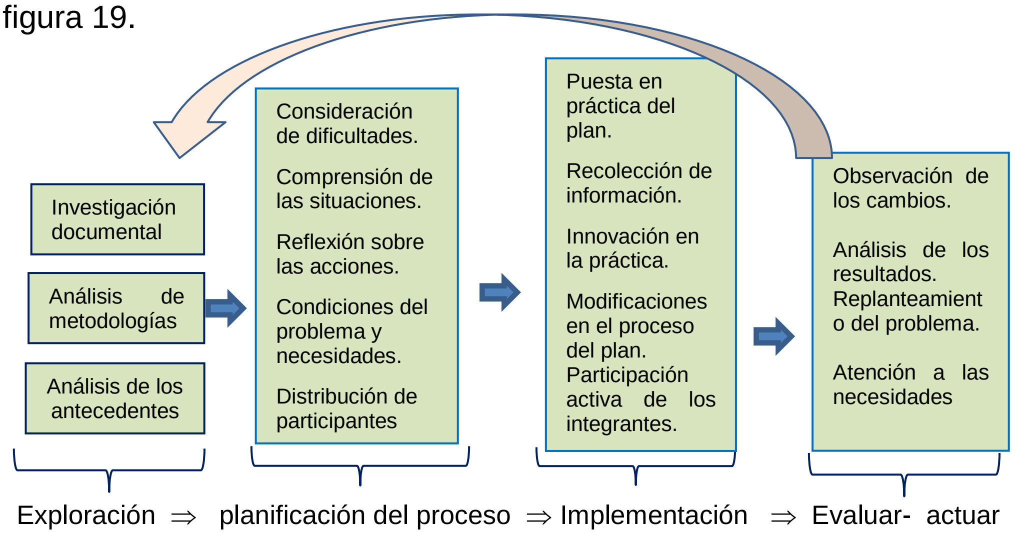


Figura 19. Esquema del diseño de la secuencia de actividades de investigación-acción según kimmins.

Análisis de los datos

Según Amescua & Gálvez (2002), la fase de análisis de los datos representa probablemente el lado oscuro de la investigación cualitativa. Pues, cualquiera que sea el estilo analítico adoptado, hay un momento en el que el investigador se encierra a solas con los datos y es entonces cuando comienzan verdaderamente las dificultades, pues tiene que responder a preguntas: ¿Cómo realizar técnicamente las seductoras propuestas de la teoría?, ¿Qué hacer con una información tan heterogénea?, ¿Cómo debe ser el manejo para hacer emerger ese torrente de conceptos y proposiciones que sugiere el análisis cualitativo?

Huberman & Miles (2000) proponen tres subprocesos vinculados entre sí para realizar el análisis:

a) La *reducción de datos*, orientada a su selección y condensación, se realiza anticipadamente (al elaborar el marco conceptual, definir las preguntas, seleccionar los participantes y los instrumentos de recogida de datos), o una vez recolectados mediante la elaboración de resúmenes, codificaciones, relación de temas, clasificaciones, etc.
b) La *presentación de datos*, orientada a facilitar la mirada reflexiva del investigador a través de presentaciones concentradas, como pueden ser resúmenes estructurados, sinopsis, croquis, diagramas, entre otros.
c) La *elaboración y verificación de conclusiones*, en la que se utilizan una serie de tácticas para extraer significados de los datos, como pueden ser la comparación/contraste, el señalamiento de patrones y temas, la triangulación, la búsqueda de casos negativos, etc.

3.3. ACTORES QUE PARTICIPAN EN LA PROPUESTA

En las metodologías cualitativas el muestreo es entendido como la operación a través de la cual se construye un caso de estudio caracterizado por la totalidad y la complejidad, para poder analizarlo y extraer resultados y conclusiones relativas al caso en estudio. No se persigue la representatividad de la muestra, sino que la generatividad del caso, es decir la posibilidad de dar cuenta de modos de comprender y construir versiones sobre la realidad más plurales, reflexivas y críticas. Desde esta perspectiva el trabajo tiene dos orientaciones comunes a las distintas estrategias de muestreo desarrolladas en la investigación cualitativa:

a) Al señalar y precisar el campo de estudio (en la pregunta de investigación y el objetivo general) se hace referencia al contexto en el cual se desarrolla o se pretende comprender el problema de investigación, definiéndolo en su escala (individual, interpersonal, colectivo, institucional, etc.). Este contexto, por lo tanto, orienta (muestreo intencional) a la hora de planificar dónde, con quiénes y con qué instrumentos realizaremos la recolección de información.

b) Además, dada la naturaleza preliminar de los diseños en las metodologías cualitativas y el carácter emergente de los resultados de la indagación, conviene la utilización de un muestro estratégico para la construcción del caso. Donde no todos los sujetos o situaciones tienen la misma probabilidad de ser seleccionados para constituir la muestra ya que, su incorporación a la investigación dependerá de su valor y potencia exploratoria en el contexto de la pregunta de investigación.

La población considerado en el proceso investigativo son los estudiantes del quinto grado de secundaria de la zona rural de la provincia de Huánuco, extendible a instituciones educativas del ámbito urbano; y la muestra estuvo constituido por los estudiantes del quinto grado de secundaria de la institución educativa secundaria “Huancanyacu” del distrito de San Francisco Cayrán, que cuenta con 15 estudiantes, 9 varones y 6 mujeres que tienen jornada lectiva en el turno mañana, cuyas características biopsicosociales y académicas, son:

Estudiantes: Adolescentes cuyas edades oscilan entre los 15 y 18 años, sus actividades académicas combinan con la labor de agricultura orientados a la alimentación y para la comercialización a pequeña escala.

D**esarrollo psicológico**: el nivel de desarrollo es heterogéneo, ya que algunos son estudiantes regularmente motivados para el estudio, otros son estudiantes tímidos y receptivos, que se muestran callados durante la clase, con escasa integración socialización entre compañeros especialmente entre estudiantes y alumnas, en la que se muestran agresivos ante el sexo opuesto y reaccionan pasivamente ante cualquier sugerencia. No siempre respetan las normas de disciplina y convivencia escolar, en la mayoría de las ocasiones; por los que hay que estar recordándoles sus obligaciones y motivarlos con recompensas de índole académico educativo.

Dominio del lenguaje: se comunican con mediana fluidez en el lenguaje español, con algunas dificultades en la pronunciación de ciertas palabras; también en algunas conversaciones entre amigos se comunican en su lengua materna, el quechua.

Desenvolvimiento en el área de matemática: son estudiantes pasivos, que esperan las indicaciones del docente, con poca predisposición para el estudio en el área de matemática. Aun estando en el quinto grado tienen problemas en la resolución de las operaciones aritméticas y algebraicas, así como las representaciones gráficas, hecho que muchas veces los lleva a distraerse o perder interés por la actividad que se está realizando.

Nivel de Socialización: En los trabajos de equipo que se programan, por lo general lo realiza uno o dos compañeros de cada grupo y los demás integrantes solo son observadores. Hay escasa participación de ellos en la resolución problemas matemáticos y algunas burlas recurrentes ante el compañero que participa.

Padres de familia: En su mayoría no apoyan sus hijos en el desarrollo de tareas escolares, mucho menos en el reforzamiento de sus aprendizajes, por lo que no suelen repasar ni cumplir con eficiencia las tareas asignadas.

Docente: La docente investigadora es de la especialidad de matemática y física, condición nombrada, ejerciendo la docencia en el área desde el año 1995, con seis años de permanencia en la institución, habiendo desempeñado la docencia, anteriormente en diferentes instituciones educativas del nivel secundario de la ciudad de Lima.

Bajo las características descritas, se procedió a desarrollar las habilidades de resolución de problemas de programación lineal, haciendo uso de software libre GeoGebra y la página online PHPSimplex para que puedan mejorar conceptual, procedimental y actitudinalmente en el proceso de su aprendizaje. Asimismo, se promovió actividades de integración grupal, trabajo colaborativo y cooperativo, en grupos y respeto por las opiniones y participaciones de sus compañeros para generar un deseo intrínseco de aprender en ellos. Acogiendo la propuesta de Tójar Hurtado, Juan Carlos (2006: 188-189) los tipos de muestreo que se tomó en cuenta para realización el trabajo de investigación, se encuadra en rasgos del muestreo no probabilístico en tres de sus variantes, como se resume en la tabla N° 7.

TIPO DE MUESTREO	DESCRIPCIÓN
De caso típico	Se fija algunos rasgos más comunes de una determinada realidad social. Se fundamenta en los datos obtenidos de la propia investigación (observación, opinión de informantes claves, etc.)
En cadena o bola de nieve	Consiste en una cadena que se inicia con un informante o entrevistado cualquiera de la cultura, o subcultura que se pretende estudiar, éste conduce a un segundo que aporta una información de mayor calado, éste último a un tercero. La información va creciendo en cantidad y calidad, en riqueza y profundidad, como una bola de nieve que rueda montaña abajo.
Intencional o de conveniencia	Se escogen las unidades a entrevistar siguiendo criterios de conveniencia del investigador o de los objetivos de la investigación (riqueza de información en el caso, posición que ocupa en relación al fenómeno estudiado, etc.)
De casos críticos	Se construye sobre una situación hipotética que se plantea, o se cuestiona para que los sujetos actúen o digan lo que harían. La selección de casos que pueden servir de referencia lógica para el resto de la población con relación al tema de estudio, es útil para abordar problemas emergentes o prospectivos.

Tabla N° 7. Resumen de los tipos de muestreo no probabilístico para investigación cualitativa

3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

En esta investigación con el propósito de describir, analizar y explicar el funcionamiento y los propósitos del estudio se toma en cuenta la actuación del profesor y al análisis de las tareas realizadas, optándose un estudio descriptivo (estudio de casos) que incorpora técnicas analíticas y cualitativas de investigación

Entre las técnicas e instrumentos que se utilizaron para el acopio de información se consideran durante el proceso investigativo fueron:

a) **El diario de campo:** es un instrumento de la Investigación educativa y pedagógica, de la Investigación Etnográfica en el Aula, el uso de del diario de campo permitió recoger información para reflexionar sobre los sujetos y las interacciones, los saberes y los conocimientos que se producen en la escuela, la solución de problemas en relación con los saberes o con la vida cotidiana, el abordaje de las distintas situaciones problema de la sociedad.

b) **La entrevista:** Es una técnica consistente en que el investigador recaba información sobre las opiniones, percepciones, ideas. Sentimientos, así como problemas, hechos y situaciones. El diálogo con los actores del proceso didáctico fue fundamental para dar sustento al trabajo experimental, puesto que se dieron preguntas espontáneas de respuestas abiertas durante la ejecución del proceso didáctico.

c) **La observación:** Es una técnica que consiste en observar atentamente el fenómeno, hecho o caso, tomar información y registrarla para su posterior análisis. La observación es un elemento fundamental de todo proceso investigativo; en ella se apoya el investigador para obtener el mayor número de datos. La modalidad de observación será la participante, donde el investigador interactúa con las personas que observa como un integrante más del grupo; es decir, para obtener los datos, el investigador se incluye en el grupo, hecho o fenómeno observado, para conseguir la información "*desde adentro*".

d) **La Encuesta:** esta técnica será usado a través de los distintos tipos de cuestionarios que se aplicarán en el proceso investigativo. Para verificar con objetividad las bondades de la experiencia didáctica que se pondrá en práctica.

e) **Rúbrica:** Es un instrumento de investigación, consistente en guías precisas que valoran los aprendizajes y productos realizados, que desglosan los niveles de desempeño de los estudiantes en un aspecto determinado, con criterios específicos sobre rendimiento indican el logro de los objetivos curriculares y las expectativas de los docentes." Es lo que manifiesta Florina Gatica Lara, Coordinadora del Programa de Evaluación del desempeño docente de México (2007).

3.5. DEFINICIÓN OPERATIVA DE INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

Las técnicas e instrumentos de recolección de información definida en líneas arriba, se aplicaron en el proceso de investigación, teniendo en cuenta las tres etapas (deconstrucción, reconstrucción y evaluación) planteados por Rescrepo (2012), las mismas que se detallan en la tabla 9, a continuación:

Etapa	Técnica	Instrumento	Descripción
Deconstrucción	Observación participante	Diario de campo	A través de este instrumento se registró información referido al tema de investigación, la misma que sirvió para el diseño de 06 sesiones de aprendizaje, con el objetivo de reflexionar sobre la práctica pedagógica a partir de las fortalezas y debilidades.
	Entrevista	Ficha de entrevista	Se utilizó para acopio de información sobre la situación diagnóstica socio-cultural, estudiantes de la Institución educativa Huancanyacu; previo al proceso de experimentación de la propuesta.
Reconstrucción	Encuesta	Hoja de cuestionario de actividades	Compuesto por problemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas; así como problemas de programación lineal, que fueron resueltos haciendo uso de los programas Geogebra y PHPSimplex.
	Observación participante	Rúbrica, para las actividades: 1, 2 y 3.	Compuesta de 10 ítems con escala de valoración del 1, 2 y 3, para recoger información el avance en la resolución de problemas de ecuaciones e inecuaciones desde su expresión literal hasta la gráfica, asistido con el Geogebra.
	Observación participante	Rúbrica, para las actividades: 4, 5 y 6.	Compuesta de 10 ítems con escala de valoración del 1, 2 y 3, para recoger información el avance en la resolución de problemas de Programación Lineal desde su expresión literal hasta la gráfica, mediado por PHPSimplex.
Evaluación	Encuesta	Cuestionario	Tiene 20 ítems, con una escala de valoración de siempre, a veces, nunca, se aplicará con la finalidad de analizar el grado de aceptación de la propuesta.
	Encuesta	Cuestionario de satisfacción.	Cuestionario de satisfacción dividido en cinco rubros para que los beneficiarios del experimento para que puedan mostrar su conformidad o disconformidad.

Tabla N° 8. Resumen de las técnicas en instrumentos utilizados en la investigación

3.6. RESUMEN GENERAL DE SECUENCIA EN EL PROCESO INVESTIGATIVO

El proceso de investigación tuvo la siguiente secuencia

1. *Revisión de literatura*, es decir los antecedentes de la investigación que justifiquen la existencia del problema, debido a que estos referentes justifican en gran parte la existencia de problemas similares a los de la actividad realizada en la presente investigación, donde los investigadores que abordan su estudio proponen alternativas de solución a la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, sirvieron de referencia a la presente investigación.
2. *Formulación del problema de investigación*, para centrar el interés del trabajo realizado, indicando las acciones investigativas propuesto sobre el contenido matemático elegido dentro de una realidad de una institución educativa de zona rural.
3. *Formulación de los objetivos de la investigación*, se anunciaron los propósitos de la investigación y se indican claramente lo que se pretende al finalizar el proyecto, las mismas que fueron operativizadas a través del objetivo general y objetivos específicos.
4. *Elección de marco teórico y el método de investigación*, sirvió de sustento al proceso investigativo. Fundamenta la investigación basada en el planteamiento del problema. Integra teorías y antecedentes referidos al problema de investigación y permite visualizar cómo ha sido tratado el problema específico de investigación, mientras que el método de investigación nos da las pautas de procedimientos metodológicos con las cuales se realiza el trabajo de investigación.
5. Estudio de la programación lineal, aquí se dan los lineamientos específicos acordes al tema de investigación lo que se desarrolla como un saber sabio y se encuentran en libros de matemática finita de colección Schaum.
6. *Elección y descripción del Software Geogebra*, herramienta tecnológica que sirvió de mediador dinámico para la resolución de problemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas en forma algebraica y gráfica.

7. *Elección y descripción de la página PHPSimplex*, herramienta tecnológica que sirvió de mediador dinámico para la resolución de problemas de programación lineal (maximización y minimización) haciendo uso del método Simplex y el método gráfico.
8. *Diseño de actividades*, aquí se dieron indicaciones para la organización interna, estas orientaron la forma en que se presentan la secuencia de actividades de experimentación, las mismas que facilitan la comprensión del tema de programación lineal la resolución de problemas, así como el manejo de algunos comandos básicos del Software Geogebra y del PHPSimplex.
9. *Elaboración de las actividades*, las actividades realizadas fueron diseñados y elaborados de acuerdo a los objetivos propuestos, a fin de facilitar la comprensión del conocimiento del objeto matemático en estudio, así como la elaboración simultánea de actividades en el manejo de comandos del Geogebra y PHPSimplex aplicados a la programación lineal.
10. *Descripción de los sujetos*, se considera como uno de los aspectos fundamentales para la ejecución del trabajo describir el tipo de estudiantes con los que se trabajó y las características de la realidad física de lugar donde se desarrolla la investigación, para poder ser replicados en situaciones similares.
11. *Selección y elaboración de instrumentos de recolección de datos*, como son las fichas de observación de actividades, la rúbrica, fichas de actividades propuestas. Con estos instrumentos se recabaron datos para la triangulación en el análisis de datos.
12. *Aplicación del experimento* a través de la aplicación de actividades de aprendizaje propuestos para el estudio de la Programación Lineal con el uso del PHPSimplex, como recurso para el desarrollo con el método Simplex y Gráfico de problemas de optimización.
13. *Análisis del experimento*, se analizaron los resultados obtenidos teniendo presente los aprendizajes esperados y aprendizajes finalmente logrado por los estudiantes.

3.7. ANÁLISIS *A PRIORI* DE LAS SESIONES DE APRENDIZAJE

En el análisis *a priori* de cada sesión se mostrará, en primer lugar, una descripción general, señalando sus objetivos, las principales variables locales y elecciones micro-didácticas, así como el *medio* y material empleado. Posteriormente, se divide la sesión en episodios y se analizan uno a uno; estos episodios constituyen unidades de información que nos permiten hacer un análisis más fino del desarrollo de las sesiones. Las sesiones de clases se desarrollan en base a actividades previamente diseñadas por el docente, las mismas que son desarrollados por los estudiantes con acompañamiento del docente, usando como recurso didáctico el software Geogebra y el programa PHPSimplex.

3.8. SESIONES DE APRENDIZAJE, DESCRIPCIÓN GENERAL

Las seis sesiones de aprendizaje elaborados para el trabajo experimental constan de las siguientes secciones:

Objetivos:

- Reflexión sobre qué condiciones son necesarias para definir una ecuación y una inecuación de primer grado con dos incógnitas, identificación de la función objetivo, la región óptima.
- Presentar a los estudiantes elementos de reflexión que permitan obtener la definición de la ecuación e inecuación generalizada de primer grado y considerar el significado en relación con expresiones algebraicas y expresiones gráficas en el plano cartesiano.
- Comenzar a observar algunos parecidos y diferencias entre ecuaciones e inecuaciones. Primera reflexión sobre las condiciones para definirla, ejemplos sobre sistemas consistentes e inconsistentes, gráfica de inecuaciones. Utilización del método de Gauss-Jordan y Simplex en la resolución de sistema de ecuaciones y de optimización, respectivamente.
- Comenzar a presentar el registro algebraico y gráfico mediado por el programa PHPSimplex a los estudiantes, que permitirá una resolución eficiente y motivador de problemas de programación lineal.

Dimensión matemática:

Se introduce el problema a estudiar a partir de una situación matemática (*¿cómo generalizar una definición ya conocida?*) que se relaciona con el problema geométrico del gráfico de rectas, puntos y regiones en el plano.

En primer lugar, se identifican las condiciones que se van a vulnerar de la definición de una ecuación e inecuación de primer grado con dos variables, reflexionar sobre cómo extender esta definición. Posteriormente, se operacionaliza esta nueva definición con algunos ejemplos que plantearán la siguiente cuestión: *¿se puede predecir qué sistemas darán lugar a una solución de un sistema de ecuaciones?*

Con las actividades referidas a la nueva definición se pretende favorecer una visión dinámica de los procesos de integración y presentar de manera informal tema, que será definida formalmente en la siguiente sesión.

En todas las sesiones se procedió a la utilización de registros numéricos, algebraicos y registros gráficos como resultado de un trabajo matemático consciente con uso pertinente de recursos tecnológicos en línea.

Dimensión didáctica:

Se comienza la sesión utilizando el debate científico. Se ha elegido una cuestión “sencilla” para los estudiantes para animarlos a participar (y acostumbrarse a esta metodología, que se prevé utilizar durante las siguientes sesiones). La cuestión a debatir, implícitamente, es bajo qué condiciones una ecuación de primer grado con una variable es resoluble, las posibilidades de solución de inecuaciones con dos incógnitas, y analizar la función objetivo con restricciones dadas.

Formas de trabajo:

En las seis sesiones se utilizan, sobre todo, el debate en clase y las aportaciones de los estudiantes. Se definen sistemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se realizan algunos cálculos y se interpretan gráficamente los resultados, que conducirán al estudio de la función objetivo sujeto restricciones fijadas. El profesor también utiliza la pizarra para sintetizar estas aportaciones, expresándolo algebraicamente, para luego resolver el problema haciendo uso del software Geogebra o la página PHPSimplex, según corresponda.

El medio:

El *medio* que se presenta consiste en problemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos variables y de programación lineal. Fueron diseñados de forma que permita a los estudiantes resolver con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, incorpora algunos casos de respuestas erróneas previstas. Con este propósito son incorporadas igualdades que representan rectas verticales y horizontales, que se utilizarán para reflexionar si las condiciones dadas por los estudiantes son necesarias y suficientes.

El *medio* es incompleto en el sentido de que, en un principio, se desconoce la solución al problema propuesto y su utilidad. Sin embargo, los estudiantes disponen de los elementos y conocimientos necesarios para su estudio.

Recurso utilizado por el profesor:

Para la resolución algebraica y gráfica de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales con dos incógnitas se tuvo en cuenta el software libre GeoGebra; mientras que para la resolución numérica, algebraica y gráfica de problemas de programación lineal se utilizó la página online PHPSimplex (a través del método Simplex y gráfico). Sin dejar de usar el proyector multimedia que estuvo activo durante toda la sesión. También como complemento, se utilizó la pizarra para realizar algunas aclaraciones.

Material distribuido a los estudiantes:

En cada sesión de clases se les entregan a los estudiantes las hojas de problemas, actividad que será resuelta durante la actividad en aula, en forma algebraica y gráfica mediado por el Geogebra o el PHPSimplex según el caso.

CAPITULO IV
RESULTADOS

En este capítulo del informe se detalla la descripción del escenario o el trabajo experimental de campo realizado en la presente investigación, indicándose el diseño de actividades, presentación y descripción de los resultados obtenidos a través de los instrumentos de recolección de datos en el contexto de la investigación acción practicada.

4.1 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN.

4.1.1 Características generales de los estudiantes

El proceso investigativo se realiza en estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la institución educativa Huancanyacu, distrito de Cayrán de la provincia de Huánuco, cuyas edades fluctúa entre 16 y 18 años. Todos los estudiantes residen en la localidad de Huancanyacu y comunidades vecinas (zona rural), los estudiantes pertenecen a una sección única, distribuidos como se muestra en la tabla 9:

Género	Frecuencia	Porcentaje
Varones	9	60%
Mujeres	6	40%
Total	15	100%

Tabla N° 9. Distribución de los estudiantes del quinto grado según género.

Todos los estudiantes involucrados al proceso investigativo es la primera vez que utilizan software matemático y herramientas internet orientados al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

4.1.2 Características académicas de los estudiantes

Los estudiantes del quinto grado de secundaria de la institución educativa Huancanyacu, sujetos de la presente investigación, en los grados inferiores de sus estudios abordaron el tema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas sólo en forma algebraica, mientras que el tema de inecuaciones no tuvieron la oportunidad de estudiar, tienen un desconocimiento total de la resolución gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas; las promociones anteriores en el quinto grado sólo se limitaron al estudio de las funciones trigonométricas y un estudio muy superficial de la geometría analítica; sin llegar a abordar el tema de programación lineal a pesar de que está incluido en el DCN del año 2009.

4.1.3 Características del profesor investigador

La docente investigadora que realizó el trabajo labora como docente nombrada de la especialidad de matemática y física, en la institución educativa desde el año 2007, y está empeñada en dar iniciativas para mejorar el proceso educativa, inmerso en las restricciones de tipo cultural muy arraigada en la Institución educativa.

4.1.4 Características del equipo docente de la Institución educativa

La institución educativa sólo cuanta con dos docentes de matemática la investigadora y otro docente de sexo masculino, hasta la realización de esta investigación no se tenía acceso al laboratorio de computación con fines educativos, sólo se utilizaba este ambiente para el desarrollo del curso de educación para el trabajo.

Los docentes de la institución educativa conocen los retos de la educación peruana al siglo XXI, que expresamente pide a los docentes de las diferentes áreas prepararse para los desafíos de la sociedad futura en proceso de construcción, ello implica que deben estar en permanente capacitación en el uso de las TIC (MINEDU, 2012b)

4.2. DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Las actividades realizadas en el proceso experimental han sido graduados y organizados sistemáticamente partiendo de los saberes previos de los estudiantes, para luego relacionarlos con los comandos básicos del Geogebra para facilitar la resolución de problemas de ecuaciones e inecuaciones en forma algebraica y gráfica; luego incursionar al estudio de la programación lineal para llevar el proceso de optimización a través del pivoteo con el método Simplex mediado por el PHPSimplex tanto para el proceso de pivoteo como para la presentación gráfica.

Actividad N° 1. Haciendo uso de lápiz y papel ubican puntos y grafican rectas que representan a ecuaciones de primer grado con una incógnita, luego los estudiantes desarrollan estos mismos procedimientos haciendo uso de algunos comandos del software Geogebra.

Actividad N° 2. Haciendo uso de lápiz y papel lo estudiantes resuelven sistemas de ecuaciones con dos incógnitas a través del método de Gauss-Jordan y lo representan gráficamente haciendo la intersección de las rectas con los ejes de coordenadas; luego representan gráficamente usando el Geogebra y determinan su conjunto solución.

Actividad N°3. Haciendo uso de lápiz y papel identifican la gráfica de las inecuaciones en el plano cartesiano mediados por el Geogebra, luego determinan el conjunto solución como semiplanos e intersección semiplanos en el sistema de coordenadas rectangulares.

Actividad N° 4. Los estudiantes evalúan los puntos que pertenecen y que no pertenecen a un sistema de inecuaciones, ubicando los vértices de intersección de semiplanos y regiones convexas que se determinan haciendo uso del Geogebra.

Actividad N° 5. Se resuelven problemas de optimización identificando la región factible, optimización de la región factible, las restricciones para luego identificar el tipo de solución, haciéndose una introducción a la resolución de problemas de programación lineal con el PHPSimplex.

Actividad N° 6. Se espera que los estudiantes tengan habilidad en la introducción de datos al PHPSimplex para la resolución de problemas de programación lineal por el método simplex y el método gráfico en dos problemas contextualizados referidos a “fábrica de carpetas”. En esta actividad previa al uso del recurso tecnológico identifican los datos del problema en una tabla, la función objetivo, las restricciones y las expresiones algebraicas correspondientes. Luego se pide a los estudiantes que procedan con la optimización mediante el método Simplex y el método gráfico con el PHPSimplex, para luego identificar las coordenadas de los vértices de la región factible. Luego, a partir de ellos identifica el valor óptimo solicitado.

Las acciones realizadas por los estudiantes en la actividad 6, fueron objeto de calificación tanto referido al conocimiento matemático como el manejo tecnológico, para la resolución de problemas de optimización.

4.2.1 Organización interna de las actividades propuestas

De las actividades matemáticas que se llevó a cabo durante el trabajo experimental en el aula se sustentaron en:

Conocimientos matemáticos: En este ítem se tuvo en cuenta:

♦ ***Conocimientos matemáticos referidos al campo algebraico:***

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, con desigualdades: <, >, $\geq$, $\leq$.

Número de restricciones de un problema de programación lineal

Registro algebraico de problemas de programación Lineal.

Tipo de Optimización: Maximización o Minimización.

Tipo de solución de un problema de Programación Lineal: entero, real, positivo, con una solución, múltiples soluciones y sin solución alguna.

♦ ***Conocimientos matemáticos asociado al campo geométrico:***

Puntos y Rectas en el plano $\mathbf{R}^2$.

Intersección de rectas.

Semiplanos abiertos y cerrados.

Intersección de semiplanos.

Tipo de intersección de semiplanos.

Región factible: tipos.

4.2.2 Competencias a desarrollar en el estudiante

Al finalizar la realización de las seis actividades programadas en las seis sesiones de clase, el estudiante del quinto grado de secundaria:

- ♦ Domina conceptos y definiciones básicas referido a la teoría de ecuaciones, inecuaciones y de Programación Lineal.
- ♦ Resuelve ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el método de Gauss-Jordan, identificando si es consistente o inconsistente.

- ♦ Representa algebraica y gráficamente puntos, rectas y semiplanos, proveniente de las ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- ♦ Identifica el conjunto solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- ♦ Representa gráficamente el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una variable.
- ♦ Representa gráficamente la región factible determinado por las restricciones de un problema de Programación Lineal.
- ♦ Comprende los pasos a seguir en la resolución de un problema de Programación Lineal mediante el método Simplex y el método Gráfico.

4.2.3 Organización del aprendizaje en cada actividad:

Los aprendizajes del tema de estudio estuvieron organizados a través de actividades que se desarrollaron dentro de las sesiones de aprendizaje, las mismas que se resumen en la tabla 10.

ACTIVIDAD	CONTENIDO	APRENDIZAJES ESPERADOS
Actividad 1	Gráfica de ecuaciones con algunos comandos del Geogebra.	1. Identifica ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. 2. Grafica ecuaciones de primer grado con dos incógnitas el plano.
Actividad 2	Sistema de ecuaciones con el método de Gauss y gráfica con Geogebra	1. Resuelve sistema de ecuación con el método de Gauss-Jordan 2. Grafica solución de una ecuación de primer grado en el plano R^2. 3. Conoce ventana algebraica y gráfica del Geogebra 4. Grafica sistema de ecuaciones con el Geogebra
Actividad 3	Sistema de inecuaciones con Geogebra	1. Reconoce algebraica y gráficamente inecuaciones de primer grado 2.Resuelve gráficamente inecuaciones con el Geogebra 3. Interpreta la solución algebraica y gráfica de inecuaciones 4. Identifica la solución de un sistema de inecuaciones

<table>
<tr><td>Actividad 4</td><td>Resolución de ejercicios de maximizar o minimizar la función objetivo con el PHPSimplex.</td><td>1. Identifica la función objetivo y las restricciones.
2. Grafica la función factible.
3. Identifica el tipo de optimización: maximizar o minimizar.
4. Identifica vértices de la región factible.
5. Evalúa la función objetivo en los vértices de la región factible.
6. Optimiza haciendo uso de la página PHPSimplex.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5</td><td>Plantear y resolver un problema contextualizado de programación lineal “Dieta para pollos en granja.”.</td><td rowspan="2">1.Organiza la información en una tabla
2. Identifica las variables desde el problema.
3. Identifica las restricciones.
4. Identifica la función objetivo.
5. Grafica la función factible.
6. Identifica el tipo de optimización: maximizar o minimizar.
7. Identifica los vértices de la región factible.
8. Evalúa la función objetivo en los vértices de la región factible.
9. Optimiza haciendo uso de la página PHPSimplex.
10. Determina la cantidad óptima según el problema.</td></tr>
<tr><td>Actividad 6</td><td>Plantear y resolver un problema contextualizado de programación lineal “Fabricación de carpetas?”.</td></tr>
</table>

Tabla N° 10. Organización del trabajo experimental con los estudiantes.

4.2.4 Tiempo de duración de las actividades

Las actividades fueron planificadas para ejecutarlos en seis sesiones de clase cada uno en bloque de tres horas continuadas, los estudiantes no tuvieron mucha dificultad para asimilar la nueva modalidad de llevar el proceso enseñanza-aprendizaje; pues reconocieron con facilidad los comandos básicos del software libre GeoGebra y el proceso de resolución de problemas de Programación Lineal con PHPSimplex. Las actividades realizadas se resume en la tabla 11.

5 Grado	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5	Sesión 6
Tiempo	03 horas	03 horas	03 horas	03 horas	03 horas	03 horas
Asistentes	15	15	15	15	15	15

Tabla N° 11. Estudiantes participantes en la investigación y el tiempo total invertido.

Es preciso mencionar, antes de iniciar con el trabajo experimental, se tuvo una charla explicativa sobre el trabajo a realizar y sobre la importancia del uso de herramientas tecnológicas para dinamizar el proceso de aprendizaje de la matemática. Durante las sesiones de clase interactiva con el software, se observó que los estudiantes mostraron mucha motivación y creatividad por resolver diversos problemas haciendo uso de la tecnología. Asimilando, la importancia que tiene el Geogebra y el PHPSimplex para el logro de aprendizajes significativos en el tema tratado.

Características generales de las actividades, las actividades realizadas tuvieron en forma muy clara:

- Información sobre el desarrollo de capacidades en los estudiantes en cada subtema desarrollado.
- Información sobre los contenidos matemáticos a desarrollarse y los aprendizajes a lograr sobre el tema.
- Información sobre el procedimiento a seguir con el Geogebra y el PHPSimplex en la realización de cada actividad.

4.3. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

En el proceso de trabajo de campo del proceso investigativo se hicieron uso de los instrumentos:

- Ficha de observación de clase
- Rúbrica para evaluación de actividades
- Test de opinión sobre el proceso de aprendizaje de la Programación Lineal
- Cuestionario de satisfacción

4.3.1 Ficha de observación de desempeño en clase

Se elaboró una ficha de observación para el registro de los logros, dificultades e incidencias durante el estudio de la Programación Lineal, sin que el investigador influencie en el proceso de trabajo individual del grupo de estudio, siendo el rol del docente de mero observador.

4.3.2 Actividades del proceso experimental: aprendizajes esperados

♦Ficha de actividades

Se elaboraron 6 actividades para ser realizadas con los estudiantes referidos al manejo de algunos comandos del Geogebra y PHPSimplex, así como los conceptos fundamentales de las ecuaciones, inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. El procedimiento en el método de Gauus-Jordan para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, el método gráfico para resolver inecuaciones asistido por el Geogebra y, los métodos simplex y gráfico para resolver problemas de programación lineal asistido por PHPSimplex.

Las actividades se realizaron por etapas, iniciándose la etapa con la manipulación de algunos comandos del Geogebra para representación gráficas de ecuaciones e inecuaciones, familiarizándose con facilidad los estudiantes a la realización de algunas actividades como ubicación de puntos en el plano, identificación de puntos de intersección de rectas, representación gráfica de inecuaciones e identificación de puntos que pertenecen al conjunto solución. Esta primera etapa introductoria consistió de tres actividades que se detallarán posteriormente.

Se afianza con la identificación de puntos y la interpretación de coordenadas en el plano como inicio al proceso de estudio de problemas de Programación Lineal. Luego se procede a la construcción de gráfica de rectas, de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, inecuaciones y sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, para luego realizar la optimización de la función objetivo dentro de una región factible. Para ello se realizaron trabajos en las dos modalidades con lápiz y papel a través del método simplex (mediante el proceso de pivoteo), luego haciendo uso del software libre Geogebra para la interpretación gráfica.

En la segunda etapa del trabajo se desarrollan dos problemas, contextualizado al entorno de las actividades que se realizan en la comunidad de programación lineal uno de maximización y otra de minimización, en compañía del docente. Luego se plantean 4 problemas adicionales para que desarrollen en forma individual, primero utilizando lápiz y papel, después mediado por el PHPSimplex.

♦Aprendizajes esperados

Como aprendizajes esperados que se propuso en las seis sesiones de aprendizaje y las seis actividades desarrolladas, estuvo orientado al logro de los objetivos propuestos y a comprobar las conjeturas planteadas.

En las tres primeras sesiones y sus respectivas actividades, se espera que el estudiante:

1. El estudiante identifica las coordenadas de un punto en el plano y los grafica (ubica) en el plano $\mathbf{R}^2$.
2. Dibuja una ecuación de primer grado con una incógnita mediante el intercepto con los ejes de coordenadas rectangulares en el plano $\mathbf{R}^2$.
3. Realiza operaciones algebraicas por el método de Gauss-Jordan para resolver sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
4. Representa gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en el plano $\mathbf{R}^2$, usando lápiz y papel.
5. Ubica puntos en la pantalla gráfica del Geogebra, ingresando datos por la ventana de entrada de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en la ventana algebraica del Goegebra y luego lo grafica en el plano $\mathbf{R}^2$.
6. Ingresa ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en la ventana algebraica del Goegebra, los grafica e identifica el conjunto solución en el plano $\mathbf{R}^2$, sea esta un punto, infinita o nula.
7. Ingresa inecuaciones de primer grado con dos variables, por la ventana de entrada del Geogebra, analiza e identifica los puntos que pertenecen al semiplano que determina la inecuación.
8. Ingresa sistema de inecuaciones de primer grado por la ventana de entrada del Geogebra, analiza e identifica las regiones que satisfacen al sistema propuesto.

Al finalizar las sesiones 4, 5 y 6, y sus actividades se espera que:

1. Identifica las variables desde un registro verbal a la forma algebraica y lo expresa en forma de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
2. Identifica la función objetivo que será optimizado para maximizar o minimizar, con lápiz y papel.
3. Analiza las restricciones al que será sujeto el proceso de optimización de la función objetivo en forma algebraica con lápiz y papel.

4. Ubica gráficamente y sombrea la región factible donde será posible el proceso de optimización de la función objetivo, identificando las coordenadas en los vértices de esta región.
5. Obtiene la solución del problema de optimización (maximizar o minimizar) usando el método simplex, ingresando en forma pertinente los datos al PHPSimplex, para luego desarrollar en forma interactiva el proceso de pivoteo con este recurso hasta llegar a la solución óptima.
6. Resuelve gráficamente el problema de optimización con el PHPSimplex, identifica la región factible, identificando las coordenadas de los vértices de esta región factible.
7. Determina el valor máximo o mínimo (solución óptima) a partir de las coordenadas de la región factible que se resume en la fila de color verde.

4.3.3 Sesiones de aprendizaje y resultado de actividades

SESIÓN 1

Objetivos de la sesión:

- Presentar a los estudiantes elementos de reflexión que permitan obtener la definición de la ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- Representar gráficamente ecuaciones de primer grado con dos incógnitas haciendo intercepto con los ejes y mediante el software Geogebra.

Dimensión matemática:

Se introduce el problema a estudiar a partir de una situación matemática relacionado con el problema geométrico de puntos y rectas en el plano.

Se identifican las condiciones que se van a vulnerar de la definición de una ecuación, reflexionar las condiciones de la representación algebraica y gráfica de las ecuaciones, con una consecuente reflexión sobre cuáles son sus potenciales y sus limitaciones.

Dimensión didáctica:

Se comienza la sesión utilizando el debate científico. Se ha elegido una cuestión "sencilla" para animar a los estudiantes a participar (y acostumbrarse a esta metodología, que se prevé utilizar durante las siguientes sesiones). La cuestión a debatir, implícitamente, bajo qué condiciones una ecuación de primer grado con dos incógnitas es resoluble, las posibilidades de solución de ecuaciones con dos incógnitas y analizar las posibles soluciones.

Formas de trabajo:

Se hace uso del debate en clase y las aportaciones de los estudiantes en el proceso de resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se realizan algunos cálculos y se interpretan gráficamente los resultados.

La profesora también utiliza la pizarra para sintetizar estas aportaciones, expresándolo algebraicamente, para luego resolver con el método de Gauss-Jordan y representar gráficamente haciendo uso del software Geogebra.

El medio:

El *medio* que se presenta consistió en problemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Está diseñado de forma que permita a los estudiantes resolver con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, se incorporó algunos casos de respuestas erróneas previstas. Con este propósito fueron incorporadas igualdades que representan rectas verticales y horizontales, que se utilizarán para reflexionar si las condiciones dadas por los estudiantes son necesarias. Se tuvo como sistema de referencia para visualizar la resolución de ecuaciones el plano cartesiano en la ventana gráfica del Geogebra.

Recurso utilizado por el profesor:

Se utilizó el software libre GeoGebra para la resolución algebraica y gráfica de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Como recurso adicional se hace uso del proyector multimedia que estuvo activo durante toda la sesión, para algunos alcances puntuales se utilizó la pizarra.

Material distribuido a los estudiantes:

Al inicio de la sesión se les entrega un conjunto de problemas de ecuaciones para que los estudiantes lo interpreten gráficamente por método de intercepto con los ejes de coordenadas y mediante el Geogebra.

<u>Actividad 1:</u>

Estuvo orientado a la familiarización de los participantes a la metodología de trabajo, puesto que en el diagnóstico previo ninguno de los participantes había tenido una experiencia en llevar un proceso de aprendizaje mediado por un software matemático; asimismo mucha dificultad para trabajar combinando el método algebraico y el gráfico en la resolución de sistema de ecuaciones; empero entendido la finalidad de la actividad estaban motivados de realizar las actividades que se le indicaba.

Al inicio de la sesión la mayoría de los estudiantes del quinto grado tenían dificultades para ubicar puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, en la ubicación de escala en los ejes de coordenadas con lápiz y papel, ninguno de los estudiantes conocían el Software Geogebra ni el manejo de la ventana algebraica ni gráfica del mismo. Al finalizar la sesión ubicaban con suma facilidad las coordenadas de un punto a mano alzada como con el Geogebra, asimismo utiliza con pertinencia algunos comandos del Software.

Los estudiantes indican que el Geogebra facilita la ubicación de puntos y construcción de gráficas en el plano, reduciéndose la realización de estas actividades a menos de la mitad del tiempo que al realizar con lápiz y papel; es decir, la mayoría percibe la eficacia que tiene el Geogebra para realizar actividades algebraicas y gráficas.

A todos los estudiantes se les hizo fácil y familiar la resolución de ecuaciones en forma gráfica, demostrando mucha motivación y precisión en graficar la recta que representa a ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, como se evidencia en la evaluación de los resultados de la actividad 1, mediante la rúbrica, tabla 12.

Entre algunas apreciaciones de los estudiantes, frente a la actividad 1, se puede destacar:

Motivación y permanente interacción con el programa Geogebra durante la clase.

La posibilidad de que a través del software se refuerza el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Percepción del desarrollo de la clase como creativa y dinámica, que permitieron desarrollar en forma íntegra la actividad, valorando la utilidad del Geogebra para entender las rectas que representan una ecuación de primer grado con dos variables. Asimismo, reconoce en la acción del docente un trabajo dinámico, manejo de grupo y capacidad en el manejo de las TIC con fines educativos.

Cuando se ingresó a manipular el Software la mayoría de los estudiantes ingresaron por la ventana de entrada y ubicaron puntos en la ventana gráfica, graficaron con facilidad segmento delimitado por dos puntos, algunas figuras geométricas, inclusive algunos se adelantaron en hallar algunas medidas.

Como muestra, se puede observar algunos puntos y figuras trazados en forma espontánea por dos estudiantes:

El estudiante, Kepler Ñaupa fácilmente ubico puntos en el plano y graficó la recta que representa a la ecuación analizando la orientación o pendiente de la recta, inclusive investigó sobre que otras bondades tiene el programa y le dio color a la pantalla gráfica, también a cada recta y punto le dio colores diferentes, hecho que le causó una automotivación para realizar otras actividades posteriores, figura 20.

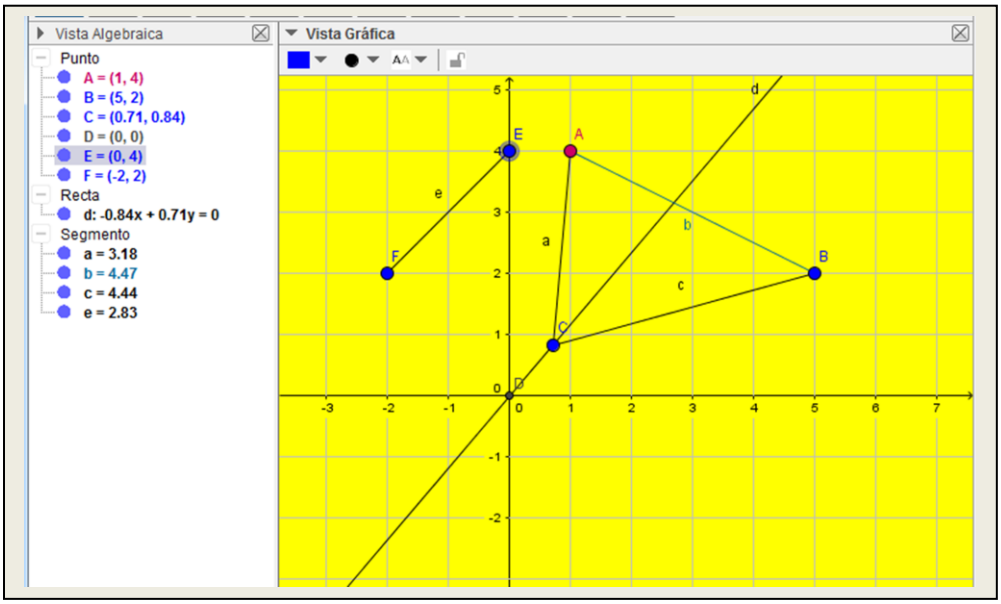


Figura 20. Trabajo ubicación de punto y trazado de segmento hecho por el estudiante Kepler Ñaupa.

La alumna, Natalia Blanco trazaba la recta con el Geogebra y observaba la ventana algebraica y mencionaba que esa era su ecuación mostrándose sorprendida por la dinámica de trabajo como era posible que ella grafica la recta e inmediatamente en la otra ventana salía la ecuación, la actividad se muestra en la figura 21.

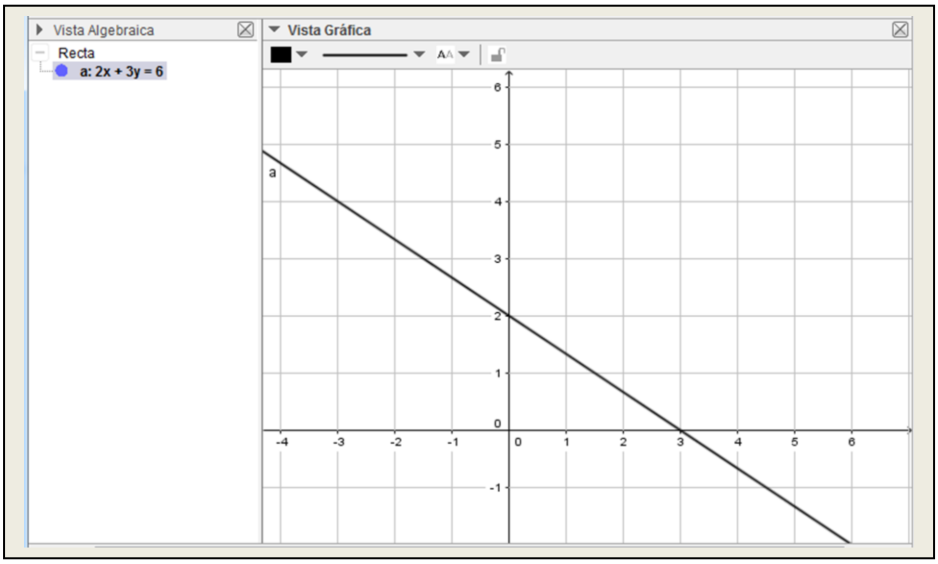


Figura 21. Gráfica de la ecuación $2x + 3y = 6$, realizado por la alumna Natalia Blanco.

En suma, en esta actividad los estudiantes aprendieron a graficar puntos y rectas, determinando su corte con lápiz y papel, así como con mediación del Software Geogebra.

SESIÓN 2

Objetivos de la sesión:

- Resolver a través del método de Gauss-Jordan sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de solución única, infinitas soluciones y sistemas inconsistentes, representándolo gráficamente con lápiz en papel y en forma digital haciendo uso del Geogebra.

- Identificar los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas consistentes e inconsistentes mediante el método de Gauss-Jordan y el método gráfico haciendo uso del Geogebra.

Dimensión matemática:

Se plantea situaciones que conducen a la formulación de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Se identifican las condiciones para la definición de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, reflexionar sobre cómo extender esta definición. Para ser resueltos de manera algebraica y gráfica, como resultado de un trabajo matemático consciente con uso pertinente de recursos que brinda la tecnología.

Dimensión didáctica:

Se comienza la sesión utilizando el debate científico. Se inicia con un problema contextualizado para que los estudiantes tengan automotivación a participar en la resolución. El docente pone en cuestión explicita e implícitamente, bajo qué condiciones una ecuación de primer grado con dos incógnitas es resoluble, y analizar si los puntos hallados satisfacen la ecuación dada en el plano.

Formas de trabajo:

Durante la sesión se utiliza la explicación de docente y las aportaciones de los estudiantes. Se enuncian problemas que se traducen en sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se realizan algunos cálculos y se interpretan gráficamente los resultados. Ratifican la solución gráfica del problema haciendo uso del Geogebra.

El medio:

El *medio* que se presenta consiste en ejercicios y problemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Está diseñado de forma que permita a los estudiantes resolver con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, incorpora algunos casos de respuestas erróneas previstas. El medio principal utilizado es el software Geogebra, con quien interactúan los estudiantes con mucha motivación y dinamismo.

Recurso utilizado por el profesor:

Se utilizó el software libre GeoGebra para la resolución algebraica y gráfica de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas; sin dejar de usar el proyector multimedia que estará activo durante toda la sesión.

Material distribuido a los estudiantes:

Se entrega con antelación las hojas de problemas sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que se resuelven en forma interactiva durante la sesión y se selecciona problemas para entregar de forma individual.

Actividad 2:

La actividad estuvo orientada a la resolución de sistema de ecuaciones, en primer término los estudiantes resuelven el sistema con lápiz en papel utilizando el método de Gauss-Jordan, y de acuerdo a los resultados obtenidos la mayoría identificaron con facilidad si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

También se plantea un problema teórico para que los estudiantes le traduzcan en lenguaje algebraico a través de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas para resolverlo mediante el método de Gauss-Jordan. Lo que se priorizó durante proceso didáctico se dio prioridad a la solución gráfica de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas haciendo uso del software Geogebra.

Los estudiantes durante la actividad mostraron mucha solvencia para ingresar las ecuaciones al Geogebra, para luego graficarlos, interpretan con facilidad el intercepto de las gráfica con los ejes de coordenadas, identifican las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas que representan a la ecuaciones. En todo momento se sienten motivados por observar la gráfica del sistema y tratan de explicar desde la gráfica en el Geogebra el conjunto solución del sistema, como lo hizo el estudiante Pedro Morales.

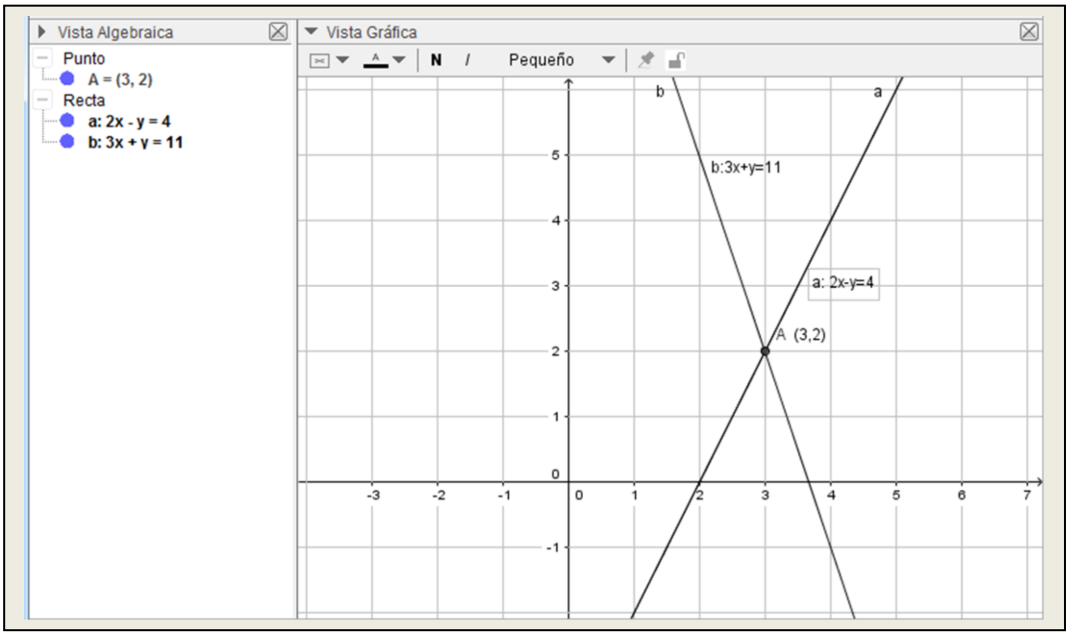


Figura 22. Solución gráfica del sistema: $2x+y=4$, $3x+y=11$ realizado por el estudiante Pedro Morales.

SESIÓN 3

Objetivos de la sesión:

- Representar gráficamente en el plano cartesiano inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, identificando los semiplanos que se determinan, con lápiz y papel y con el Geogebra.

- Identificar las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales, analizando las solución en la intersección de regiones determinados por la intersección de los semiplanos que lo representan haciendo uso del Geogebra.

Dimensión matemática:

En primer lugar, se identifican las condiciones que se van a vulnerar de la definición de una inecuación de primer grado con dos incógnitas, reflexionar sobre cómo extender esta definición, en la resolución de problemas contextualizados. Con las actividades de la nueva definición se pretende favorecer una visión dinámica de los procesos presentación de las inecuaciones con las cuatro desigualdades posibles a través de ejemplos elegidos favorecen la reflexión sobre las condiciones necesarias y suficientes para el estudio de gráfica de regiones, con una consecuente reflexión sobre cuáles son sus potenciales y sus limitaciones. Las gráficas de regiones abiertas, cerrada e intersección dé estas son identificados con facilidad a través de un trabajo matemático consciente con uso de recursos en línea.

Dimensión didáctica:

Se comienza la sesión utilizando el debate sobre negación de una igualdad y la negación de una desigualdad. La cuestión a debatir, implícitamente, fue bajo qué condiciones una inecuación de primer grado con una variable es resoluble y cuál es su conjunto solución en función de acuerdo a las desigualdades: $>$, $<$, $\geq$ o $\leq$, analizando sus soluciones en el plano cartesiano.

Formas de trabajo:

Se definen sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se realizan algunos cálculos y se interpretan gráficamente los resultados, que conducirán al estudio de regiones en el plano e intersección de regiones. El profesor utiliza la pizarra para sintetizar estas aportaciones, expresándolo algebraicamente, para luego resolver el problema haciendo uso del software Geogebra, conjuntamente con los estudiantes.

El medio:

El *medio* utilizado consistió en problemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, diseñado de tal forma que permita a los estudiantes resolver con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, incorpora algunos casos de respuestas erróneas previstas. Con este propósito se incorporan desigualdades que representan solución nula. El *medio* es incompleto en el sentido de que, en un principio, se desconoce la solución al problema propuesto y su utilidad; los estudiantes disponen de los elementos y conocimientos necesarios para su estudio.

Recurso utilizado por el profesor:

Utilizará el software libre GeoGebra para la resolución algebraica y gráfica de los sistemas inecuaciones lineales con dos incógnitas; sin dejar de usar el proyector multimedia que estuvo activo durante toda la sesión. También como complemento, se utiliza la pizarra.

Material distribuido a los estudiantes:

Al inicio de la sesión todos los participantes tienen la actividad a realizar durante la sesión impreso en papel, donde se resuelven los hallazgos según se les pide verbalmente durante el proceso didáctico en forma individual.

Actividad 3:

La mayoría asimilaron en forma rápida el concepto de inecuación y sistema de inecuaciones, así como su representación gráfica, tanto con lápiz y papel como haciendo uso del software Geogebra.

Se observó durante la ejecución de la actividad un nivel de motivación muy alta y la conformidad que mostraban al disfrutar de sus resultados obtenidos mediante el uso del Geogebra cada uno en su PC individual.

A todos los estudiantes se les hizo fácil y familiar representar gráficamente inecuaciones de primer grado con dos variables, como se evidencia en los resultados de la actividad que se muestran en la tabla 12.

Entre algunas apreciaciones de los estudiantes, frente a la actividad 3, se puede destacar:

Predisposición para resolver problemas de inecuaciones en forma interactiva usando el software Geogebra e interpretar la región que satisface la desigualdad.

La posibilidad de que a través del software se refuerza el aprendizaje de conceptos matemáticos. A continuación se indica algunas apreciaciones que tuvieron los estudiantes frente a la actividad realizada:

La mayoría de los estudiantes, mencionaron que las actividades con lápiz y papel ya deben ser descartado, puesto que es más económico y ágil la graficación de inecuaciones con el Geogebra.

La mayoría de los estudiantes al comprobar sus resultados obtenidos con el Geogebra se mostraron contentos pues los resultados eran similares

La alumna, Lisbeth Navarro gráfico con lápiz y papel una inecuación y pinto la región donde se encontraba la solución y comprobó su resultado con el Geogebra, entonces se mostró muy contenta pues su procedimiento eran los correctos y la daba más confianza.

El estudiante Maxi Calero, gráfico fácilmente los inecuaciones determinando las regiones que se formaban así como la región de solución de las inecuaciones donde llegó a la conclusión que la solución es la intersección de las inecuaciones, pues al graficar con lápiz y papel varias inecuaciones mostraba cierta duda en reconocer la intersección.

En la figura 23, se muestra la gráfica realizada durante la actividad, del ejercicio correspondiente a inecuaciones con dos incógnitas por el estudiante Maxi.

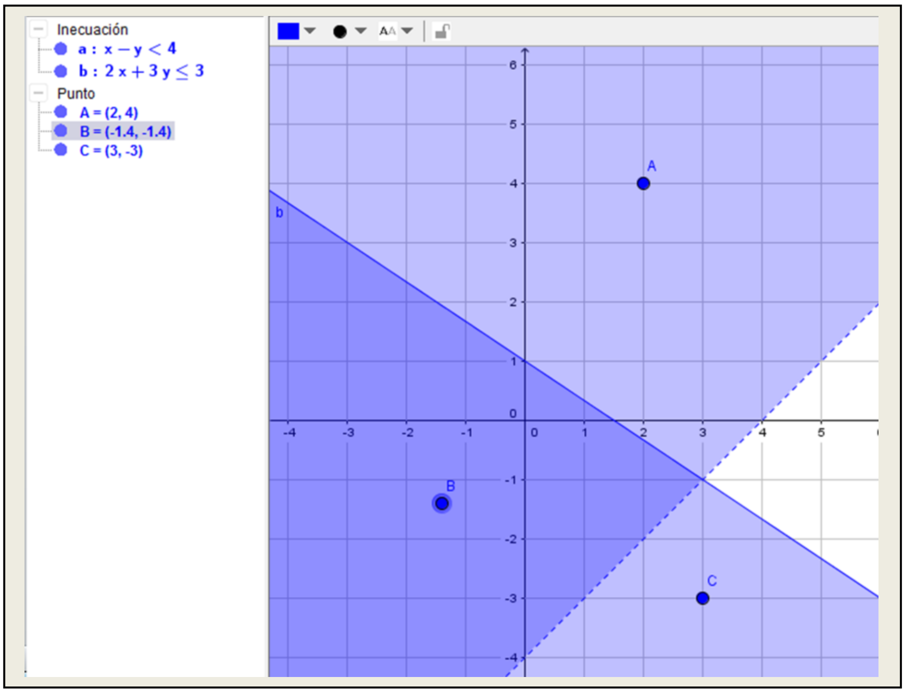


Figura 23. Solución gráfica de $\begin{cases} x - y > 4 \\ 3x + 2y \leq 3 \end{cases}$ realizado por el estudiante Maxi Calero.

Para el aprendizaje bastó para la mayoría de los estudiantes tener la expresión algebraica de la inecuación, mientras que su solución gráfica lo hace de inmediato con el Geogebra, sólo con alguna pequeña demora en ingresar las inecuaciones al Geogebra.

SESIÓN 4

Objetivos de la sesión:

- Reflexionar sobre la importancia de la programación lineal como recurso para desarrollar problemas de optimización, identificación de la función objetivo, la región óptima.
- Resolver ejercicios de programación lineal identificando el modo de optimización utilizando el método Simplex y el método Gráfico mediado por el programa PHPSimplex.

Dimensión matemática:

Se identifican las condiciones a tener en cuenta en un problema de optimización, sujeto a restricciones con la finalidad de analizar los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible, previamente identificada sus coordenadas.

Se realiza un trabajo algorítmico con el método simplex para resolver el problema de optimización, favoreciendo una visión dinámica de los procesos de pivoteo para presentar de manera directa el resultado óptimo. El problema a optimizar ya se encuentra en su expresión algebraica, listo para resolverlo con el método Simplex y gráfico, tanto con lápiz en papel o haciendo uso del programa PHPSimplex.

Dimensión didáctica:

Para motivar el aprendizaje se comienza la sesión utilizando el debate científico sobre la gráfica de inecuaciones realizadas en la sesión anterior. Siendo el elemento directo del acto didáctico las condiciones que debe tener la función objetivo previamente fijada para el proceso de maximización o minimización, según el caso.

Formas de trabajo:

El desarrollo de la clase se desarrolla en un ambiente motivado, basado en preguntas y respuestas con participación en el proceso didáctico, se realizan algunos cálculos y se interpretan gráficamente los resultados, que conducirán al estudio de la función objetivo sujeto a restricciones previamente identificadas y fijadas. Se utiliza como herramienta central para sintetizar las aportaciones, expresándolo algebraicamente, para luego resolver haciendo uso de la página PHPSimplex.

El medio:

El *medio* que se presenta consistió en problemas de programación lineal con la función objetivo y las restricciones, diseñado de forma que permita a los estudiantes resolver con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, incorpora algunos casos de respuestas erróneas previstas, que se utilizarán para reflexionar si las condiciones dadas por los estudiantes son necesarias y/o suficientes. El *medio* es incompleto en el sentido de que, en un principio, se desconoce la solución al problema propuesto y su utilidad.

Recurso utilizado por el profesor:

Se utilizó la página PHPSimplex para la optimización algebraica por el método simplex, así como el proceso de gráfica de la región factible. Si dejar de usar el proyector multimedia que estará activo durante toda la sesión. También como complemento, se usará la pizarra.

Material distribuido a los estudiantes:

Antes de iniciar la sesión en el laboratorio la docente reparte las guías de actividad en clase, en donde se resolverán cuestiones durante las sesiones siguientes y se seleccionarán problemas para entregar de forma individual.

Actividad 4:

La totalidad de estudiantes prestaron mucha atención a la representación algebraica de problemas de optimización; en primer término desarrollan con lápiz en papel con el método Simplex y luego presentan gráficamente inecuaciones de primer grado con dos variables, como se evidencia en los resultados de la actividad que se muestran en la tabla 13. También predisposición para resolver problemas de optimización en forma interactiva usando el software PHPSimplex y representar la región factible en forma gráfica. Entre algunas apreciaciones de los estudiantes frente a la actividad realizada, destacan:

La mayoría de los estudiantes, a partir del texto del problema presentado, identifican las variables, restricciones y la función objetivo con lápiz y papel, tienen alguna dificultad en ingresar los datos extraídos del problema al programa PHPSimplex, pero una vez ingresado los datos, aplican con mucha facilidad los comandos tanto para la solución por el método simplex y también el método gráfico.

La mayoría de los estudiantes al comprobar sus resultados obtenidos con el PHPSimplex se muestran motivados a desarrollar problemas sobre programación lineal.

La alumna, Analia Santiago mencionó que el programa PHPSimplex era muy útil porque le simplificaba todo el proceso, donde se tenía que tener mucho cuidado era al ingresar los datos en el programa.

El estudiante, Rolando Estela fue el primero en aplicar el método simplex y lograr la respuesta fue para él una gran alegría pues su autoestima estaba al tope tanto así que guio a aquellos que tuvieron alguna dificultad, posteriormente su resultado fue corroborado el programa PHPSimplex

A continuación, en las figuras 24 y 25, se muestran las soluciones realizadas durante la actividad 4, de ejercicio de maximización y minimización, por Rolando y Analia.

Gráfica de la región factible

Ejercicio1, Actividad 4.

Maximización de la función objetivo:

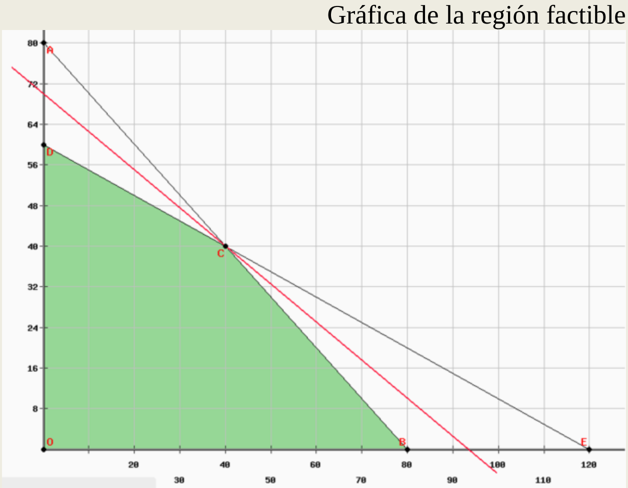
$Z = F(x_1 , x_2) = 18x_1 + 24x_1$,

sujeto a:

$x_1 + x_2 \leq 80$;

$x_1 + 2x_2 \leq 120$;

$x_1, x_2 \geq 0$



Cuadro resumen de resultados

Punto	Coordenada X (X1)	Coordenada Y (X2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	80	1920
B	80	0	1440
C	40	40	1680
D	0	60	1440
E	120	0	2160

Punto máximo en C = (40 , 40)

Valor máximo: 1680

Figura 24. Actividad de maximización de función objetivo realizada por Analia Santiago.

Gráfica de la función factible

Minimización de la función objetivo:

$Z = F(x_1 , x_2) = 40x_1 + 50x_2$,

sujeto a:

$x+2y \geq 60$;

$2x + y \geq 60$;

$x_1, x_2 \geq 0$.

Cuadro resumen de los resultados

Punto mínimo C = (20 , 20)

Valor máximo: 1800

Punto	Coordenada X (X1)	Coordenada Y (X2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	30	1200
B	60	0	3000
C	20	20	1800
D	0	60	2400
E	30	0	1500

Figura 25. Actividad de minimización realizada por el estudiante Rolando Estela.

SESIÓN 5 y 6

Objetivos:

- Identificar las variables en un problema de programación lineal para luego hacer un cuadro resume de los datos del problema sobre actividades que realizan los estudiantes durante el estudio de la programación, identificación de la función objetivo, la región óptima.
- Analizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas de programación lineal, identificación de la función objetivo, las restricciones, la región factible y la solución óptima.

Dimensión matemática:

En primer lugar, se identifican a partir de la lectura del problema las inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, escriben la función objetivo sujeta a restricciones. En todas las sesiones de clase se utilizó representaciones numéricas, algebraicos y registros gráficos como resultado de un trabajo matemático consciente con uso pertinente de recursos en línea.

Dimensión didáctica:

Se comienza la sesión utilizando el debate científico. Se ha elegido una cuestión “sencilla” para los estudiantes para animarlos a participar (y acostumbrarse a esta metodología, que se prevé utilizar durante la sesión). La cuestión a debatir, implícitamente, será bajo qué condiciones se desarrolla la función objetivo con restricciones dadas.

Formas de trabajo:

En las seis sesiones se utiliza, sobre todo, procedimientos heurísticos en clase, con participación permanente de los estudiantes. Se define la función objetivo sujeto a restricciones fijadas. La profesora aparte del proyector multimedia dispone de una pizarra para sintetizar estas aportaciones, expresándolo algebraicamente, para luego resolver el problema haciendo uso de la página PHPSimplex, según corresponda.

El medio:

El *medio* que se presenta consiste en problemas de programación lineal. Está diseñado de forma que permita a los estudiantes resolver con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, incorpora algunos casos de respuestas erróneas previstas. Los estudiantes disponen de los elementos y conocimientos necesarios para abordar el estudio del tema.

Recurso utilizado por el profesor:

Se utilizó el programa el PHPSimplex para la resolución algebraica y gráfica de problemas de programación lineal. Si dejar de usar el proyector multimedia que se mantiene activo durante toda la sesión. También como complemento, se usará la pizarra.

Material distribuido a los estudiantes:

Para iniciar la actividad se hace entrega de la guía de problemas, de donde se procede a resolver los problemas en forma algebraica y gráfica, en forma individual, asistida por el programa PHPSimplex.

Actividad 5 y 6:

Los estudiantes identifican problemas resolubles de programación lineal a través de sistema de inecuaciones primer grado con dos variables. La resolución de las actividades tuvo una duración de seis horas distribuido en dos bloques de acuerdo a lo que se establece en el horario de clases. Los estudiantes previo a la utilización de PHPSimplex para aplicar el método Simplex y gráfico, previo a la resolución del problema y posterior al tratamiento procedieron a realizar, las siguientes acciones:

- ♦ Comprensión de problema a resolver e identificar las variables de estudio.
- ♦ Determinar la función objetivo
- ♦ Número de restricciones a tener en cuenta para resolver el problema.
- ♦ Registro algebraico de problemas de programación Lineal.
- ♦ Tipo de Optimización: Maximización o Minimización.
- ♦ Analizar los resultados de la evaluación de las coordenadas de los vértices de la región factible.
- ♦ Determinar la cantidad requerida para el proceso de maximización o de minimización.

Respecto a la realización de esta actividad, la mayoría de los estudiantes quedaron familiarizados y muy impresionados con la eficiencia que en la resolución de problema de optimización con el PHPSimplex.

El estudiante Luis Colca identificaba fácilmente las variables así como podía representar algebraicamente las restricciones del problema y determinar la función objetivo además graficaba la región factible con el PHPSimplex que también le daba ya elaborado el cuadro de respuesta donde el interpretaba la respuesta correcta de optimización.

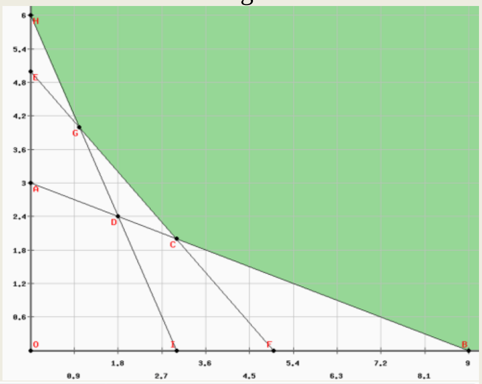
A continuación, en la figura 26, se muestra el desarrollo del problema sobre “Cosecha de duraznos en Huancanyacu”, desarrollado por Luis Colca, haciendo uso del PHPSimplex.

Problema de Minimización, actividad 6

	Tipo A	Tipo B	Total
N	1	3	9
P	1	1	5
K	2	1	4
Costo	200	300	

Variables: x_1: Caja tipo A y x_2: Caja tipo B

Gráfica de la región factible:



Función objetivo:

$Z = F(x_1, x_2) = 300x_1 + 300x_2$.

Restricciones:

$x_1 + 3x_2 \geq 9$;

$x_1 + x_2 \geq 5$;

$2x_1 + x_2 \geq 6$;

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$;

Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	3	900
B	9	0	1800
C	3	2	1200
D	1.8	2.4	1080
E	0	5	1500
F	5	0	1000
G	1	4	1400
H	0	6	1800
I	3	0	600

De los datos que se consignan en el cuadro:

a) 3 cajas de tipo A y 2 cajas de tipo B.

b) Gasto mínimo: 1200 nuevos soles

Figura 26. Respuesta algebraica y gráfica realizado por el estudiante Luis Colca.

4.3.4. Rúbrica de evaluación del aprendizaje logrado en las actividades

A. Registro de resultados obtenidos en la actividad N° 1, N° 2 y N° 3 de ecuaciones e inecuaciones mediados por programa Geogebra

A continuación se presenta la evaluación del proceso didáctico en el estudio del sistema de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas llevados a cabo a través de las actividades 1, 2 y 3, referidos a la resolución de problemas en forma algebraica con el método Gauss-Jordan y en forma gráfica haciendo uso del software Geogebra. La información recogida mediante la observación participante sobre el aprendizaje del tema de sistema de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se resume en la rúbrica de evaluación, tabla 12.

Tabla 12. Rúbrica de Evaluación del proceso de aprendizaje de Ecuaciones e Inecuaciones

N°	Indicadores	Estudiantes del quinto grado de Secundaria														
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
		Blanco	Bueno	Calero	Cielo	Colca	Estela	Herrera	Juani	Morrales	Navarro	Ñaupa	Pablo	Ponce	Ripa	Santiago
1	Identifica una ecuación de 1er grado con dos incógnitas	L	L	L	P	L	L	L	P	L	L	L	P	P	L	L
2	Grafica la ecuación de 1º con 2 incógnitas	L	L	L	P	L	L	L	L	L	L	L	P	I	L	L
3	Resuelve sistema de ecuación con el método de Gauss	L	P	L	I	L	L	P	P	L	P	P	I	I	P	L
4	Grafica solución de una ecuación de primer grado en el plano R^2.	P	P	L	P	L	L	P	P	L	L	L	P	P	L	L
5	Conoce la ventana algebraica y gráfica del Geogebra	L	L	L	L	L	L	L	P	L	L	L	P	P	L	L
6	Grafica sistema de ecuaciones con el Geogebra	L	L	L	P	L	L	L	P	L	L	L	L	P	L	L
7	Resuelve en forma algebraica inecuaciones de primer grado	L	P	L	P	L	L	L	P	L	L	L	P	I	L	L
8	Resuelve gráficamente inecuaciones con el Geogebra.	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	P	I	L	P
9	Identifica la solución de un sistema de inecuaciones	L	L	L	P	L	L	L	L	L	L	L	P	P	L	L
10	Interpreta la solución algebraica y gráfica de inecuaciones	L	L	L	I	L	P	L	P	L	L	L	L	P	I	L
	NOTA	**19**	**18**	**20**	**13**	**20**	**19**	**18**	**15**	**20**	**19**	**19**	**14**	**11**	**17**	**19**
	ESTADÍSTICOS	**Moda = 19, Media = 17,40, Desv.Est. = 2,823, CV = 16,23%**														

De la información que se observa en la tabla

1. Referido a la **identificación de la ecuación**, la mayoría reconocieron sin dificultad, simbolizándolo en forma algebraica. También a partir de los datos de problemas lo expresan con facilidad en forma de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

2. En cuanto a la **gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas**, sólo tres de los quince estudiantes tuvieron dificultad para graficar con lápiz en papel debido a que se confundieron hacer el intercepto con los ejes; pero haciendo uso de software Geogebra lo graficaron con suma facilidad, analizando a partir de ella algunas características de las rectas que los representa.

3. Referido a la **resolución de sistema de ecuaciones con el método de Gauss-Jordan**, cuatro de los quince estudiantes tuvieron dificultad para entender las operaciones elementales con filas, pero luego se nivelaron. Desarrollando los ejercicios sucesivos con mucha habilidad.

4. Respecto a la **resolución gráfica de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en el plano R^2**, las rectas que representa a las gráficas de las ecuaciones, la mayoría de los alumnos lo hicieron correctamente y muy rápido, pero tuvieron algunas dificultades en interpretar el conjunto solución, puesto que las escalas establecidas en el papel no eran uniformes.

5. En cuanto a la i**dentificación de la ventana algebraica y gráfica del software Geogebra**, los estudiantes mostraron mucha rapidez en identificar e ingresar información por la ventana algebraica, sin que tenga alguno de ellos dificultad para este proceso.

6. En lo concerniente a **la resolución de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas mediante el Geogebra**, lo hicieron con mucha prontitud, identificando desde la gráfica si el sistema es consisten o no, ubicando con facilidad el punto que corresponde al conjunto solución en la ventana gráfica.

7. En cuanto al **reconocimiento de las formas de expresar en forma algebraica inecuaciones de primer grado con dos incógnitas**, reconocen con facilidad las desigualdades amplia y estricta, expresando la información proveniente de un problema en forma de una inecuación, también tratan de interpretar y analizar algunos puntos que pertenecen al conjunto solución.
8. Respecto a la **resolución de inecuaciones e primer grado con dos incógnitas**, todos ingresaron al Geogebra con suma facilidad las inecuaciones formuladas en la actividad, sólo dos estudiantes tuvieron dificultad en interpretar las gráficas que corresponden tanto a las desigualdades estrictas o amplias.
9. Respecto a la **identificación de la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas**, la mayoría de los estudiantes identificaron con facilidad el conjunto solución a partir de la gráfica de desigualdades, como intersección de las regiones determinadas por cada inecuación en particular.
10. En cuanto a la **interpretación de la solución algebraica y gráfica de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas**, sólo tres de los quince estudiantes tuvieron dificultad en interpretar el conjunto solución de un sistema de inecuaciones amplia y estricta.

B. Registro de resultados obtenidos en la actividad N° 5 y N° 6 mediados por programa PHPSimplex

A continuación se presenta los resultados de los estudiantes de las actividades 5 y 6, referidos a la resolución de problemas de maximización y minimización haciendo uso del PHPSimplex. En estas dos actividades que se desarrollaron se analizó las aptitudes y comportamiento de todo el grupo de estudiantes que fueron beneficiarios del uso de la tecnología para resolver problemas de optimización.

La información recogida directamente sobre el aprendizaje del tema de Programación Lineal de los estudiantes se resume en la tabla N° 13.

Tabla 13. Rúbrica de evaluación de la actividad de resolución de problema de programación lineal

N°	Indicadores	Estudiantes del quinto grado de Secundaria														
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
		Blanco	Bueno	Calero	Cielo	Colca	Estela	Herrera	Juani	Morrales	Navarro	Ñaupa	Pablo	Ponce	Ripa	Santiago
1	Organización de información	L	P	L	P	L	L	L	P	L	P	L	I	P	L	L
2	Identifica variables	L	P	L	I	L	L	L	P	L	P	L	P	I	P	L
3	Identifica restricciones	L	L	L	P	L	L	L	P	L	P	P	I	P	L	L
4	Identifica función objetivo	L	P	L	I	L	L	P	I	L	L	L	P	P	L	L
5	Gráfica la región factible	L	L	L	P	L	L	L	P	L	L	L	I	I	L	L
6	Identifica el tipo de optimización.	L	P	L	P	L	L	L	P	L	L	L	P	P	L	L
7	Identifica vértices de la región factible.	L	P	L	I	L	L	L	I	L	L	L	I	I	P	L
8	Evalúa la función objetivo en los vértices de la región factible.	L	L	L	P	L	L	L	L	L	L	L	L	P	L	L
9	Optimiza haciendo uso de la página PHPSimplex	L	L	L	P	L	L	L	L	L	L	L	P	I	L	L
10	Determina la cantidad óptima según el problema	L	L	L	P	L	L	L	P	L	L	L	P	P	L	L
	NOTA	**20**	**17**	**18**	**17**	**20**	**20**	**19**	**14**	**20**	**18**	**19**	**12**	**11**	**19**	**20**
	ESTADÍSTICOS	**Moda = 20, Media = 17,60, Desv.Est. = 2,971, C.V. = 16,88%**														

De la información que se observa en la tabla

1. Sólo dos estudiantes de los quince tuvieron cierta dificultad en la **organización de la información en la tabla**, mientras los trece estudiantes

restantes pudieron rellenar de manera correcta la información en la tabla que fue diseñada para la actividad.

2. En cuanto a **la identificación de variables**, sólo tres de los quince tuvieron rapidez en hacerlo, mientras los doce restantes sí pudieron traducir con facilidad las expresiones verbales descritas en el problema en lenguaje algebraico.

3. Sobre la **identificación de las restricciones**, la mayoría de los estudiantes después de una lectura detenida del problema, resumieron en forma acertada la función objetivo, a partir de los datos resumidos en la tabla del paso 1.

4. Referido a la **identificación de la función objetivo**, tuvieron dificultad en determinar el sentido de la desigualdad en el proceso de maximizar y minimizar, cinco estudiantes, pero después tuvieron oportunidad de nivelarse para antes de proceder a la resolución del problema por el método simplex y gráfico.

5. Referido a la realización de **la gráfica de la región factible**, sólo cuatro estudiantes tuvieron dificultad para realizar esta tarea, mientras el resto pudieron realizar con facilidad esta operación desde la información verbal.

6. En lo que respecta al tipo de **optimización a realizar**, la mayoría de los participantes tuvieron la facilidad de decidir de acuerdo al enunciado del problema; pues en ella se indica con claridad el proceso de maximización o minimización, según corresponda.

7. Respecto a la **identificación de los vértices de la región factible,** al realizar la actividad con lápiz en papel se observó que 10 de los estudiantes lo hicieron sin dificultad, mientras que cinco no tuvieron precisión en el trazado de las rectas y consecuentemente para extraer las coordenadas de los vértices. Pero al ingresar los datos del problema al PHPSimplex, luego de haber graficado los vértices de la región factible y sus correspondientes coordenadas fueron identificados a partir del cuadro resumen que exhibe el programa.

8. Respecto a la **evaluación de la función objetivo**, sólo un estudiante no pudo hacerlo con lápiz en papel, mientras los catorce restante lo hicieron con

suma facilidad, haciendo los reemplazos pertinentes en los vértices de la región factible (convexa); mostrando los valores y su representación gráfica.

9. Respecto al proceso de **Optimización con el PHPSimplex**, casi todos los estudiantes lo hicieron con suma facilidad tanto a través del método simplex como gráfico, una vez expresado el problema en su presentación algebraica; sólo dos de los participantes tuvieron dificultad en la manipulación de los comandos del programa por error de hardware.

10. En cuanto a la **determinación de la cantidad óptima**, sólo 3 estudiantes tuvieron dificultad al interpretar la respuesta obtenida, mientras los otros 12 estudiantes pudieron identificar con facilidad las cantidades que representan cada uno de los vértices haciendo la conversión de procesos algebraicos a gráficos, sin mucha dificultad.

4.3.5 Resultado del Test de Opinión

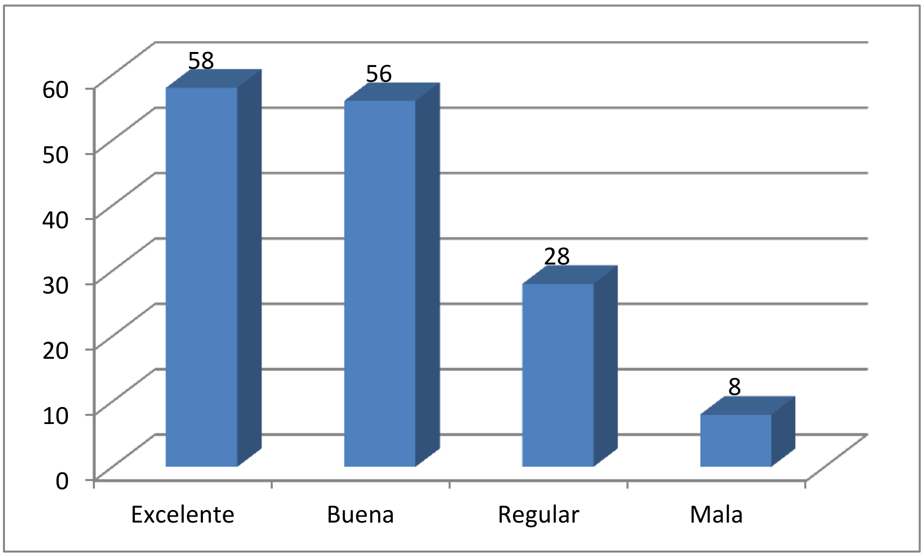
Durante el trabajo de campo, se observó que el temor de los estudiantes hacia los problemas matemáticos no radica en la falta de conocimientos para resolverlos, sino a ideas y actitudes negativas hacia la matemática en general cultivado durante su permanencia en la institución educativa, en la carencia de habilidades de comprensión lectora para identificar lo que se pide y en la falsa creencia de que con una sola lectura puedes estar capacitado para resolver cualquier problema. Por *ejemplo* para desarrollar una ecuación debe tener la idea clara de que se trata, para una inecuación de tener muy claro el tipo de desigualdad y cómo es su representación gráfica. Sin tener la idea clara de estos conceptos y algunas reglas para su resolución, se tendría una idea muy frágil para el desarrollo de problemas de programación lineal.

En las 20 preguntas de opinión (10 ítems sobre la enseñanza y 10 ítems sobre el aprendizaje) que se les formuló respecto a al uso del software Geogebra y el programa PHPSimplex en el estudio de la programación lineal, mayoritariamente respondieron en forma positiva a favor del uso de este recurso tecnológico, que repercutió en el grado de motivación hacia el aprendizaje de la matemática, debido a que la interacción con la computadora para el desarrollo de tareas matemáticas les fue muy novedoso, repercutiendo en su competencia matemática. Los resultados globales obtenidos se muestran en las tablas N° 14 y N° 15.

Tabla 14. Resultados del test de opinión referido al proceso de enseñanza de la programación lineal mediado por el Geogebra y el PHPSimplex.

Ítem	REACTIVOS				
	Excelente	Buena	Regular	Mala	Total
1	5	6	3	1	15
2	6	6	2	1	15
3	7	5	3	0	15
4	5	6	3	1	15
5	5	6	3	1	15
6	6	5	3	1	15
7	6	7	2	0	15
8	6	5	3	1	15
9	6	5	3	1	15
10	6	5	3	1	15
TOTAL	**58**	**56**	**28**	**8**	**150**
	38.67	**37.33**	**18.67**	**5.33**	**100.00**

Figura 27. Gráfica del test de opinión referido al proceso de enseñanza de la programación lineal mediado por el Geogebra y el PHPSimplex.

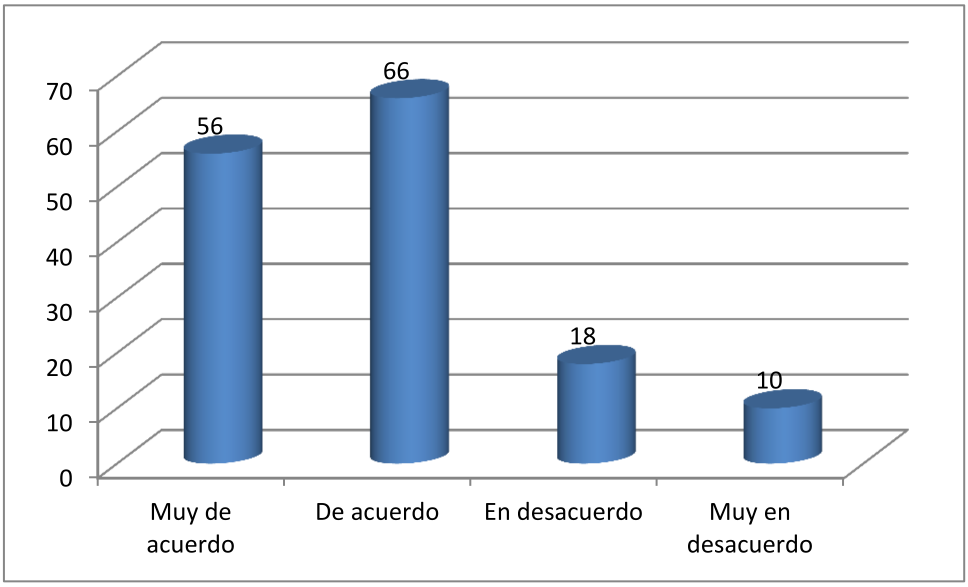


Según el resumen que se hace en la tabla N° 14 y su gráfica de la figura N° 27, la mayoría que representan el 38,67% de los estudiantes consideran como excelente la enseñanza recibida de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistema de inecuaciones de primer grado y programación lineal usando el Geogebra y el PHPSimplex; mientras que el 37,33% manifiestan que la enseñanza recibida fue buena; por otro lado el 18,67% cataloga a la enseñanza que recibió como regular, y sólo el 5,33% de los estudiantes manifestaron que la enseñanza de la profesora fue mala.

Tabla 15. Resultados del test de opinión referido al proceso de aprendizaje de la programación lineal mediado por el Geogebra y el PHPSimplex.

Ítem	REACTIVOS				Total
	Muy de acuerdo	De Acuerdo	En desacuerdo	Muy en desacuerdo	
11	6	5	2	2	15
12	5	7	2	1	15
13	5	7	2	1	15
14	6	7	2	0	15
15	6	7	1	1	15
16	5	6	2	2	15
17	6	6	2	1	15
18	6	8	1	0	15
19	5	7	2	1	15
20	6	6	2	1	15
Total	**56**	**66**	**18**	**10**	**150**
	37.33	**44.00**	**12.00**	**6.67**	**100.00**

Figura 28. Gráfica de test de opinión referido al proceso de aprendizaje de la programación lineal mediado por el Geogebra y el PHPSimplex.



Según el resumen que se hace en la tabla N° 15 y su gráfica N° 28, la mayoría que representan el 44,00% de los estudiantes están *de acuerdo* con su aprendizaje de la resolución de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistema de inecuaciones de primer grado y programación lineal usando el Geogebra y el PHPSimplex, mientras que el 37,33% manifiestan estar *muy de acuerdo* con su aprendizaje logrado; mientras que sólo el 18,67% de los estudiantes manifestaron estar *en desacuerdo* con el aprendizaje logrado en el estudio del tema mediado por herramientas de las TIC.

4.2.6. Cuestionario de satisfacción

La implementación de esta nueva estrategia didáctica, no sólo significa un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes sino que además demanda las modificaciones de algunas características de las clases teóricas y prácticas de la matemática, bajo esta premisa, se administra una encuesta de satisfacción, dividido en cuatro aspectos (contenidos, infraestructura, docente, estudiante), al concluir el trabajo de campo, cuyos resultados se detallan a continuación:

En los ítems referidos al **Nivel de satisfacción sobre el Contenido de la Unidad de Aprendizaje y grado de Cumplimiento,** 10 de los estudiantes que representan a la mayoría respondieron estar muy satisfechos respecto al desarrollo del tema por parte del docente con la participación activa de los estudiantes, los cinco estudiantes restantes consideran estar satisfechos.

Respecto a la **infraestructura disponible,** ocho de los estudiantes encuestados manifiestan estar satisfecho, cinco manifiestan estar poco satisfechos y sólo 2 nada satisfechos; debido a las restricciones no por la falencia de infraestructura, sino las respuestas que dieron los estudiantes se deben a las restricciones que se tiene para acceder al laboratorio de informática por la falta permanente de la encargada y falta de mantenimiento de los equipos de cómputo.

Respecto al **Desempeño del Profesor** en la clase de matemática haciendo uso de software matemático, once mostraron su satisfacción plena puesto que fue para ellos la primera experiencia de llevar una clase de matemática teniendo como herramienta software matemático; los cuatro restantes manifestaron que están satisfechos porque la profesora les explico el manejo del software para hallar el verdadero valor del ejercicio planteado.

En lo que se refieren a **su desempeño personal,** en los seis ítems planteados en esta sección, el 75% de los estudiantes encuestados consideran estar muy satisfechos, el 20% manifiestan estar satisfechos y sólo un 5%, expresa estar poco satisfecho. En global, podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes estuvieron de acuerdo con su aprendizaje del tema de inecuaciones y programación lineal mediado por el Geogebra y el PHPSimplex.

CAPITULO V

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La problemática actual de la matemática es su aprendizaje, es debido a ello que todas las personas vinculadas con este proceso buscan las formas o estilos de aprendizaje más eficaces y eficientes de la matemática. Pero las actividades matemáticas en la educación actual no pueden estar a expensas de actividades de solución de problemas porque éstas son las herramientas que permiten el acercamiento de los conocimientos de esta disciplina al mundo real. En esta sección, se menciona algunos comentarios comparativos de los hallazgos en la investigación realizada con la hipótesis de investigación, con los antecedentes, con las bases teóricas y las bases epistémicas formuladas en el proyecto.

Discusión con relación a la hipótesis

La hipótesis formulada para el proceso investigativo fue: *El diseño e implementación de una secuencia didáctica basada en el uso pertinente del software GeoGebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica mejora en forma significativa el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria*. Como confirmación a esta conjetura, los resultados obtenidos fueron alentadores y fortalecedores, porque el aprendizaje interactivo del tema en estudio, permitió que el aprendizaje sea motivado y muy significativo, acción que permitió el desarrollo de la capacidad de abstracción y raciocinio lógico-tecnológico en los estudiantes del quinto grado de secundaria. Con las actividades realizadas, el estudiante quedó ejercitado en respetar algunas pautas en el proceso de aprendizaje de la matemática: leer con atención el problema completo; identificar lo que se pide en el problema, traducirlo en el lenguaje algebraico, para luego comunicar en forma gráfica haciendo uso de una herramienta tecnológica.

La aplicación del método de Gauss-Jordan y el método grafico para la resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se tradujo en rectas y la intersección de rectas. La operatividad del método gráfico para resolver este tipo de sistemas consiste en representar en un sistema cartesiano ambas rectas y comprobar si se intersecan y si es así, dónde es la intersección, para ello se tiene el saber previo, que en el plano cartesiano, dos rectas sólo pueden tener tres posiciones relativas entre sí: se intersecan en un punto, son paralelos o son coincidentes; básicamente, aquí se entiende que, si se intersectan en un punto (x, y) y es la única solución del sistema; si son paralelas, no hay par ordenado, por lo tanto no hay solución; y, si son coincidentes, entonces hay infinitos puntos y como tal infinitas soluciones.

Discusión con relación a los Antecedentes

Tomando como referencia el trabajo de tesis realizado por Angulo, A. (2014) se afirma que la matemática constituye una herramienta para resolver problemas siendo la base de su perfil. Pero en la universidad se proporcionan pocas herramientas para el óptimo aprendizaje, siendo un reto para el docente universitario. El problema a investigar fue ¿Cómo influye la aplicación del software matemático en el aprendizaje de Cálculo 1 en los estudiantes indígenas en el segundo ciclo de la carrera profesional de ingeniería de Agroforestal Acuícola de la Universidad Intercultural de la Amazonía? El objetivo fue determinar la influencia de la aplicación del Software matemático en el aprendizaje de estos estudiantes, teniendo como muestra 40 personas. El diseño fue de dos grupos. Se usaron test, evaluando antes y después de la aplicación del software. Los datos se contrastaron mediante la prueba t Student de muestras pareadas con un nivel de significación 0,05. Los resultados indicaron que hubo una diferencia significativa en el aprendizaje de cálculo 1, y por lo tanto la aplicación del software tuvo efecto positivo en los estudiantes indígenas de ingeniería. La aplicación del software y las horas de práctica de cálculo 1 fueron determinantes para tener diferencia significativa entre el aprendizaje de los estudiantes al término de la aplicación del Software College Pre cálculo Solved.

Este antecedente tiene relación en cuanto al uso del software en el proceso didáctico; empero, en la metodología llevada en el proceso de trabajo de campo difiere de la experiencia realizada, toda vez que, en el presente trabajo el proceso de enseñanza-aprendizaje estuvo centrado en un estudio de la evolución del desarrollo de conocimientos conceptuales, procedimientos y actitudes que se manifiesta en los estudiantes como responsables de su propio aprendizaje (con la ayuda del profesor y la colaboración de sus compañeros, mediados por recursos de la TIC), así como de las reconstrucciones necesarias. Donde se privilegia la solución gráfica de problemas, que ha mostrado haber mejorado las concepciones de los estudiantes y proveerlos de nuevas estrategias para abordar problemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas que conducen a una mejor comprensión de los problemas de programación lineal. El alumno realiza estudio y autoestudio en forma sistemática retroalimentando el desarrollo de su pensamiento algebraico y geométrico en la resolución interactiva de ecuaciones, inecuaciones y problemas de optimización. Desarrollando un conjunto de habilidades tanto intelectuales y prácticas que le permitan, a partir de la imaginación, sintetizar en gráficos una situación dada para visualizar y explicar las características y propiedades matemáticas que llevan consigo las respuestas obtenidas.

Discusión referida a la base teórica

Teoría del **aprendizaje situado,** el concepto de ***"aprendizaje situado"*** (*situated learning,* Lave y Wenger, 1991) indica el carácter contextualizado del aprendizaje que no se reduce a las nociones convencionales de aprendizaje *in situ* o aprendizaje activo, sino a la participación del aprendiz en una comunidad de práctica; esto es, en un contexto cultural, social, de relaciones, del cual se obtiene los saberes necesarios para transformar la comunidad y transformarse a sí mismo, que transforma la concepción de los contextos de aprendizaje y de la interacción entre docentes y discentes así como una nueva visión de las relaciones de cooperación de los actores y agentes. Esta teoría sostiene que la adquisición de habilidades y el contexto sociocultural no pueden separarse. Es decir, el aprendizaje situado es un aprendizaje de conocimiento y habilidades en el contexto que se aplica a situaciones cotidianas reales.

Bajo la premisa descrita, el trabajo realizado tuvo como propósito generar una actitud positiva de los estudiantes desde el principio, que permita tanto su implicación progresiva en las tareas como el aumento de su responsabilidad, teniendo en cuenta el desarrollo de actividades dinámicas y debates matemáticos que se suscitaron en el proceso investigativo. La búsqueda de un equilibrio entre los momentos de trabajo grupal, las discusiones colectivas y sobre los resultados académicos han implicado en los alumnos actitudes positivas al estudio y aprendizaje de la matemática en general y de la programación lineal en particular. Esta situación apoya nuestra conjetura de que es posible hacer más eficaz y eficiente las actividades de aprendizaje haciendo uso de recursos tecnológicos.

Discusión referida a la base epistémica

Douady (1986) identifica "saber matemáticas" con ser capaces de usarlas en diferentes situaciones. Distingue dos posibles actitudes del alumno a instancia del profesor: si se dice qué hay que hacer, siendo posible comprender el enunciado del problema pero sin sugerir el método de solución, estamos considerando principalmente la matemática como herramienta; si se trata de conocer cómo las nociones están relacionadas desde un punto de vista científico cultural estamos considerando principalmente las matemáticas como objeto. Más adelante concreta "tener algún conocimiento de matemáticas" es ser capaz de implementar su empleo como una herramienta explícita en problemas a resolver.

La dimensión epistemológica nos permitió la reconstrucción de una secuencia que estuviera más acorde con la teoría de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal, tomando las nociones de generalización de soluciones y representación gráfica como elementos motivadores. De esta forma, se le dio un rol más activo a la solución de problema en forma gráfica y se pudo producir la génesis de resultados susceptibles de institucionalización a partir del estudio de situaciones gráficas. La idea de región factible permitió recurrir a la teoría geométrica de convexidad y acotación, para generalizar resultados y construir contraejemplos a ciertas intuiciones erróneas y obstáculos que surgen al extender la noción de área (y volumen) al campo de figuras no acotadas.

Mediante el estudio de la dimensión didáctica se pudo analizar la evolución de los programas curriculares de educación secundaria de la región y el país, encontrándose algunas explicaciones sobre estrategias didácticas que habitualmente se enseña de ecuaciones, inecuaciones y de programación lineal (algunas motivadas, posiblemente, por la propia evolución histórica del concepto).

El estudio de la dimensión cognitiva nos permitió evaluar el aprendizaje de las ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y de programación lineal en el quinto grado de educación secundaria y realizar una primera clasificación de las dificultades y bondades que este aprendizaje puede generar. Teniendo en cuenta la revisión de investigaciones más o menos recientes sobre la importancia de la visualización, la construcción de ejemplos, las interacciones en la clase, el aprendizaje no algorítmico y algunas dificultades ligadas al proceso de optimización, y basándonos en las dos dimensiones anteriores, se pudo diseñar una secuencia didáctica mediado por el Geogebra y PHPSimplex hacia el aprendizaje eficaz y eficiente de la programación lineal. Teniendo en cuenta que el uso del software como mediador del aprendizaje gráfico del tema en forma más activa durante el proceso de estudio a través de actividades con problemas contextualizados, previamente diseñados.

Aporte de la investigación

Con el trabajo desarrollado, se puso en práctica la enseñanza interactiva de ecuaciones e inecuaciones con un nuevo recurso didáctico a partir del cual se puedan abordar de manera simple pero con el rigor matemático necesario, los contenidos relacionados con la resolución algebraica y gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Por medio del aporte de la tecnología a la enseñanza de matemática básica, se pueden incluir la animación, la dinámica y la interactividad necesaria con el objetivo de facilitar y mejorar la enseñanza de las ecuaciones, inecuaciones y programación lineal así también su aprendizaje. Estos valiosos elementos, harán de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática una actividad confortante y constructiva, reemplazando la monotonía de realizar cálculos y aplicar fórmulas de forma mecánica, muchas veces sin comprender la esencia del método que se está aplicando debido a que no se tiene la posibilidad de visualizar el funcionamiento gráfico de los mismos, como tampoco la de comparar y analizar los resultados obtenidos en las diferentes interacciones, anteriores o posteriores.

Actualmente el software libre y páginas de internet juegan un rol primordial en la enseñanza y el aprendizaje de los diferentes tópicos de la matemática, en los distintos niveles educativos. Con la finalidad de aportar su velocidad y exactitud para la realización de cálculos algebraicos y gráficos. Con el del trabajo, se pretende lograr que el alumno pueda aprender en forma significativa los contenidos propuestos, sumándole a la velocidad y exactitud de cálculos, la interactividad y visualización gráfica. Puesto los recursos informáticos facilitan y se convierten en una importante herramienta para el logro de un aprendizaje significativo que se exprese en lo conceptual, procedimental y actitudinal.

Con la implementación de la estrategia didáctica propuesta, se logra un ambiente de enseñanza y aprendizaje en el cual interactúen docentes, alumnos y software. Insertando una metodología de aprendizaje a partir de la incorporación de tecnología, no sólo como un recurso facilitador de los cálculos necesarios sino además, como una herramienta capaz de actuar sobre el proceso de aprendizaje del alumno, permitiéndole seguir su propio ritmo de aprendizaje sin depender de aquel que la clase tradicional impone.

La posibilidad de que alumnos de educación secundaria, incorporen en sus actividades herramientas tecnológicas, constituye una experiencia indispensable en su formación integral como persona. Los alumnos del quinto grado, muchos de ellos futuros profesionales, experimentan desde ya los beneficios y los diferentes aspectos metodológicos de la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en sus actividades como alumnos. Esta experiencia constituirá sin duda, una herramienta fundamental para la incorporación de las TIC en su actividad docente; pues podrá mejorar su actividad considerando los beneficios que trae aparejado la utilización de un software educativo, tales como: ahorro de tiempo a la hora de presentar un material o tema, mayor estética al momento de la presentación de la clase, incremento de la motivación y la atención al presentar un determinado material, aumento de la velocidad para el desarrollo de la clase (Murillo, 2003).

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta las situaciones de aprendizaje ejecutadas a través de las seis sesiones con sus respectivas actividades, se puede concluir con objetividad, que:

1. La estrategia de enseñanza de programación lineal mediado por el software Geogebra y PHPSimplex, sirvió como una forma de llevar a cabo un seguimiento de las actividades y conceptos referidos al proceso de optimización, a través del diseño e implementación de actividades para el desarrollo de problemas en forma algebraica y gráfica, mejorando en forma significativa el aprendizaje en los alumnos del quinto grado de secundaria, como indican los resultados de las rúbricas, test de opinión y cuestionario de satisfacción.

2. La implementación de actividades didácticas basadas en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex influye significativamente en el proceso de aprendizaje conceptual haciendo que los alumnos refuercen en forma significativa los conceptos referidos a ecuaciones, inecuaciones y el proceso de optimización, realizando con solvencia la gráfica de rectas, semiplanos e identificando la región factible para sobre ella evaluar la función objetivo; como se muestra en los resultados de las dos rúbricas, tablas 12 y 13, donde las medias son 17,4 y 17,6, respectivamente.

3. La aplicación de la estrategia didáctica basada en el uso del software GeoGebra y la página PHPSimplex a través de representación algebraica y gráfica repercute en el aprendizaje procedimental a través del manejo de algoritmos, estrategias de resolución de problemas y el uso pertinente de recursos didácticos, comparación de resultados y comprobación de soluciones de problemas de programación lineal en los alumnos del quinto grado de secundaria, como se muestra en los resultados de las dos rúbricas, tablas 12 y 13, con coeficientes de variación son 16,23% y 16,88%, respectivamente.

4. A través de la investigación se pudo verificar la iniciativa, las decisiones, empeño, valoración de resultados y la predisposición para el trabajo en equipo durante las actividades realizadas, orientados al desarrollo de competencias al aprendizaje para el tema de programación lineal, mostrando destrezas y habilidades en el uso y manejo del Geogebra y PHPSimplex en la resolución de problemas diversos de Programación Lineal; según respuestas al test de opinión con más del 76% con opinión favorable al proceso de enseñanza llevado a cabo y con más del 80% con opinión favorable al aprendizaje haciendo uso de la tecnología; asimismo más del 90% muestran su satisfacción por modelo didáctico implementado.

SUGERENCIAS

De la experiencia realizada y los resultados obtenidos, es conveniente sugerir a los docentes del área de matemática del nivel de educación secundaria y de otros niveles educativos, así como al personal directivo, impulsen:

1. El desarrollo de problemas contextualizados al entorno y su resolución en forma algebraica y gráfica utilizando herramientas tecnológicas (Geogebra y PHPSimplex) como recursos didácticos para el desarrollo de su creatividad, la participación activa mostrando actitudes y valores positivos hacia el aprendizaje de la matemática.
2. El aprendizaje interactivo y colaborativo de la matemática a través del uso de software especializados, desarrollando su pensamiento creativo, con el objetivo de aprender y aplicar de una manera eficiente en la resolución algebraica y gráfica de los problemas de ecuaciones, inecuaciones y de optimización.
3. Programas de capacitación docente con la finalidad de que usen software libre como herramienta mediador y dinamizador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, poniéndose acorde a la expectativa de los estudiantes que son nativos digitales.
4. Una visión prospectiva de cara a la fuerte expansión que se avizora en el futuro inmediato del empleo de las TAC-TEC en educación, para revertir la tendencia actual de continuar en la lógica de los modelos educativos propios de la educación presencial de corte transmisivo-receptivo. Rompiendo paradigmas educativos actuales, que conduzca a una integración entre los avances y usos novedosos de las tecnologías con enfoques provenientes de disciplinas como la pedagogía digital, orientados al aprendizaje de la matemática.
5. Inserción de modelos innovadores es un espacio abierto a la investigación educativa, donde también hay una tarea de innovación que acometer. Sin quedarse sólo en el plano del desarrollo modélico idealizado, construyendo una agenda de investigación que abarque nuevos objetos de estudio, métodos e instrumentos originales para estudiar de primera mano la realidad educativa en torno a procesos, sistemas y agentes involucrados en experiencias de aprendizaje soportadas por la tecnología.

BIBLIOGRAFÍA

A. Fuentes impresas

[1]. Adreu, R. & Otros (2001) *Estrategia y Sistemas de Información.* Madrid: Instituto de estudios Superiores de Empresa.

[2]. Alba, O. et al. (2009) *Aproximaciones teórico-metodológicas del estudio de profundización en la evaluación de la calidad educativa. Ponencia*. La Habana, Congreso Internacional Pedagogía 2009.

[3]. Angulo, A. (2014), *Aplicación de Software Matemático en el Aprendizaje de Cálculo* 1 en los estudiantes de ingeniería agroindustrial de la Universidad Intercultural de la Amazonía… (tesis de maestría). Universidad Nacional Hermilio Valdizán.

[4]. Ary, D. & Cheser, L., (1989) *Introducción a la investigación pedagógica*. México: McGRAW-Hill Interamericana S.A.

[5]. Belllo, J. (2013) Mediación del software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria. Lima: PUCP

[6]. Beltrán, J. & Genovard, C. (1993). *Estrategias de aprendizaje y Psicología de la Instrucción I. Variables y procesos básicos.* Madrid: Síntesis.

[7]. Cabero, J. (1999). *Tecnología educativa* (edición uno)**.** Editorial Síntesis, S. A. España.

[8]. Carrasco, B. (1995) *Cómo aprender mejor. Estrategias de aprendizajes.* Rialp. Madrid.

[9]. Dansereau, D. (1985). *Estrategias Efectivas de Aprendizaje*. Barcelona: Ediciones Dominí.

[10]. Díaz, R. (2014). *La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software Geogebra en estudiantes de quinto de secundaria*. Lima: PUCP.

[11]. Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una Empresa Docente. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

[12]. Eliot, J. (1994) *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

[13]. Flick, U. (2004) *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

[14]. Flórez, R. (1996). *Hacia una pedagogía del conocimiento***.** Bogotá: McGraw-Hill Interamericana, S.A.

[15]. Gallego, R. & Pérez, R. (2004). *Discurso sobre el Constructivismo***.** Bogotá: Editorial Magisterio. Serie Mesa Redonda.

[16]. Galvez, R. (2008) *Matemática para el Quinto Grado de Secundaria. Manual del Docente*. Lima: Minedu.

[17]. García Hoz, V. (1995) *La personalización educativa en la sociedad informatizada.* Madrid: Rialp, S.A.

[18]. Godino, J. (2003) *Perspectiva de la didáctica de las Matemáticas como disciplina científica.* [Documento en línea]. Disponible: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teóricos/01_PerspectivaDM.pdf [Consulta: 2015, abril 7]

[19]. Gómez, A. (2007). *La Evaluación en las actividades de aprendizaje con uso de tecnología*. (Tesis de maestría). IPN, México D.F.

[20]. Grossman, S. (1992a). *Álgebra Lineal, Tercera Edición en Español*. México, D.F.: Impresora y Maquiladora de Libros MIG. S.A.

[21]. Grossman, S. (1992b). *Aplicaciones de Álgebra Lineal, Cuarta Edición en Español*. México. México, D.F.: Graf América.

[22]. Guzmán, M (2001). *La enseñanza de las ciencias y la Matemática*. Madrid: Popular.

[23]. Haeussler, E. (1997) *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México D.F. Edit. Prentice-Hall Hispanoamericana.

[24]. Joo, B. (2008) *Repositorio Digital. Análisis y propuesta de la gestión pedagógica y administrativa de las TIC*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

[25]. Kemmis, S. & Mctaggart, R. (1998): *The Action Research Planner.* Deakin Australia: Victoria University, terccera edición.

[26]. Miles, M. B. y Huberman, A.M. (1994) *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook.* Thousand Oaks, CA: Sage.

[27]. Moreno, O. (2011). *Un estudio Didáctico de los Sistemas de inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal en el Instituto superior tecnológico Público ¨Simón Bolívar¨*. (Tesis de maestría). Universidad PUCP, Lima, Perú.

[28]. Kilpatrick, J. & Gomez, P. (1998) *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia.* Bogotá: una empresa docente.

[29]. Kilpatrick, J. (1998) *Valoración de la investigación didáctica de las matemáticas: más allá del valor aparente.* En Puig, L. (Ed.). *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación matemática.* Bogotá: una empresa docente, pp. 17-31.

[30]. Lipchutz, S. (1978) *Matemáticas finitas*. México D.F.: McGRAW HILL.

[31]. Ministerio de Educación del Perú. MINEDU (2012a). *Matemática* 5. Lima, Perú: Santillana S. A.

[32]. Miles, M. B. y Huberman, A.M. (1994) *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook.* Thousand Oaks, CA: Sage.

[33]. Mora, D. (2002). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca Central.

[34]. Moreno, O. (2011). *Un estudio Didáctico de los Sistemas de inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal en el Instituto superior tecnológico Público ¨Simón Bolívar¨*. (Tesis de maestría). Universidad PUCP, Lima, Perú.

[35]. Polit, D.; Hungler, B. (2000) *Diseño y métodos de investigación cualitativa.* México: McGraw-Hill Iberoamericana.

[36]. Reaño, C. (2011). Sistema de Inecuaciones lineales con dos incógnitas y problemas de programación lineal. Una mirada desde la teoría de las situaciones didácticas. (Tesis maestría). Lima: PUCP.

[37]. Rico, Luis. (1990). *Diseño curricular en Educación Matemática: elementos y evaluación.* En Llinares S. y Sánchez M. V. (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*. Madrid: Alfar.

[38]. Rico, L.; Sierra, M. y Castro, E. (1999) *Didáctica de la matemática.* En Rico, L. y Madrid, D. (edts). *Las disciplinas didácticas entre las ciencias de la educación y las áreas curriculares.* Madrid: Editorial Síntesis.

[39]. Sánchez, I. & López, S. (1999) Didáctica de la programación lineal con ordenador para estudiantes de administración y dirección de empresas. *Revista de Enseñanza Universitaria 1999*, N° 14-15, 129-138.

[40]. Sierra Bravo, R. (2007) *Metodología y Técnicas de Investigación Social.* Madrid: Editorial Thomson.

[41]. Stenhouse, L. (1993): *La investigación como base de la enseñanza.* Madrid, Ediciones Morata.

[42]. Strausss, A. & Corbin, J. (1998) *Bases de la Investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Editorial de la universidad de Antioquia.

[43]. Taborda, J. (2010). *Programación lineal, historia*. Recuperado de: *taboxriveras.blogspot.com/2010/09/**historia**.html*.

[44]. Tójar, J. (2006) *Investigación cualitativa comprender y actuar*. Madrid: Editorial la Muralla.

[45]. Watson, A. & Mason, J. H. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples,* Mahwah, NJ, USA, Lawrence Erlbaum Associates.

B. Fuentes electrónicas

[1]. Castillo, A. (2015) *El liderazgo y autoestima de los alumnos*. http://www.monografias.com/trabajos106/liderazgo-y-baja-autoestima-alumnos/liderazgo-y-baja-autoestima-alumnos2.shtml

[2]. Faulin, J. (s/f) *Aplicaciones de la programación lineal*. Recuperado el 15 de setiembre del 2015, de http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/ Aplicaciones_PL.pdf.

[3]. Figueiredo et al (2012) La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. Documento en línea disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci _arttext&pid =S1665-58262012000100004 (consulta 15 de noviembre de 2016)

[4]. García J. (2007) *Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación en el Instituto Universitario del Cauca.* Colombia [Documento en línea] Disponible: http: profes.net [Consulta: 2007 junio, 21]

[5]. Losada, R. (2012). *GeoGebra en la enseñanza de la matemática*. Recuperado de http://geogebra.es/cvg/presentacion/intro.html.

[6]. Méndez, J. (2012). *Pautas y criterios para el análisis y evaluación de materiales Curriculares.* Universidad de Huelva, España. Recuperado de http://www.uhu.es/agora/version01/digital /números/02/02articulos/monografico/me ndez.htm.

[7]. MINEDU. (2009). *Diseño Curricular Nacional de la educación Básica Regula.* Lima, Perú: Word Color Perú S.A. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

[8]. MINEDU. (2012a). *5 Matemática*. Lima, Perú: Santillana S. A. Ministerio de Educación del Perú. MINEDU (2012b). *Marco del buen desempeño docente* Recuperado de http://www. perueduca.pe/web/desarrollo-docente/marco-del-buen-desempeno-docente

[9]. Murillo, P. (2003) *Normas y criterios para la evaluación de software educativos de matemática*. En línea en http://www.utp.ac.pa/articulos/ normascriterios.htm

[10]. Marqués, P. (2000) *Impacto de la TIC en educación: funciones y limitaciones*. Htpp://Dewey.uab.es/pmarques/siyedu.htm.

[11]. Paiva, S. (2008). *A programação linear no ensino Secundário. Universidade Portucalense Infante D. Henrique Departamento del novação, Ciência e Tecnología.* (Dissertação do grau de Mestre em matemática/ Educação). UPIDH, Lisboa, Portugal. Recuperado de http://repositorio.uportu.pt/ dspace/handle/123456789/62?mode=full.

[11]. Sancho, J. (2006) *Tecnologías para transformar la educación.* En http://www.canarias-di- gital.org/plan/*pdf*/ pdsic.*pdf*.

[12]. UNESCO. (2004). *División de Educación Superior ”Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente”.* Disponible en http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129533s.pdf

[13]. Urbina, S. (1999). *Informática y teorías del aprendizaje.* Universitat de les Illes Ballears. Disponible en: http://www.sav.us.es/ pixelbit/pixelbit/ articulos/n12/n12art/art128.htm. (Consultado 05-08)

[14]. Vílchez, E. (2005). *Impacto de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación para la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior*. Universidad Nacional Escuela de Matemática Centro de Investigación y Docencia en Educación. Revista Digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr), Volumen 7, número 2. Costa Rica. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV7_ n2_2006/IMPACTO/ImpactoNuevasTec.pdf (Consultado 05-08-15)

ANEXOS

ANEXO 1: Actividades de aprendizaje llevados a cabo en el proceso experimental

I.E. HUANCANYACU
Docente: Julia Ángela Ramón

ACTIVIDAD Nº 1

Apellidos y Nombres:---
Tema: Ecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas

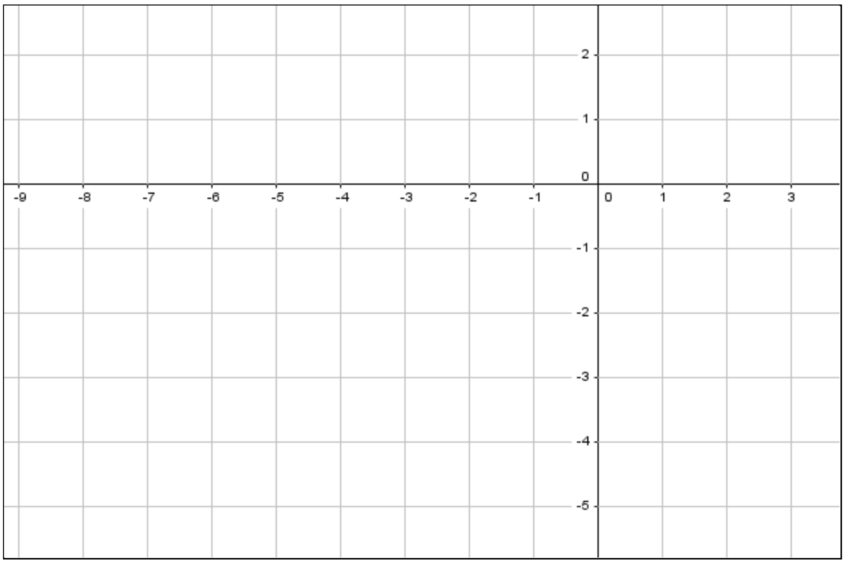
Estimado alumno, el desarrollo de la presente actividad será en dos partes la primera parte solo utilizaras lápiz y papel y en la segunda utilizaras el software Geogebra

1 Primera Parte: trabajando con lápiz y papel

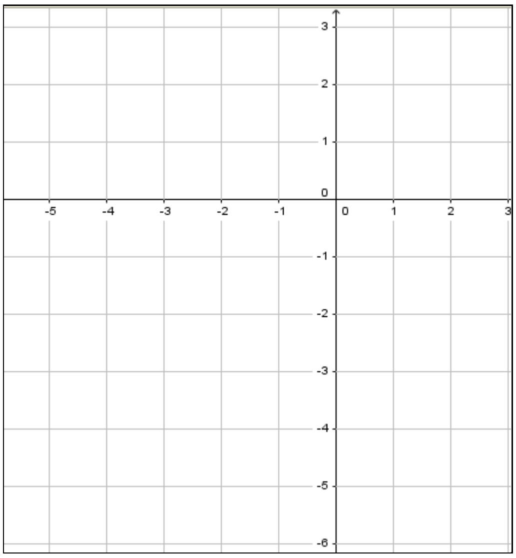
a) Completa los siguientes cuadros

<table>
<tr><th>Rectas</th><th>Selección de puntos</th><th>Tabulación</th><th>Pares ordenados</th></tr>
<tr><td>A: x+2y=-8</td><td>Puntos interceptos
Si x=0, entonces y=
Si y=0, entonces x=</td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table></td><td>A=(,)
B=(,)</td></tr>
<tr><td>B: 2x+y=-7</td><td>Otros valores
Si x=1.5 entonces y=
Si y=1.8, entonces y=</td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>1,5</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1.8</td></tr></table></td><td>C=(,)
D=(,)</td></tr>
</table>

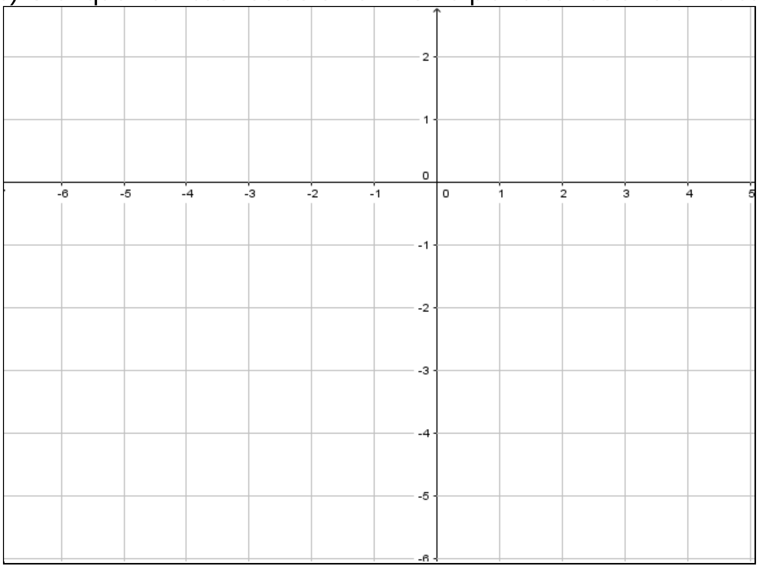
b)Grafica cada ecuación en la tabla
Gráfica de Ecuación A



Gráfica la Ecuación B



c) Grafiquen ambas rectas en el mismo plano cartesiano e indica la solución en forma gráfica



2 <u>Segunda Parte</u>: Trabajando con GeoGebra

Puntos en el plano

Sean las siguientes coordenadas de los puntos:

A=(0 ; 7) B=(-2; 4) C=(2.5 ; 3) D=(4.3; 7.5)

a) Habrá GeoGebra

b) Ubíquese en la ventana gráfica y cuadricule la ventana

c) Haz clic en  y gráfica manualmente los puntos A, B, C, D en la ventana gráfica

d) Tienes problemas en ubicar los puntos?, entonces

e) Ingresa los puntos por la ventana de entrada (los números decimales se ingresan con punto, la coma se usa para separar las componentes del par ordenado)

<u>Rectas en el Plano</u>

a) Graficaremos rectas con el comando  rectas – dos puntos

b) Grafica rectas a y b, c y d simultáneamente usando la ventana de entrada

Recta a: 2x-3y=9

Recta b: 3x +2y=-15

Recta c: 3x-2y=4

Recta d: x+3y=5

c) ¿Cómo ubicas el punto de intersección de las rectas a y b, y c y d?

I.E. "HUANCANYACU"

Docente: Julia Ángela Ramón

ACTIVIDAD N° 2-A

Apellidos y Nombres:--

Tema: Sistema de Ecuaciones Lineales

En esta actividad querido alumno realizaras un trabajo mixto con lápiz y papel, y GeoGebra centrándonos en la elaboración de la gráfica de un Sistema de Ecuaciones Lineales a partir de un problema.

1) Aplicar el método de Operaciones Elementales con filas en Matriz Aumentada y graficar con Geogebra a los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$

2. Un comerciante de chirimoyas gana 0,3 céntimos por cada chirimoya en buen estado pero pierde 0,4 céntimos por cada chirimoya en mal estado. Un día en el que cosecho 2100 chirimoyas obtuvo un beneficio de 484,4 soles ¿Cuántas chirimoyas en buen estado y cuantas chirimoyas en mal estado obtuvo?

a) Datos:

X:……

Y:……..

b) Planteamos el Sistema de Ecuaciones Lineales (Lenguaje algebraico)

c) Aplicamos método de Operaciones Elementales con filas en Matriz Aumentada

d) Graficar con GeoGebra e identifica la solución

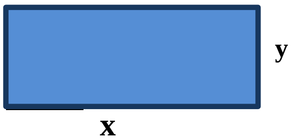
I.E. “HUANCANYACU”
Docente: Julia Ángela Ramón

ACTIVIDAD Nº 2-B

Apellidos y Nombres:---
Tema: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas

En esta actividad querido alumno realizaras un trabajo mixto con lápiz y papel, y GeoGebra centrándonos en la elaboración de la gráfica de un Sistema de Ecuaciones Lineales a partir de un problema.

1) El perímetro de la chacra de Pilar es 64 cm. Y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6cm. Calcula las dimensiones de dicho terreno.



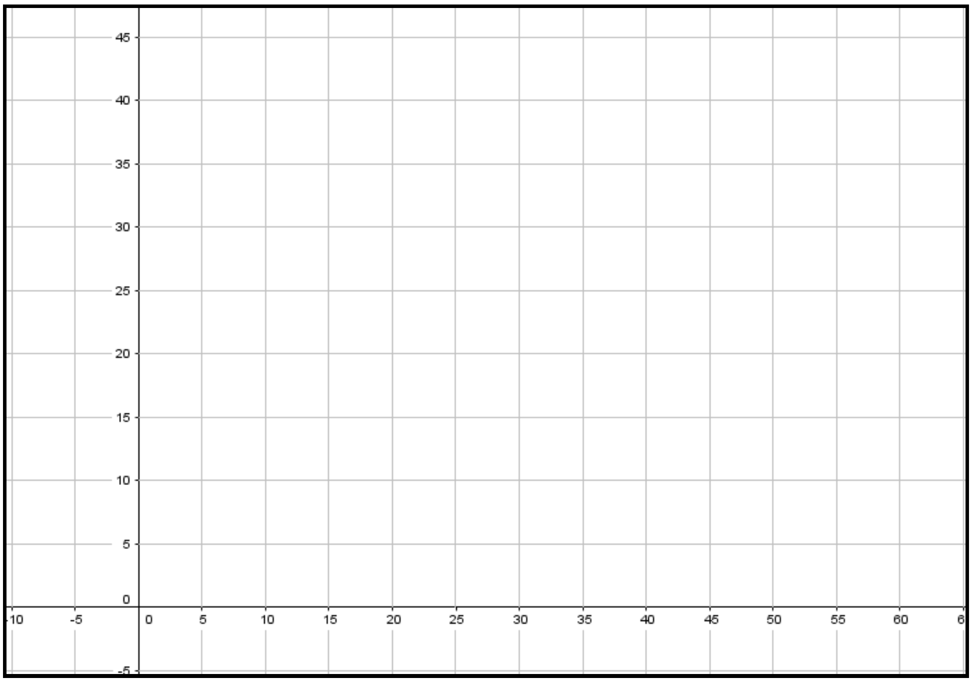
Largo:…………
Ancho:…………..

<u>Planteamos el sistema de Ecuaciones</u> (Traducimos al lenguaje algebraico)

Resolvemos el sistema por el método de Gauss-Jordan (operaciones elementales con filas)

Graficamos con GeoGebra
-Abra Geogebra
-Cuadricula la ventana gráfica 

-Introduzca los datos por la ventana de entrada
-Halla la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos variables usando el comando **intersección de dos objetos** 



2) Dos kilos de muquicho y tres de lucma cuestan 7,80 soles. Cinco kilos de muquicho y cuatro de lucma cuestan 13,20 soles. ¿A cómo está el kilo de muquicho y el de lucma?¿Cual conviene comprar?¿Que fruta tiene más alimento?

<u>Datos</u>: Precio de Muquicho:….
Precio de Lucma:…….

<u>Planteamos el Sistema de Ecuaciones</u> (traducimos al lenguaje algebraico)

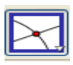
<u>Resolvemos</u> el sistema por el método de Gauss-Jordan (operaciones elementales con filas en la matriz aumentada)

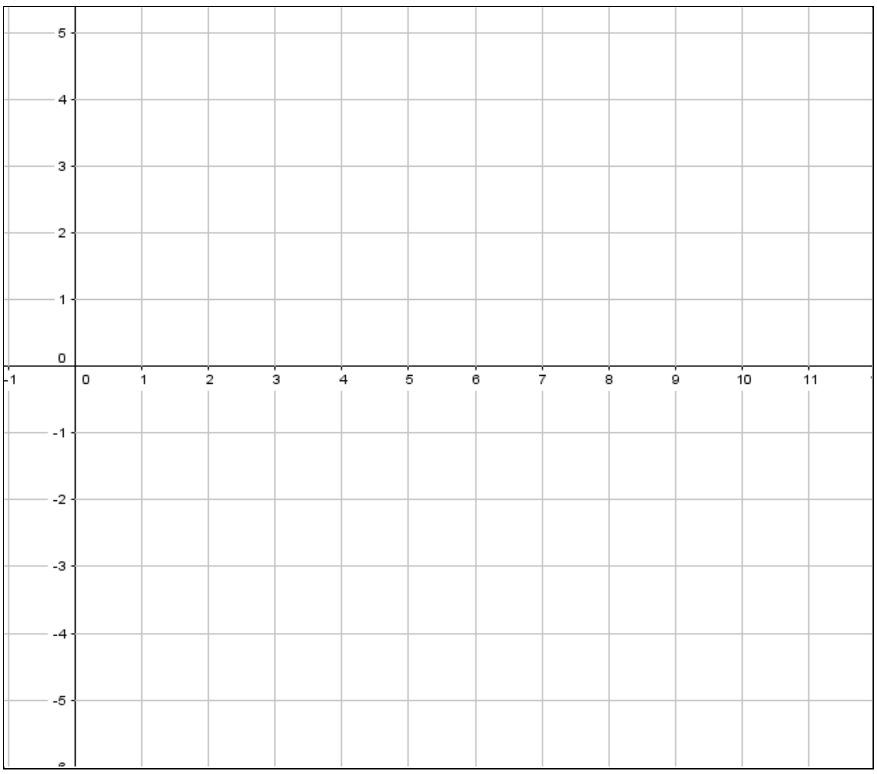
<u>Graficamos con GeoGebra</u>

-Abrimos GeoGebra

-Cuadriculamos la ventana grafica 

-Introduzca las ecuaciones de las rectas

--Ubique los puntos de intersección de las rectas 



3) La mamá de Carmen prepara cada día mañana mazamorra de tocosh y jugo de papaya para la dieta de su hija que está con sobrepeso. Si come un plato de mazamorra de tocosh y toma un vaso de jugo de papaya, ambos le proporcionan 140 calorías; pero si come tres platos de mazamorra de tocosh y 3 vasos de jugo de papaya al día le proporcionarán 420 calorías. Se sabe que 100 gramos de tocos proporcionan 40 calorías y que 100 gramos de papaya proporcionan 30 calorías. ¿Cuántas calorías le proporciona el plato de tocosh? ¿Cuántas calorías le proporciona el vaso de jugo de papaya?¿Cuántos gramos de tocosh contiene la mazamorra? ¿Cuántos gramos de papaya contiene el vaso de jugo?

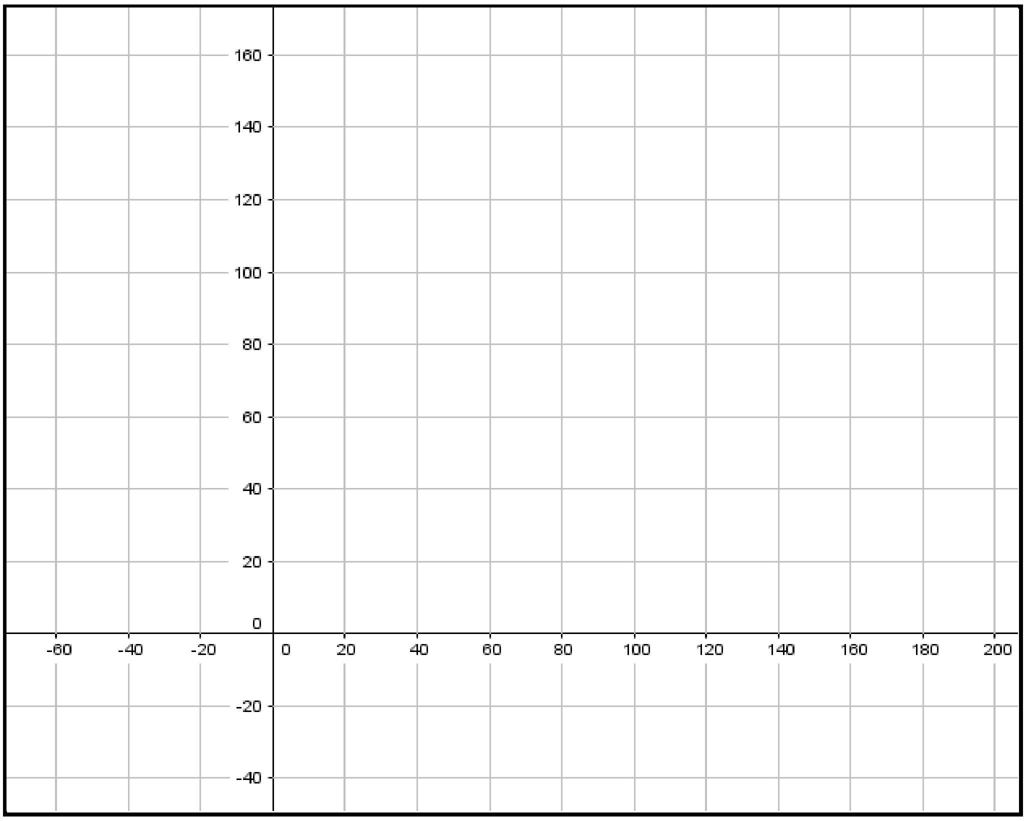
<u>Datos</u>

Mazamorra de tocosh:……

Jugo de papaya:……….

<u>Planteamos el Sistema de Ecuaciones</u> (traducimos al lenguaje algebraico)

<u>Graficamos con GeoGebra</u>:
Hallamos la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos variables, usando la ventana de entrada y el comando de intersección de dos objetos 



4) Que comentario harías al método utilizado para graficar el punto de intersección entre las dos rectas. Escribe tu comentario sobre esta actividad con el uso de GeoGebra:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

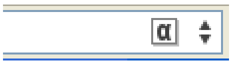
…………………………………………………………………………………………………

I.E. HUANCANYACU
Docente: Julia Ángela Ramón Ortiz

ACTIVIDAD Nº 3

Apellidos y nombres………………………………………………………………………………
Tema: Inecuaciones y Sistema de Inecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas

Estimado alumno, en el desarrollo de esta actividad, realizaras un trabajo combinado con el uso de lápiz y papel, luego con GeoGebra; también realizarás un aporte mediante tus comentarios con respecto a la actividad realizada.

1. Abre GeoGebra
2. Cuadricula la ventana gráfica
3. En esta parte usaremos  Símbolo matemático, con los símbolos ≥ , ≤ y >, <
4. Grafica las siguientes ecuaciones e inecuaciones lineales con dos variables, ingresa cada ecuación o inecuación que aparece 

por la ventana de entrada luego responde a la pregunta que se fórmula.
5.

ECUACIONES LINEALES	INECUACIONES LINEALES	
Usando símbolo =	Usando símbolo > , <	Usando símbolo ≥ , ≤
En y= 3 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________	y < 3 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua __________	y ≤ 3 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua __________
En y = x – 3 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________	En y < x – 3 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua __________	En y ≤ x – 3 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua __________

En y=-5 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________________	En y>-5 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua. __________________	En y≥-5 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua. __________________
En x+ 2y =4 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________________	En x+ 2y >4 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua. __________________	En x+ 2y ≥4 ¿Cómo es la gráfica que se obtiene líneas o regiones del plano? __________________ ¿Qué más observas en la gráfica? La línea al borde de la región en la frontera es entrecortada o continua. __________________

6. ¿Podrías establecer diferencias entre las gráficas de las ecuaciones y las inecuaciones, ambas de primer grado y con dos variables?
   ____
   ____
7. ¿Podrías establecer las diferencias que existen entre las gráficas de las inecuaciones estrictas con los símbolos > , < con las inecuaciones con los símbolos ≥ , ≤
   ____
   ____

Trabajando con lápiz y papel

8. Un agricultor cobra 50 céntimos por cada planta de papa que coseche y 10 céntimos por cada planta de zanahoria que extraiga. ¿Cuántas plantas de papa y de Zanahoria tendría que cosechar para ganar un jornal menos de 20 soles por día?

   <u>Datos</u>
   Planta de papa:………….
   Planta de zanahoria:………..

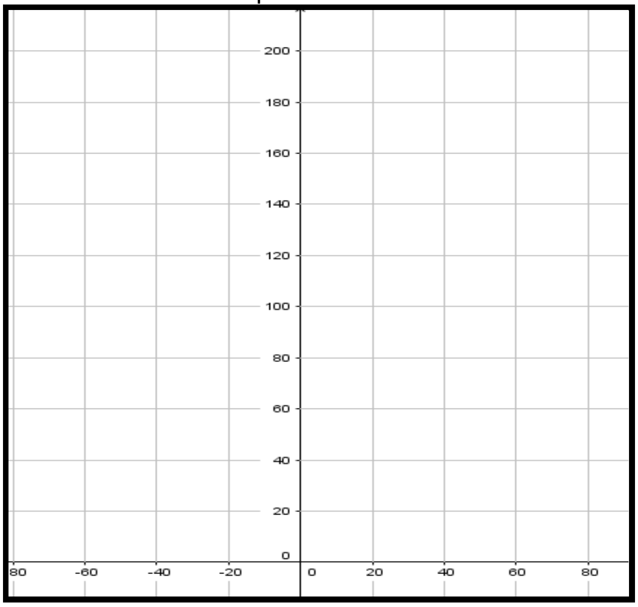
   <u>Planteamiento de la inecuación</u> (traducción al lenguaje algebraico)

…………………………………………………………………………………………..

9. Tabulando en los interceptos (recuerda que tienes que cambiar el símbolo de la inecuación por la igualdad) ....=…………

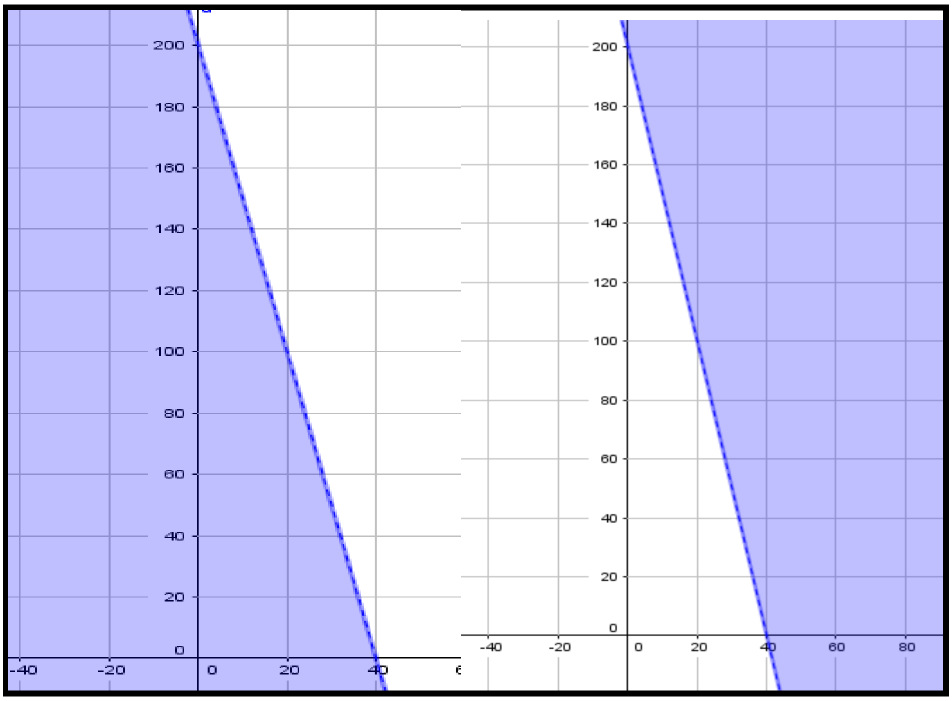
x	y
0	
	0

10. Gráfica la recta en el plano cartesiano: ……..=……



11. Se tiene dos regiones cuál de ellas es la respuesta correcta de la inecuación

Región a Región b



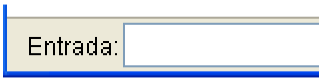
12. Para saber la respuesta correcta debemos ubicar un punto de prueba (x, y) que puede estar debajo o arriba de la línea entrecortada
Luego evaluar este punto en la inecuación

Si la respuesta es Verdadera, se escoge esa región sombreada a la que pertenece el punto de prueba, pero si la respuesta es Falsa se escoge la región sombreada contraria al punto de prueba.

13. TRABAJANDO CON GEOGEBRA

-Abre GeoGebra

-Cuadricula la ventana grafica 

-Grafica las inecuaciones en el plano cartesiano, usando la ventana de entrada 

del Geogebra

13.1 Grafique la región que satisface las desigualdades siguiente $\begin{cases} x - y > 4 \\ 3x + 2y \leq 3 \end{cases}$

-Cuantas regiones poligonales convexas se formaron
…………………………………………………………………………………………………
-Haz clic en las regiones poligonales convexas
-¿En qué región aparecen las dos regiones marcadas es decir la intersección de ellas?
-La región obtenida es un polígono convexo?
……………………………………………………

13.2 Cierra el archivo y abre otro en GeoGebra
13.3 Grafica el sistema de tres inecuaciones lineales con dos variables

$$\begin{cases} 2x + y > 3 \\ x \geq y \\ 2y - 1 > 0 \end{cases}$$

-Cuántas regiones poligonales se forman…………………………………………………………
-Haz clic en las regiones poligonales
-¿En qué región aparecen las tres regiones sombreadas es decir la intersección de ellas?
-La región obtenida es un polígono convexo?. …………………………………………………

13.4 Cierra el archivo y abre otro en GeoGebra
13.5 Grafica el sistema de cuatro inecuaciones lineales con dos variables

$$\begin{cases} y \leq 7 \\ 3x - y \leq 3 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

-Cuántas regiones poligonales se forman.
- Haz clic en las regiones poligonales

-¿En qué región aparecen las 4 regiones sombreadas es decir la intersección de ellas?
-La región obtenida es un polígono convexo?. …………………………………………………

Cual sería tu comentario respecto a la característica de la solución grafica de un sistema de inecuaciones.
……..
……..

13.6 Cierra el archivo y abre otro en GeoGebra
13.7 Grafica el sistema de inecuación lineal

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

¿Qué te parece este sistema de inecuación. Tuviste alguna dificultad para ingresar los datos por la ventana de entrada?
………
………

Tambien puedes ingresar del siguiente modo:

0 ≤ x ≤ 3 equivale a: 0 ≤ x Λ x ≤ 3 El símbolo matemático Λ significa "y"

0 ≤ y ≤ 5 equivale a …………………………………………………………………………….

13.8 Grafica la solución del sistema de inecuación lineal mediados por GeoGebra

$$\begin{cases} x + y \geq 8 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

-Qué región es la solución
-Cuál es tu comentario al respecto:--

13.9 Dibuja la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones, usando lápiz y papel, halla los vértices del polígono:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

x+y =5

x	0	
y		0

x+3y=9

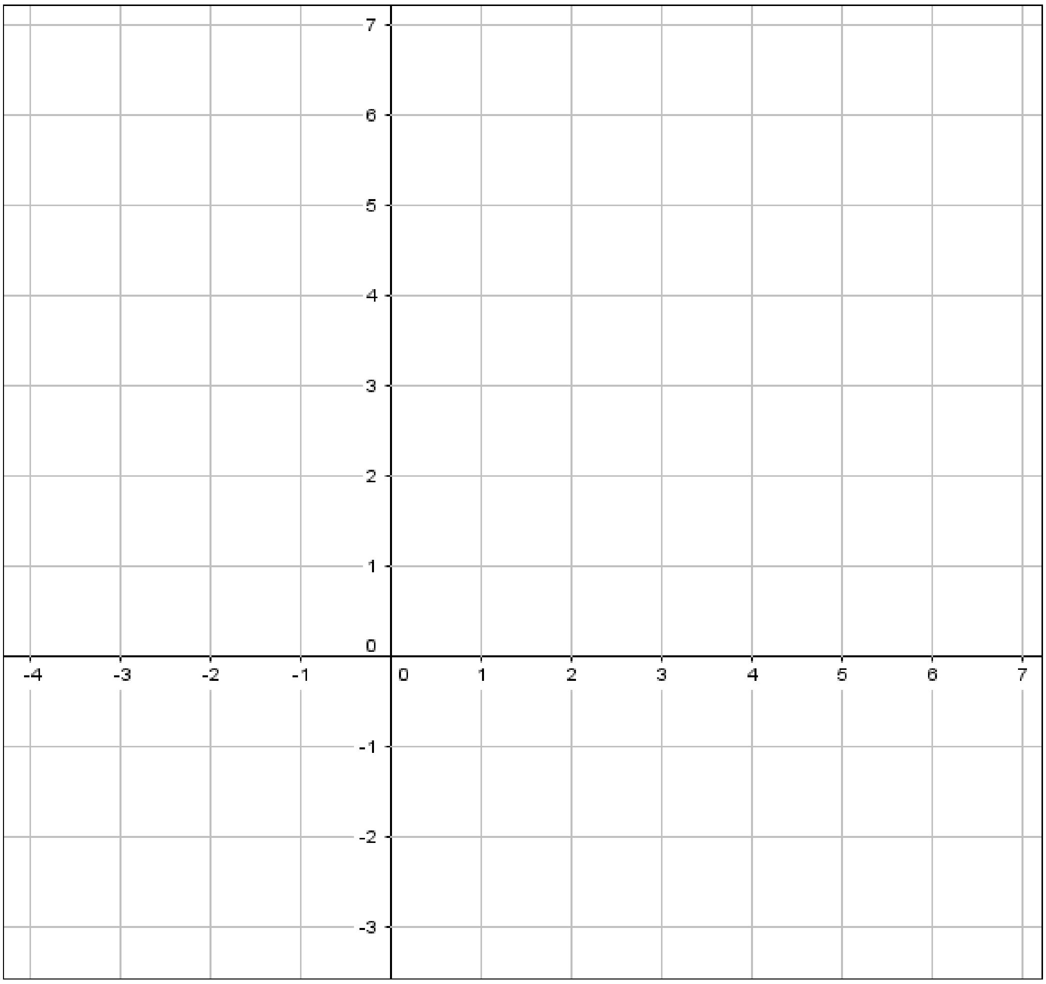
x	0	
y		0

Evaluando puntos (x , y) en la inecuación siguiente

x + y ≤ 5

x + 3y ≥ 9

Graficando la inecuación

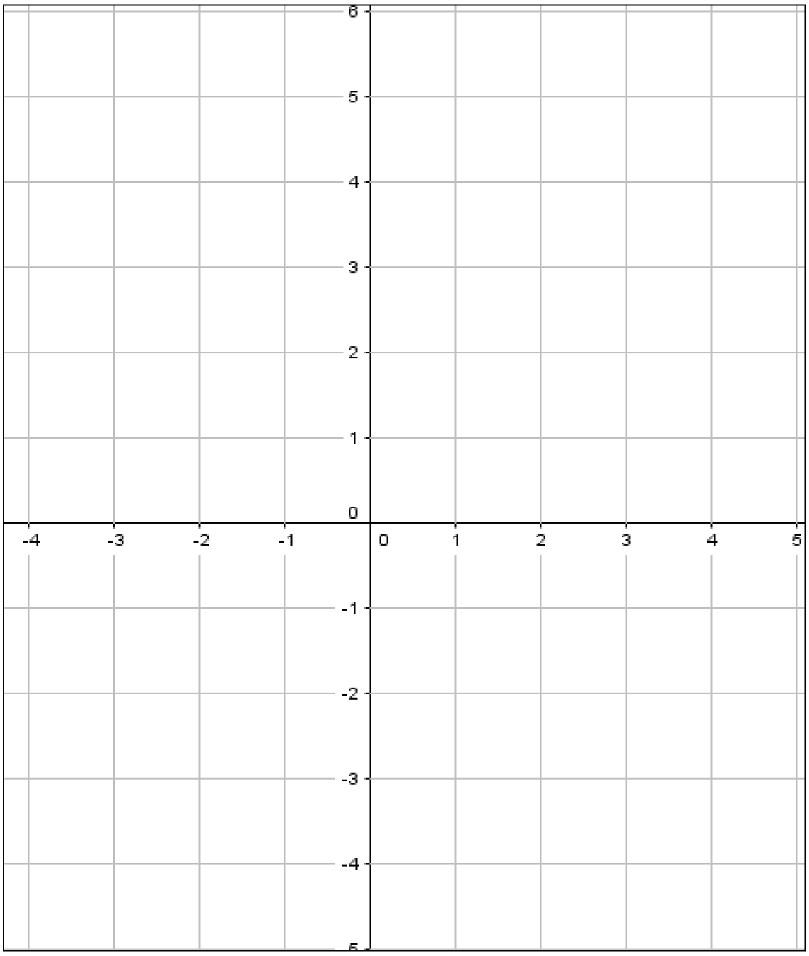


Ubicando los vértices en el polígono convexo

Puntos	(x	y)
A=		
B=		
C=		

13.10 Determina los vértices del polígono convexo con GeoGebra

$$\begin{cases} y + 2x \leq 4 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Observación

Para determinar la intersección usando el comando 

de dos objetos, las inecuaciones deben ser rectas es decir deben cambiar de símbolo por la igualdad e ingresar por la ventana de entrada en Geogebra, solo así se podrá hallar los vértices.

I.E. HUANCANYACU
Profesora: Ángela Ramón Ortiz

ACTIVIDAD Nº 4

Apellidos y Nombres…………………………………………………………………………………………
Tema: Maximización y Minimización de funciones

Estimado alumno en esta parte de la actividad resolverás problemas de nociones básicas de Programación Lineal utilizando el programa PHPSIMPLEX que será de gran utilidad pues te simplificará algunas acciones.

1. Maximice la función objetivo: $Z = F(x_1, x_2) = 18x_1 + 24x_1$,
   sujeto a: $x_1 + x_2 \leq 80$; $x_1 + 2x_2 \leq 120$; $x_1, x_2 \geq 0$
2. Maximice la función objetivo $Z = F(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2$,
   sujeto a: $2x_1 + y_2 \leq 180$; $x_1 + 2x_2 \leq 160$; $x_1 + x_2 \leq 100$; $x_1, x_2 \geq 0$,
3. Minimice las funciones objetivo: $Z = F(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2$,
   sujeto a: $x+2y \geq 60$; $2x + y \geq 60$; $x_1, x_2 \geq 0$.
4. Minimice las funciones objetivo: $Z = F(x_1, x_2) = 8x_1 + 4x_2$,
   sujeto a: $3x_1 + x_1 \geq 3$; $4x_1 + 3x_1 \geq 6$; $x_1 + 2x_1 \geq 2$; $x, x_1, x_2 \geq 0$.

Procedimiento:

Ingrese los datos al programa PHP Simplex
Desarrollo el problema por el método simplex
Represente gráficamente el ejercicio
Para cada ejercicio:

Identifique vértices de la región factible	Evalúe la función factible en cada vértice	Valores obtenidos
A = (,)		
B = (,)		
C = (,)		

El valor óptimo hallado es: …………………………………………………

PROBLEMA: Un sastre tiene 40 metros cuadrados de tela de algodón y 60 metros de tela de lana. Un pantalón requiere de $1m^2$ de algodón y $3m^2$ de lana, y un vestido de mujer requiere de $2m^2$ de cada una de las telas. ¿Qué cantidad de confección debe hacer el sastre para maximizar su ingreso si, a) tanto el pantalón como el vestido de mujer se venden a S/. 40.00?, b) Un pantalón se vende a S/. 60.00 y un vestido de mujer a S/.30.00?, c) un pantalón se vende por S/. 50.00 y un vestido de mujer por S/. 40?

I.E. “HUANCANYACU”
Profesora: Angela Ramón Ortiz

ACTIVIDAD Nº 5

Apellidos y nombres:…………………………………………………………………………………..
Tema: Maximización y minimización de Funciones

Problema 5.1

En una chacra se cosecha 24 kg de vainitas y 15 kg de arveja, que se envasan en dos tipos de cajas del modo siguiente:

caja I: 200 g de vainitas y 100 g de arveja. Precio: 4 soles

caja II: 200 g de vainitas y 300 g de arveja. Precio: 6 soles

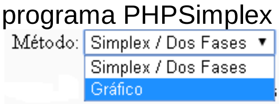
a. ¿Cuántas cajas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el máximo de ingresos?

b. ¿Cuál es el importe de la venta?

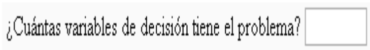
Datos
X:…………………………….
Y:……………………………….
Completa la tabla

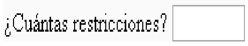
	Caja I	Caja II	Total
Vainitas			
Arveja			
Costo			

El objetivo es maximizar los ingresos:
Función objetivo: F(x,y)=…..x + ….y
Restringido por:…………………………………
…………………………………..
Condiciones de no negatividad:………………………
Resolviendo con el programa PHPSimplex:
-Abrimos el programa PHPSimplex

-En Método 

hacemos clic en gráfico

-En cuántas variables de decisión tiene el problema respondemos 2 

-En el numero de restricciones del problema debe considerar las condiciones de no negatividad


-Luego da clic en continuar
Respondiendo la pregunta: concluimos que:…………………………………………………..................
………
………

Estimado alumno ahora necesitamos tu comentario con respecto al programa Geogebra y el Programa PHPSimplex:
………
………
………

I.E. “HUANCANYACU”
Profesora: Angela Ramón Ortiz

ACTIVIDAD Nº 5

Apellidos y nombres:……………………………………………………………………………………..
Tema: Maximización y minimización de Funciones

Estimado alumno en esta actividad trabajaras con las nociones básicas de Programación Lineal

Problema 5.2
En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia *A* y otras 15 de una sustancia *B*. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de *A* y cinco de *B*, y el tipo II con una composición de cinco unidades de *A* y una de *B*. El precio del tipo I es de 10 soles y el del tipo II es de 30 soles. Se pregunta**:**
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?
<u>Solución</u>
Datos
x:………………………………………
y:………………………………….

	TipoI	Tipo II	
Sustancia A			
Sustancia B			
Costo			

Determinando las restricciones
………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………..
$x \geq 0$, $y \geq 0$
Determinando la función objetivo a minimizar: Z = F(x, y)=…………………………………

Graficar con Geogebra, hallando la región factible determinando los vértices

I.E. “HUANCANYACU”

Profesora: Ángela Ramón Ortiz

ACTIVIDAD Nº 6

Apellidos y nombres:……………………………………………………………………………..

Tema: Maximización y minimización de Funciones

Estimado alumno en esta actividad trabajaras con las nociones básicas de Programación Lineal

Problema 6.1.

En la Institución Educativa Huancanyacu, en el curso de formación laboral los alumnos tienen planificado con su profesor fabricar carpetas. Para el cual disponen de 270 metros cuadrados de cartón y 432 metros de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño mediano tamaño pequeño. Para el primer tipo se necesitan 0,20 metros cuadrados de cartón y 30 cm de cinta de goma que se vende a 14 nuevos soles la unidad; para la carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 metros cuadrados de cartón y 27 cm de cinta de goma y se vende a 11 nuevos soles por unidad.

a) Represente gráficamente la región factible.

b) ¿Cuántas carpetas de cada tipo interesa fabricar para que el beneficio que se obtiene con su venta sea lo mayor posible?

c) Calcule este beneficio máximo.

Solución

Datos

x:………………………………………

y:…………………………………

	Carpeta pequeña	Carpeta grande	Total
Cartón			
Goma			
Costo			

Determinando las restricciones

………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………..

$x \geq 0$, $y \geq 0$

Determinando la función objetivo a maximizar: Z = F(x,y)=…………………………………

Graficar con PHPSimplex, hallando la región factible determinando los vértices

I.E. “HUANCANYACU”
Profesora: Angela Ramón Ortiz

ACTIVIDAD Nº 6

Apellidos y nombres:………………………………………………………………………………………..
Tema: Maximización y minimización de Funciones

Estimado alumno en esta actividad trabajaras con las nociones básicas de Programación Lineal

Problema 6.2.

Una plantación de duraznos en Huancanyacu desea abonar la chacra para lo cual se necesita 9kg de abono nitrogenado (N), 5 kg de abono fosforado (P) y 6 kg de potasio (K). En la tienda AgroFalcón se venden dos tipos de cajas. Las del tipo A llevan una bolsa con 1 kg de N, 1 kg de P y 2 kg de K y cuesta 200 nuevos soles. Las del tipo B tiene una bolsa con 3 kg de N, otra con 1 kg de P y 1 Kg de K, y cuesta 300 nuevos soles.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo deberán comprarse para cubrir las necesidades de la plantación de durazno con mínimo gasto?
b) ¿Cuál es ese mínimo gasto necesario?

Solución

Datos
x:………………………………………
y:………………………………….

	Tipo A	Tipo B	Total
N			
P			
K			
Costo			

Determinando las restricciones

………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………..

$x \geq 0$, $y \geq 0$

Determinando la función objetivo a minimizar: Z = F(x,y)=…………………………………

Graficar con Geogebra, hallando la región factible determinando los vértices

I.E. “HUANCANYACU”

EXAMEN DE MATEMÁTICA

Apellidos y Nombres:………………………………………………………………… Fecha: / /
Profesora: Angela Ramón

Estimado alumno ahora pondrás en práctica todo lo aprendido en Programación Lineal valiéndote de todas las herramientas disponibles.

Problema La señora Rafaela quiere vender 78 kg de durazno de primera calidad y hasta 138 kg. De durazno de segunda. Para ello hace dos tipos de jabas A, B. Las jabas de A están formadas por 1 kg de durazno de primera y 3 de segunda y las jabas de B por 2 kg de primera y 2 de segunda calidad. El precio de venta de la jaba A es de 0.9 soles y el de jaba B es de 1 sol. ¿Cuántas jabas de A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

Solución:

X:……………………………………………………………………

y:……………………………………………………………………

			total
costo			

Determinando la función objetivo: Z(x, y) = ……x + …..y

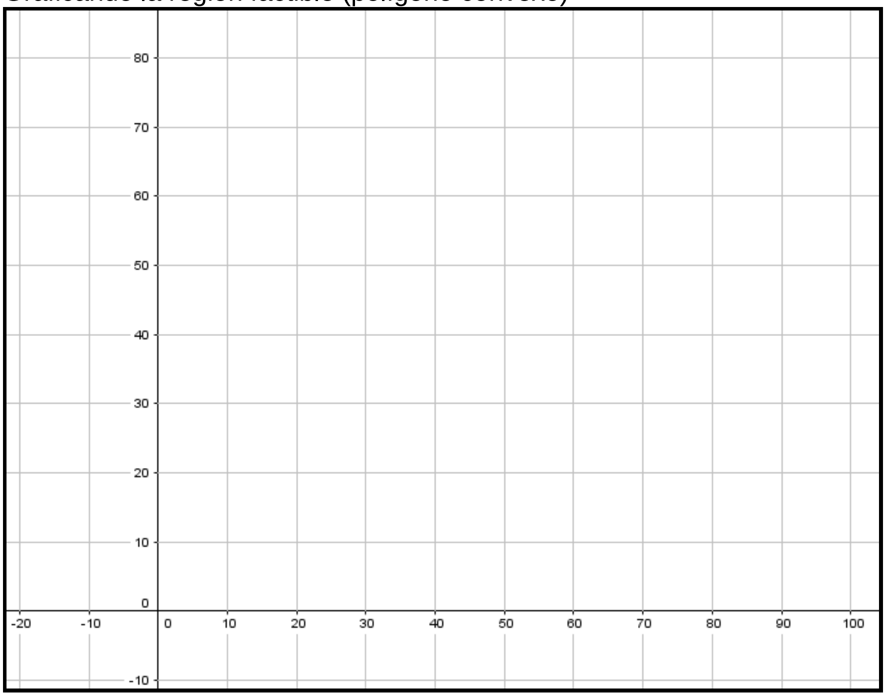
Determinando restricciones:

……………………………………………

……………………………………………

Condiciones de no negatividad: $x \geq 0$ $y \geq 0$

Graficando la región factible (polígono convexo)



Determinando los vértices:

Completando la tabla

vértices	Z(x,y)= ….x +…..y	

Respondiendo las preguntas:
a)……….
.
…….
.
………
…
b)………

ANEXO 2. RÚBRICA: EVALUACIÓN DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES MEDIADO POR EL GEOGEBRA

La siguiente Rúbrica es para la evaluación de la actividad de aprendizaje que realiza el alumno durante las actividades de la clase de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos incógnitas teniendo como indicadores de calificación: **logro, proceso, inicio.**

N°	Ítems para evaluar	Logro (03)	Proceso (02)	Inicio (01)
1	Identifica una ecuación de 1er grado con dos incógnitas	Utiliza una estrategia eficiente y efectiva para identificar una ecuación de 1er grado con dos incógnitas	Generalmente utiliza una estrategia eficiente para identificar una ecuación de 1er grado con dos incógnitas	Algunas veces usa una estrategia para identificar una ecuación de 1er grado con dos incógnitas
2	Grafica la ecuación de 1° con 2 incógnitas	Tabula la ecuación con intercepto con sus ejes de coordenadas y lo grafica de forma pertinente, interpretando el resultado obtenido y valida sus respuesta con el Geogebra	Tabula la ecuación en sus interceptos con sus ejes de coordenadas y lo grafica con Geogebra	Grafica la ecuación de 1er grado con dos incógnitas con Geogebra, no pudiendo determinar los puntos de corte con ejes de coordenadas.
3	Resuelve sistema de ecuación con el método de Gauss	Utiliza una estrategia eficiente y efectiva para aplicar el método de Gauss-Jordan para resolver problemas y ejercicios de sistema de ecuaciones	Por lo general usa, una estrategia efectiva para aplicar el método de Gauss Jordan para resolver problemas y ejercicios de sistema de ecuaciones	Aplica con dificultad el método de Gauss Jordan para resolver problemas y ejercicios de sistema de ecuaciones.
4	Grafica solución de una ecuación de primer grado en el plano R^2.	Reconoce la ecuación de una primer grado como una línea recta en el plano, identificando la pendiente y la solución	Por lo general reconoce la solución de una ecuación de primer grado	Rara vez reconoce la solución de una ecuación de primer grado en el plano
5	Conoce la ventana algebraica y gráfica del Geogebra	Introduce correctamente los datos en la ventana algebraica utilizando los símbolos adecuados y visualizando la ecuación y su respectiva grafica	Por lo general introduce correctamente los datos por la ventana de entrada, utilizando los símbolos adecuados visualizando la gráfica	Algunas veces introduce los datos correctamente por la ventana de entrada y visualiza la gráfica, pero mostrando cierta dificultad con los símbolos.
6	Grafica sistema de ecuaciones con el Geogebra	Grafica correctamente y eficientemente un sistema de ecuaciones con el Geogebra identificando la solución en la ventana grafica del Geogebra.	Por lo general grafica correctamente un sistema de ecuaciones con el Geogebra identificando la solución en la ventana gráfica del Geogebra	Algunas veces grafica correctamente un sistema de ecuaciones, pero no identifica la solución en la gráfica de la ventana del Geogebra
7	Reconoce algebraica y gráficamente inecuaciones de primer grado	Grafica una inecuación y determina eficientemente la región solución aplicando las reglas en forma pertinente y pintando la región solución	Generalmente grafica una inecuación y determina la región solución aplicando las reglas y pintando la región solución.	Algunas veces grafica una inecuación , pero tiene problemas para pintar la región solución
8	Resuelve gráficamente inecuaciones con el Geogebra.	Reconoce las regiones que se forman al graficar inecuaciones con el Geogebra determinando en forma pertinente la región solución	Generalmente reconoce las regiones que se forman al graficar inecuaciones con el geogebra, determinando la región solución	No identifica las regiones que se forman al graficar inecuaciones con el Geogebra y la región que representa a la solución.
9	Identifica la solución de un sistema de inecuaciones	Identifica y determina en forma eficiente la solución de un sistema de inecuaciones como la región de las intersecciones de las inecuaciones	Generalmente determina la solución de un sistema de inecuaciones como la región de intersección de inecuaciones	Algunas veces identifica la solución de un sistema de inecuaciones como la región solución
10	Interpreta la solución algebraica y gráfica de inecuaciones	Utiliza los procedimientos adecuados para interpretar correctamente la región solución de las inecuaciones	Generalmente utiliza los procedimientos adecuados para interpretar la región solución de las inecuaciones	Algunas veces utiliza los procedimientos indicados para interpretar la región solución de la inecuación

Anexo 3. RÚBRICA DE EVALUACIÓN DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL MEDIADO POR EL PHPSIMPLEX

La siguiente Rúbrica es para la evaluación de la actividad de aprendizaje que realiza el alumno durante las actividades de la clase de programación lineal, en ella se observará distintos aspecto que son considerados como indicadores de calificación: **logro, proceso, inicio.**

Nº		Logro (03)	Proceso (02)	Inicio (01)
1	Organización de información	Organiza la información en forma eficiente de acuerdo al problema en una tabla de doble entrada	Generalmente organiza la información de acuerdo al problema en una tabla de doble entrada	Algunas veces organiza la información en una tabla de doble entrada, pero no puede determinar el número de filas que contiene la tabla.
2	Identifica variables	Identifica correctamente las variables de un problema	Generalmente identifica las variables de un problema	Algunas veces identifica las variables de un problema, pero suele confundirse.
3	Identifica restricciones	Identifica el número de restricciones de un problema en forma correcta y eficiente identificando si la inecuación es estricta o amplia	Generalmente identifica el número de restricciones de un problema en forma correcta identificando si la inecuación es estricta o amplia.	Algunas veces identifica el número de restricciones de un problema, pero tiene problemas en reconocer si la inecuación es estricta o amplia.
4	Identifica función objetivo	Identifica correctamente en el problema la función objetivo mostrando seguridad.	Generalmente identifica correctamente en el problema la función objetivo	Algunas veces identifica la función objetivo, muestra inseguridad al identificar.
5	Gráfica la región factible	Determina correctamente y eficientemente la región factible como posible solución al problema planteado	Generalmente determina correctamente la región factible al problema como solución al problema planteado.	Algunas veces determina la región factible al problema planteado pero tiene problemas en determinar como posible solución al problema
6	Identifica el tipo de optimización.	Identifica en forma eficiente y correcta el tipo optimización (maximización o minimización) en un problema Programación Lineal	Generalmente determina en forma correcta el tipo de optimización (maximización o minimización) en un problema de Programación Lineal.	Algunas veces determina el tipo de optimización (maximización o minimización) en un problema de Programación Lineal, pero a veces confunde el tipo optimización.
7	Identifica vértices de la región factible.	Identifica correctamente los vértices de la región factible en una gráfica de un problema de Programación Lineal, determinando eficientemente el vértice solución	Generalmente identifica los vértices de la región factible en un gráfico de un problema de programación Lineal, determinando visualmente el vértice solución.	Algunas veces identifica en forma correcta los vértices de la región factible de un problema de programación lineal.
8	Evalúa la función objetivo en los vértices de la región factible.	Evalúa en forma correcta la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible determinando el vértice que cumple con las condiciones de optimización.	Generalmente evalúa la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible, determinando el vértice que cumple con las condiciones de optimización	Algunas veces evalúa la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible, pero no puede determinar el vértice que cumple con las condiciones de optimización.
9	Optimiza haciendo uso de la página PHPSimplex	Utiliza eficientemente la página PHPSimplex introduciendo correctamente lo que pide la página, abreviando tiempo en hallar la optimización	Generalmente utiliza la página PHPSimplex introduciendo correctamente los datos que pide el programa, abreviando tiempo en hallar la optimización	Algunas veces utiliza la página PHPSimplex introduciendo datos que pide el programa abreviando tiempo en hallar la optimización.
10	Determina la cantidad óptima según el problema	Interpreta la correctamente la solución optima (vértice) según el tipo de problema.	La explicación que da es parcial en lo referente a la cantidad optima según el problema	La explicación que da demuestra un conocimiento muy limitado, cometiendo algunos errores en determinar la cantidad optima según el problema.

ANEXO 4. TEST DE OPINIÓN SOBRE EL PROCESO DE E-A.

Estimado estudiante, en el siguiente cuestionario querremos recoger tu opinión sobre los diversos aspectos de desarrollo del tema sistema de ecuaciones, sistema de inecuaciones y de programación lineal. Rellénalo marcando la casilla más adecuada a tu opinión y respondiendo a las cuestiones planteadas.
4.1 Opinión referida a la enseñanza de la programación lineal

N°	ÍTEM	Excelente	Buena	Regular	Mala	Total
1	Calificación a la Enseñanza de la matemática por parte de la profesora.					
2	Dominio del aula de la profesora durante la clase de matemática.					
3	Dominio del tema de enseñanza por parte de la profesora en el tema de sistema de ecuaciones.					
4	Dominio de la profesora del Geogebra para llevar a cabo la enseñanza de sistema e ecuaciones.					
5	Dominio del tema de enseñanza por parte de la profesora en el tema de sistema de ecuaciones.					
6	Las actividades de resolución de problemas en pequeños grupos con los estudiantes en el aula.					
7	Dominio de la profesora del Geogebra para llevar a cabo la enseñanza de sistema de inecuaciones.					
8	Dominio del tema de programación lineal por parte de la profesora.					
9	Dominio del PHPSimplex por parte de la profesora para enseñar resolución de problemas de programación lineal.					
10	Uso de métodos, medios y recursos para desarrollar la clase sobre: ecuaciones, inecuaciones y programación lineal por parte de la profesora					

4.2 Aprendizaje de la programación lineal

N°	ÍTEM	Muy de acuerdo	De Acuerdo	En desacuerdo	Muy en desacuerdo	Total
11	El uso de ejemplos literales, algebraicos y gráficos en clase me ha parecido.					
12	El uso de Software Matemático fue muy importante para resolver gráfica y algebraicamente ecuaciones.					
13	El Geogebra ha solucionado las dificultades que tenía en realizar cálculos numéricos y gráficos en la resolución de sistema de ecuaciones.					
14	El software Facilita la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones primer grado con dos incógnitas.					
15	El Geogebra permite resolver algebraica y gráficamente la solución de sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.					
16	El Software Geogebra permite interpretar gráficamente ecuaciones e inecuaciones en forma dinámica.					
17	La programación lineal facilita la resolución de problemas de maximización y minimización de una región factible.					
18	El PHPSimplex permite la resolución de un problema de optimización haciendo uso del método Simplex.					
19	El PHPSimplex permite la resolución de un problema de optimización haciendo uso del método gráfico.					
20	El programa PHPSimplex permite una resolución algebraica y gráfica de problemas de optimización.					

ANEXO 5. CUESTIONARIO DE SATISFACCIÓN

Estimado alumno, el cuestionario que a continuación se le presenta, está orientado a conocer su conformidad o disconformidad sobre algunos aspectos considerados en el desarrollo del tema. Se le solicita su apoyo respondiendo cada uno de los ítems con absoluta libertad y con la mayor veracidad posible. Toda vez que tus respuestas servirán para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemática.
Teniendo en cuenta la siguiente escala de cualificación: Nada satisfecho (NS), Poco satisfecho (PS), Satisfecho (SA), Muy satisfecho (MS)

	Nivel de satisfacción referido al Contenido de la Unidad de Aprendizaje y grado de Cumplimiento.	**MS**	**SA**	**PS**	**NS**
1	Explicación clara de los objetivos de la unidad de aprendizaje				
2	Cumplimiento de los objetivos establecidos				
3	Comprensión del contenido de la unidad de aprendizaje y el uso del Software Matemático como recurso didáctico				
4	Aplicación del contenido de la unidad de aprendizaje a mis actividades cotidianas				
5	Duración de la unidad de aprendizaje adecuado para lograr un buen aprendizaje del tema.				

	Metodología: Las actividades y los materiales didácticos me ayudaron a entender el contenido de la unidad de aprendizaje y lograr objetivos planteados en el tema.	**MS**	**SA**	**PS**	**NS**
6	Desarrollo de trabajo, prácticas de laboratorio y tareas durante la unidad de aprendizaje.				
7	Desarrollo de ejercicios haciendo uso de Software matemáatico				
8	Discusiones en clase, propiciación de participación de los alumnos				
9	Material audiovisual (vídeos, presentaciones, etc.) utilizados				
10	Existencia de libros disponibles para lograr los objetivos de la unidad de aprendizaje				

	Infraestructura disponible	**MS**	**SA**	**PS**	**NS**
1	Las instalaciones (aula, carpetas, iluminación, etc.) para el desarrollo de actividades de enseñanza y aprendizaje de la matemática.				
2	Facilidad que se tiene para acceder al laboratorio de informática para el estudio de temas de matemática asistido por programas.				
3	Los equipos y Software Matemático adecuado para el estudio del tema				
4	El uso del software matemático cumple con las necesidades de la unidad de aprendizaje				
5	Utilización de programas de computadora para la evaluación en el área de matemática.				

	Desempeño del Profesor	**MS**	**SA**	**PS**	**NS**
1	Puntualidad en la asistencia a clases en el horario establecido				
2	Conocimiento y dominio del tema de parte del profesor				
3	Presentación del contenido y unidad de aprendizaje				
4	Promueve la discusión y el diálogo para enriquecer el estudio y aprendizaje del tema en estudio.				
5	Respuesta de la profesora a las preguntas que formulan los estudiantes.				
6	Manejo de las dinámicas de grupos en la resolución de problemas usando Software Matemático.				
7	Mantiene al grupo interesado y enfocado en los temas de la clase en la unidad de aprendizaje.				
8	El uso de tiempo efectivo de clases teóricas y prácticas por parte del profesor.				
9	La apariencia y comportamiento del profesor fue adecuado durante las sesiones de aprendizaje.				
10	Forma de evaluación de los aprendizajes por parte de la profesora.				

	Mi desempeño	**MS**	**SA**	**PS**	**NS**
1	En cuanto a motivación las actividades de aprendizaje del tema tratado usando Software Matemático.				
2	Asistí a clases puntualmente siempre con el ánimo de aprender cada clase más matemáticas y resolver problemas en computadora.				
3	Cumplí con todas las tareas y trabajos encargados por la profesora durante la clase.				
4	Para aprender Programación lineal, la enseñanza las orientaciones de la profesora y el uso del software fueron suficientes.				
5	Uso de Software Matemático, como es equipo de cómputo, internet y acceso a bibliografía en línea.				
6	Uso de tiempo efectivo de clase y fuera de ella para el aprendizaje de la matemática.				

ANEXO 6. DIARIO DE CAMPO

SEMANA DE CLASES SESIÓN: ……………………………………………………….. FECHA: …………………………………..
TEMA:…………………………………………………………………………………………..
DESCRIPCIÓN DE LOS ACONTECIMIENTOS …………………………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………………………….
ACTIVIDADES EN EL AULA …………………………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………………………….
RECURSOS: …………………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………………