UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

ESCUELA DE POST GRADO

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

Mención: Investigación y Docencia superior

APLICACIÓN DEL MÉTODO SINGAPUR PARA DESARROLLAR Y POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN NIÑOS(AS) DEL SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA.

Tesis para Optar el Grado Académico de Magister en Educación

Mención en Investigación y Docencia Superior

PRESENTADO POR:

SOTO ALVARADO, Gustavo Oscar

HUÁNUCO PERÚ

2015

ASESOR

Dr. AMANCIO RICARDO ROJAS COTRINA

MIEMBROS DEL JURADO

Dr. Ewer Portocarrero Merino.

Dr. Manuel Roberto Blanco Aliaga.

Dra. Clorinda Barrionuevo Torres.

DEDICATORIA

Esta investigación, culminación de la Maestría en Educación, mención en Investigación y Docencia Superior de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán, y las implicaciones que ha tenido en mi desarrollo personal y profesional, no hubiese sido posible sin el apoyo moral y afectivo de quienes han creído en mí y me han apoyado y acompañado siempre, aún en la distancia.
A mi querido hijo Gustavo Job; por ser mi alegría, felicidad y razón de ser; por enseñarme a ser padre; por mantener mi capacidad de asombro; por ser la fuerza que me impulsa a superarme en todos los ámbitos de la vida; por ser la esperanza de un mundo mejor.

A mis padres Serapio Soto e Hilaria Alvarado; que me han dado todo a cambio de poco; porque de ellos he aprendido los valores fundamentales de la vida.

A toda mi familia; por su apoyo incondicional, poniendo el hombro siempre que lo hemos necesitado; por privarnos mutuamente durante todo este tiempo de la alegría de compartir la cotidianeidad.

A mi Asesor Dr. Amancio Ricardo Rojas Cotrina, amigo y maestro de quien he recibido apoyo desde el día que conocimos. Por la confianza y la fe que siempre ha depositado en mí. Por alentar el deseo de superación profesional de quienes hemos tenido el privilegio de conocerlo y de trabajar con él por enseñarnos a ser profesionales reflexivos y fomentar nuestro compromiso con la educación pública.

A mi entrañable amigos Docentes del Colegio Nacional de Aplicación en especial Hugo Melgarejo Flores (+), que partió dejando el vació en el alma de quienes disfrutamos de su compañía; un hombre íntegro, ejemplo de dignidad, coraje, voluntad y alegría de vivir, aún en los momentos más difíciles. Por lo mucho que aprendí de él como persona, como hombre, como padre, como educador.

A mis amigos y colegas de la Facultad de Ciencias de la Educación, quienes fueron mis maestros cuando curse mies estudios de pre grado y en la actualidad son mis colegas de trabajo.

A todos mis amigos y amigas de aquí y de allá; por mantenernos en su mente y corazón a pesar del tiempo y la distancia.

A todos los niños(as) del segundo grado del Colegio Nacional de Aplicación, quienes con su ayuda y colaboración hicieron realidad la presente investigación.

AGRADECIMIENTO

A las instituciones responsables de estudio del magister en educación: Escuela de Posgrado de la UNHEVAL de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán y a la Facultad de Ciencias de la Educación

Al asesor Dr. Amancio Ricardo Rojas Catrina, por su abnegado sacrificio de orientación, quien con su apoyo inagotable nos condujo día a día para la ejecución y culminación del presente trabajo de investigación.

A mis padres quienes nos brindaron su apoyo en todo momento y por habernos inculcado la ética de superación continúa.

Al director del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL Lic. Carlos Moreno Taboada y a la profesora Elizabeth Rojas Sánchez de aula del 2º grado, quiénes nos apoyaron en la aplicación del Método Singapur.

Un especial agradecimiento a los niños(as) del segundo grado del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, quienes con su gentil colaboración se hizo posible la aplicación del Método Singapur y culminación de nuestro trabajo de investigación.

RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito demostrar que el método Singapur desarrolla y potencia el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) de segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

La población está constituida por niños del segundo grado de Educación Primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, a la que llamamos población muestral, se encuentran niños de ambos sexos, de condición académica regular y de niveles socio – económico: alto, medio y bajo; cuya edad se encuentra entre los 7 años; se seleccionó la población muestral en forma aleatoria de un total de 25 niños(as), a quienes se les asignó equitativamente a los grupos: experimental y control. El diseño de investigación adoptado fue el experimental, con pre test y pos test. Dicha población muestra fue distribuido de la siguiente manera: 12 alumnos para el grupo experimental y 12 alumnos para el grupo control.

Se utilizó como instrumentos de investigación el pre test y pos test la Prueba de Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) elaborada por el Ministerio de Educación a través de la Unidad de Medición de la Calidad. Que es una evaluación a gran escala que cada año aplica el Ministerio de Educación para medir los aprendizajes de los estudiantes de segundo grado de primaria en el área de matemática.

El tratamiento experimental consistió en la aplicación del Método Singapur, dicha metodología está basada en tres fases: concreto, pictórico y abstracto, el desarrollo del Método Singapur consistió en entregar a los niños

fichas de Aprendizaje, material didáctico, específicamente las regletas de Cuisenaire, durante 4 semanas, 3 sesiones por semana, con una duración de tres horas por sesión, que hizo un total de 28 horas académicas, dio lugar a la obtención de resultados importantes.

El análisis estadístico comparativo realizado con los datos obtenidos en el trabajo de campo, permitió concluir lo siguiente: la aplicación del Método Singapur desarrolla y potencia el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

El autor

ABSTRACT

This research aims to demonstrate that the Singapore method develops and promotes the learning of mathematics in children (as) second grade of the National School of Application UNHEVAL - 2014.

The population consists of children in the second grade of Primary Education of the National School of Application UNHEVAL, we call sample population, children of both sexes, regular academic status and membership levels are - economic: high, medium and low whose aged between 7 years; the sample population randomly selected one of a total of 25 children (as), who were equally assigned to groups: experimental and control. The research design adopted was experimental, pretest and posttest. This population sample was distributed as follows: 13 students for the experimental group and 12 students in the control group.

The pretest was used as research tools and post Test Student Census Evaluation (ECE) prepared by the Ministry of Education through the Unit quality measurement. Which is a large-scale evaluation applies each year the Ministry of Education to measure student learning of second grade in the area of mathematics.

The experimental treatment consisted of the application of the Singapore method, this methodology is based on three phases: concrete, pictorial and abstract, the development of the Singapore method was to give children sheets Learning, teaching materials, specifically Cuisenaire rods during 4 weeks, 3 sessions per week, each lasting three hours per session, who made a total of 28 academic hours, resulted in obtaining important results.

The comparative statistical analysis with data obtained in the field work allowed to conclude the following: the implementation of the Singapore method develops and promotes the learning of mathematics in children (as) the second grade of the National School of Application UNHEVAL - 2014.

INTRODUCCIÓN

SEÑORES MIEMBROS DEL JURADO CALIFICADOR.

Nos es grato poner a vuestra consideración la tesis titulada: **APLICACIÓN DEL MÉTODO SINGAPUR PARA DESARROLLAR Y PONTECIAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN NIÑOS(AS) DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA**, el mismo que obedece a nuestra inquietud profesional por la investigación.

Como sabemos, la educación ha hecho cambios sustanciales en la manera de ver los aspectos teóricos – prácticos. Esos cambios no permiten ver como aprenden los niños(as), especialmente en la Matemática.

Muchas especialistas han hecho ver como se realizaba la matemática; tal y como afirmó Puig Adam, citado por Sales (2000):

> **"*La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces*"(p.9)**

Ban Har, citado por Morales (2013), explica la importancia de aprender siempre algo nuevo, donde los contenidos se vayan repitiendo, pero con distintos niveles de avance, dicho autor expresa que:

> ***"El método fomenta la capacidad de los niños(as) de visualizar para ver un problema de matemáticas de forma fácil y por tanto, promueve la habilidad de generar estrategias mentales, lo que ayuda a los estudiantes a convertirse en pensadores flexibles, capaces de escoger la mejor estrategia aplicable a una situación de cálculo."***

Por ello fue se aplicó el Método Singapur, donde nosotros y con la ayuda de los niños(as) se realizó los talleres de matemática en el salón de clases del 2do grado del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán; por ello, con la investigación pretendemos probar como contribuye el método anteriormente mencionado al aprendizaje de la matemática.

Para la presente investigación, partimos del siguiente problema general: ¿Qué efecto tienen la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL - 2014?, Cuyo objetivo trazado es demostrar que el método Singapur desarrolla y potencia el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) de segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

La hipótesis que se planteó para la investigación es: Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

El informe de la investigación que ponemos a vuestra consideración está estructurado en cinco capítulos:

En el capítulo I, denominado *problema de investigación*, hacemos una visión panorámica del problema, formulamos el problema y a la vez presentamos los objetivos, las hipótesis, variables, la justificación y limitaciones de la investigación.

En el capítulo II, denominado *marco teórico*, damos a conocer los antecedentes y bases teóricas del aprendizaje de la matemática, los fundamentos del Método Singapur, definiciones conceptuales y las bases epistémicas.

En el capítulo III, designado como marco metodológico, se especifican el tipo de investigación, diseño y esquema de investigación, la población y muestra, instrumento que se utilizó para la recolección de datos y la técnica de recojo, procesamiento y presentación de datos.

En el capítulo IV, denominado resultado, procesamos, analizamos los datos. En este capítulo contrastamos y probamos las hipótesis.

En el capítulo V, denominado discusión de resultados, cotejamos los resultados obtenidos en nuestro trabajo de investigación con los resultados de otras tesis y teóricos de referente al campo de la resolución de problemas.

Finalmente consideramos las conclusiones, sugerencias, bibliografía y anexos.

El autor

INDICE

INDICE DE TABLAS

INDICE DE GRÁFICOS

CAPITULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Descripción del problema.

Es sabido por los profesionales del sector de la Educación que en todos los países hay ventajas y deficiencias en el Sistema Educativo y por supuesto, las opiniones ante las reformas y metodologías son muy subjetivas.

Pero lo cierto es que, a nivel mundial, la forma de determinar si un Sistema Educativo es o no positivo y efectivo, es con el Informe PISA (Programme for International Student Assesment).

En cualquiera de los informes son destacables los puestos alcanzados en los últimos años en ciencias y matemáticas por los estudiantes de países como Finlandia o Singapur. Modelos donde la premisa es aprender a pensar y a descubrir, desarrollando la curiosidad, la creatividad y la experimentación, lejos de las memorizaciones típicas de otros sistemas educativos. En el caso de Singapur, hablamos de un país que aparece en segundo lugar en la sección de matemáticas con un programa educativo asociado a su método: el Método Singapur. En el informe Pisa del 2012, Singapur obtuvo una media de 573 quedando entre los primeros puestos a nivel mundial.

En el caso del Perú no se encuentra muy bien posicionada, y los gastos anuales en educación muy bajo. Por lo que la Educación Matemática en el Perú está atravesando por una etapa muy difícil. De un lado están los resultados de las evaluaciones internacionales y nacionales que nos muestran el mal estado en que se encuentran los estudiantes en el área de matemática.

Según el último informe PISA (2012) estamos en el último lugar, Una situación de estancamiento a pesar de las continuas reformas educativas, que visto los resultados, no han mejorado el panorama educacional. Lo que lleva a plantearse hasta qué punto es efectiva la enseñanza matemática en el Perú.

Se observa un profesorado desalentado y resistente a ser evaluado y capacitado dentro de un sistema del cual desconfían, en un tercer frente de acción se encuentra el Estado que, a través del Ministerio de Educación, formula y ensaya mecanismos que persiguen el mejoramiento de la Educación y la búsqueda de una Educación de calidad que prometa un futuro alentador para la sociedad a la que sirve, que no logra vislumbrar buenos resultados a corto y mediano plazo.

Es así que el Ministerio de Educación del Perú realizó una medición de la calidad realizada a estudiantes de 4º y 6º de primaria y de 3º y 5º de secundaria en noviembre del 2004. Estos resultados acerca de los rendimientos en lectura y lenguaje, así como en matemáticas demostraron que la calidad educativa no había progresado y sirvió de titulares alarmantes para los medios de comunicación; donde el 77% de los estudiantes que terminan la primaria están por debajo del nivel básico de los logros esperados en lectura y comunicación y 43% está por debajo del nivel básico de los logros esperados en matemáticas (MED – UMC 2005).

También se observa los resultados de los alumnos en las evaluaciones censales dirigidos a los niños(as) del segundo grado de primaria del 2014, donde a nivel nacional nos muestra que el 50.9 % de total de alumnos evaluados se ubican en el nivel de inicio. Que según la ficha técnica de la prueba significa que: El estudiante tiene dificultades, incluso, para resolver situaciones matemáticas sencillas.

Las matemáticas en el nivel primario según el documento oficial (Diseño curricular de Educación Básica Regular) del Ministerio de Educación del Perú (2009) afirma que "… la matemática se aprende para entender el mundo y desenvolverse en él, comunicarse con los demás, resolver problemas y desarrollar el pensamiento lógico – matemático."(p.45), lo cual no se está aplicando ya que las matemáticas que se realizan en el aula es de manera memorística y mecánica donde el alumno sólo realiza la parte algorítmico y manifiesta dificultad en la resolución de problemas, llegando a tener miedo a las matemáticas.

Por eso se debe buscar una alternativa metodológica que trate de aportar el mejoramiento de la enseñaba de la matemática, y esa alternativa planteada se centrará en el Método Singapur, y en conocer más a fondo, el proceso educativo que ha seguido Singapur desde entonces y que ha hecho que un país que hace apenas cuatro décadas estaba en decadencia, esté actualmente, gracias a un potente sistema educativo, colocado en los primeros puestos a nivel mundial tanto en educación como en economía.

Es así que nos proponemos como objetivo general demostrar efectividad del método Singapur para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) de segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL. Para la cual nos planteamos las siguientes interrogantes.

1.2 Formulación del problema.

1.2.1 Problema general.

¿Qué efecto tienen la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL - 2014?

1.2.2 Problemas específicos.

a) ¿Qué efecto tienen la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión comprensión y uso del número en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL - 2014?

b) ¿Qué efecto tienen la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL - 2014?

c) ¿Qué efecto tienen la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL - 2014?

1.3 Objetivo de investigación.

1.3.1 Objetivo general.

Demostrar que el método Singapur desarrolla y potencia el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) de segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

1.3.2 Objetivos específicos.

a) Determinar el efecto que tiene la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014

b) Determinar el efecto que tiene la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

c) Determinar el efecto que tiene la aplicación del método Singapur para desarrollar y potenciar el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

1.4 Hipótesis y/o sistema de hipótesis.

1.4.1 Hipótesis general.

Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

1.4.2 Hipótesis específicas.

a) Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

b) Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

c) Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

1.5 Variables.

1.5.1 Variable independiente

Método Singapur

1.5.2 Variable dependiente

Aprendizaje de las matemáticas

1.5.3 Variable intervinientes

- ✓ sexo
- ✓ Número de alumnos en aula.
- ✓ Edad cronológica del niño

1.6 Dimensiones e indicadores de investigación

<table>
<tr><th>VARIABLE</th><th>DIMESIONES</th><th>INDICADORES</th></tr>
<tr><td rowspan="4">INDEPENDIENTE
Método Singapur</td><td>Concreto</td><td>a) Manipula materiales concretos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pictórico</td><td>b) Representa cantidades matemáticas.</td></tr>
<tr><td>c) Representa la relación parte – todo</td></tr>
<tr><td>abstracto</td><td>d) Aplica símbolos y algoritmos matemáticos.</td></tr>
<tr><td rowspan="20">DEPENDIENTE:
Aprendizaje de la matemática.</td><td rowspan="3">Comprensión y uso del número.</td><td>1. Halla el patrón de una secuencia numérica sencilla.</td></tr>
<tr><td>2. Identifica el orden ascendente en un conjunto de números de dos cifras.</td></tr>
<tr><td>3. Señala los números mayores o menores</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Comprensión del sistema de numeración decimal.</td><td>4. Expresa la equivalencia entre unidades de orden</td></tr>
<tr><td>5. Expresa números menores que 1000 en su representación compacta usual desde su representación gráfica.</td></tr>
<tr><td>6. Expresa un número en su descomposición decimal no convencional a partir de su notación compacta.</td></tr>
<tr><td>7. Expresa números menores que 1000 en su representación</td></tr>
<tr><td>8. Identifica la agrupación reiterada de 10 unidades</td></tr>
<tr><td rowspan="12">Nociones aditivas y resolución de problemas.</td><td>9. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la suma de dos sumandos de hasta tres cifras, presentadas en formato horizontal y vertical.</td></tr>
<tr><td>10. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la diferencia de dos números de hasta dos cifras, presentadas en formato vertical.</td></tr>
<tr><td>11. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la suma de tres sumandos menores que 100, presentadas en formato horizontal.</td></tr>
<tr><td>12. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la diferencia de dos números, con la presencia del cero, presentadas en formato vertical.</td></tr>
<tr><td>13. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la diferencia de dos números.</td></tr>
<tr><td>14. Resuelve situaciones asociadas a una relación directa e inversa de doble, triple o mitad de un número en acciones de “comparar".</td></tr>
<tr><td>15. Resuelve situaciones aditivas en las que se comparan cantidades, con información presentada en un gráfico de barras.</td></tr>
<tr><td>16. Resuelve situaciones aditivas asociadas a acciones de “agregar” y “quitar” en las que se pide hallar la cantidad final.</td></tr>
<tr><td>17. Resuelve situaciones aditivas en acciones de “igualar"</td></tr>
<tr><td>18. Resuelve situaciones aditivas asociadas a acciones de “juntar” y “separar".</td></tr>
<tr><td>19. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la diferencia de dos números de dos cifras, presentadas en enunciado verbal.</td></tr>
<tr><td>20. Resuelve situaciones aditivas donde se pide hallar la suma de cuatro sumandos menores que 100 presentadas en formato horizontal.</td></tr>
</table>

1.7 Justificación e importancia.

La realización de la presente investigación tiene diversos motivos que la justifican, lo que se pretende es efectuar una aportación de carácter teórico, que, desde luego, implica evidencia empírica: ayudar al esclarecimiento de un constructo complejo y dinámico como es el aprendizaje de las matemáticas. Esta aportación consta de dos puntos de impacto; el conceptual y el operacional. El conceptual, por medio de la revisión sistemática de las principales definiciones conceptuales. En tanto que la operacional y aplicativa donde se plasmará el método Singapur y de esta manera los niños afronten el aprendizaje de las matemáticas en la escuela con éxito.

Las matemáticas es una de las áreas más importante en el currículo de educación primaria y que más dificultades se presenta para el niño. Además, un niño de 7 años de edad se encuentra en el segundo grado de primaria y cuenta con un nivel metacognitivo adecuado y esto lo puede ayudarle a afrontar problemas matemáticos.

1.8 Viabilidad.

La investigación es viable, pues se dispuso de los recursos necesarios para llevarlo a cabo. Se buscó la autorización del Colegio Nacional de Aplicación para realizar el estudio.

Por otro lado, es importante porque padres o tutores de los niños y niñas que conformaron la muestra poblacional otorgaron su consentimiento para que los niños y niñas respondan al test, al cuestionario y asistan para la aplicación del método Singapur; ya que ellos desean que sus hijos e hijas desarrollen y potencien sus capacidades en el área de matemática, en especial en la resolución de problemas, para que apliquen estrategias en su aprendizaje de las matemáticas, y desde luego, se hará con la disipación de estos niños y niñas, que constituyen la fuente de los datos.

1.9 Limitaciones.

Las limitaciones que tuvo el presente trabajo de investigación son los siguientes:

1. **RECURSOS ECONÓMICOS**: para la ejecución del presente trabajo de investigación, se contó con los recursos económicos, a fin de solventar los gastos que ocasionan la ejecución del mismo.
2. **RECURSOS HUMANOS:** la falta de especialistas en Huánuco en el aspecto teórico relacionado con el tema de investigación que estamos realizando, tales como la asesoría de expertos que reúnan los requisitos que exige la universidad.
3. **ANTECEDENTES:** la búsqueda de información bibliográfica no hemos encontrado trabajos anteriores que hayan sido desarrollados en relación directa con nuestra investigación; pero hubo algunos estudios similares al tema que estamos tratando, lo que sirvió para la mejor ilustración y contrastación de los resultados.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO.

2.1 Antecedentes.

En el presente trabajo de investigación se encontraron los siguientes trabajos de investigación**:**

2.1.1 A nivel internacional

1. **Mitos y realidades en el aprendizaje de las matemáticas: una experiencia en educación primaria, de Martínez Ortiz, Guadalupe (1997) Facultad de Filosofía y Letras. Universidad Autónoma de Nuevo León;** dicha investigación tuvo como propósito de general establecer la triangulación existente entre el currículo formal, real y el aprendizaje que se da en la realidad del aula con el fin de analizar el 6to grado de primaria así como la metodología utilizada en el proceso didáctico y proporcionar al maestro de sexto grado una

visión general de los postulados metodológicos que el enfoque de la modernización educativa en educación primaria exige conocer y manejar en el aula. Donde llego a la conclusión: 1) Muchos y muy variados han sido los cambios que se han dado en los últimos años en Educación. Cambios que como se dijo, fueron previstos en base a la evolución continua de nuestra sociedad, y sobre todo; a los deficientes resultados que en este ámbito se hablan venido observando. Desde luego, parte importante de esta evolución en todas las disciplinas del saber lo ha sido la matemática, razón por la cual es primordial que su enseñanza en la escuela primaria sea efectiva. 2) Se pudo percibir que las transformaciones fueron hechas, que el enfoque ha sido cambiado, que los libros han sido actualizados; que los manuales para el maestro han sido distribuidos, que se han ofrecido cursos de actualización magisterial y que se han creado algunos incentivos para los maestros. Desafortunadamente también se comprobó que todo ello no ha sido suficiente para que la relación directa y real dentro de las aulas haya sufrido cambio cualitativo alguno -al menos en las aulas donde se llevó a cabo la investigación en el área de matemáticas- por lo que se llegó a la conclusión de que es evidente la necesidad de motivar a los docentes para que se capaciten verdaderamente en lo postulado por el nuevo enfoque de la modernización educativa; de lo contrario, todo el trabajo hecho habrá sido en vano.

2. **Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal, de Elichiribehety, Inés; Rita Otero, María y de los Ángeles, Fanaro**

María (2001). ***Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires***. Dicha investigación tuvo como propósito de general de describir las resoluciones aritméticas y algebraicas realizadas por los sujetos de acuerdo con el año escolar al que pertenecen; que se interpretan como la ejecución de modelos mentales, el estudio es de tipo transversal, desde una perspectiva cognitiva, con 264 alumnos enfrentados a dos problemas matemáticos en el ámbito escolar. Donde llego a la conclusión de que un porcentaje elevado de sujetos intenta algún tipo de solución, orientado por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado, independientemente del año escolar al que pertenecen, y los marcos de resolución adoptados son las manifestaciones externas de las representaciones mentales internas que los sujetos construyen para comprender y resolver; además en todos los segmentos de la escolaridad considerados, los alumnos construyen modelos mentales relacionados con procedimientos algebraicos y/o aritméticos. La interpretación del enunciado del problema que realiza cada estudiante genera modelos idiosincráticos, diferentes y personales para cada sujeto. Sin embargo, las resoluciones permiten identificar características comunes en las producciones de los sujetos de todos los años escolares.

3. **La enseñanza de la suma y la resta en profesores de primero, segundo y tercer grado de educación primaria (2005), de Pérez Gómez, Gerardo Jesús; Peña Ramos ; Martha Olivia, del centro de investigación en alimentación y desarrollo; Cruz Rodríguez;**

Silvia Lorena y Chacón Sotelo, Yadira Guadalupe del instituto de formación docente del estado de sonora, presentado en el XI Congreso Nacional de Investigación Educativa; dicha investigación tuvo como objetivo interpretar la lógica conceptual de la enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta de docentes que se desempeñan en los tres primeros grados de educación primaria ubicados en la zona rural y urbana, con el propósito de analizar la correspondencia con el modelo conceptual que subyace al programa académico de educación básica. La metodología utilizada fue la "teoría fundamentada" para lo cual se entrevistaron a 25 docentes distribuidos en municipios del estado de Sonora. Llegando a las siguientes conclusiones: 1) Los docentes del contexto urbano, en su mayoría, argumentan plantear e inventar problemas, hacer ejercicios con algoritmo convencional de la suma y resta, dirigir la enseñanza, controlar actividades y conductas, memorizar, trabajar en equipo, aspirar a las calificaciones de 10 para el reconocimiento y recompensa económica, su enseñanza se vincula con los contenidos del programa (guía primaria). 2) En la zona rural, afirman realizar actividades de resolución de problemas, incluyen elementos del contexto mediato; usan métodos y estrategias metacognitivas relacionadas con el monitoreo de resolución de problema, dominio de conocimiento, definiciones, desarrollan habilidades creativas, hacen uso de mayor variabilidad de estrategias, retoman los contenidos del programa académico como herramienta de evaluación (guía secundaria), además, se valen de los elementos del contexto como material didáctico y proponen situaciones recurriendo a los libros de texto. 3) El esquema de enseñanza docente de la zona rural y urbano se desarrolla a partir de dos escenarios: el primero en qué se debe aprender en base a los contenidos del programa académico, el segundo escenario, es en referente a la utilidad cotidiana de lo aprendido, *por qué y para qué aprender de la suma y resta*, la acción de hacer y saber hacer. Los escenarios del aprendizaje no son diferentes para las zonas rurales, urbanas, solo difiere en la variabilidad de las técnicas utilizadas por parte del docente, en el uso y manejo de materiales didáctico. 4) Los niños son expuestos a situaciones o ejercicios representados a modo de narración oral, escrita, gráfica, con dibujos o de manera concreta; por otro lado, algunos son estimulados a utilizar diferentes formas de representarlos. Estos dos aspectos se complementan y permiten a los niños aprender a desarrollar estrategias más flexibles para la resolución de problemas muy diversos de matemáticas. 5) El alumno se conceptualiza como receptor y no como constructor del conocimiento, asimismo el maestro se coloca como el portador del saber y su papel es inyectarlo en las mentes infantiles, el aprendizaje colaborativo está ausente en la practicas educativas, los contendido por enseñar se basan en el libro de texto, indicando los escenarios y estrategias de aprendizaje. Ignoran algunas variables sociales y pedagógicas y someten a los alumnos al aprendizaje.

4. **Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas, de Martin Amador, Esther (2006). Del Departamento de Psicología, Evolutiva y Psicobiología. *Universidad de la Laguna*,** dicha investigación tuvo como propósito

conocer las distintas creencias que mantiene un grupo de profesores acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y así como constatar si dichas creencias son coherentes o no con sus prácticas en el aula. En dicho estudio se tuvo como muestra a 62 profesores. Donde llego a las siguientes conclusiones: A grandes rasgos, se puede describir la creencia como la convicción que tienen ciertos profesores de que las Matemáticas son, fundamentalmente. algoritmos y que el principal objetivo de esta materia es conseguir que los alumnos dominen una serie de destrezas que le permitan realizar de manera mecánica (a través de la repetición de ejercicios) las operaciones aritméticas. Las operaciones aritméticas, según esta concepción, son presentadas al alumno de forma de contextualizada y carentes de significado. Los problemas aritméticos son contemplados como los casos en que se debe aplicar el cálculo operatorio. Se percibe, pues, la enseñanza de las Matemáticas como mera transmisión de conocimientos, como un proceso de comunicar "lo ya establecido" a la mente de los *niños.* El alumno, según esta creencia, es conceptuado como un ser pasivo y totalmente receptivo, incapaz de elaboraciones propias.

5. **El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos (2004) de Nuria, Gil Ignacio; Blanco Nieto, Lorenzo y Guerrero Barona, Eloísa de la Universidad de Extremadura**. En este trabajo se estudia la influencia de las creencias, actitudes y emociones (afectividad) que el alumnado de 3º y 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria experimenta cuando se enfrenta a la resolución de problemas de matemáticas. El objetivo que se

persigue es poner de manifiesto el importante papel que desempeñan los afectos en el éxito o fracaso del aprendizaje matemático. A través de un cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las matemáticas y trabajando sobre una muestra de 346 alumnos de Badajoz, los resultados obtenidos indican que el género influye en los afectos de los estudiantes hacia esta materia.

6. **La aplicación y uso del sistema de numeración decimal y valor posicional (2007), de Pedroza Guerrero, María de la Luz Romana; de la Universidad Pedagógica Nacional.** Dicha investigación tuvo como objetivo pretender que los alumnos adquieran conocimientos básicos de las matemáticas y desarrollen la habilidad para utilizar y entender el sentido y el significado de los números naturales, así como aplicar los conocimientos construidos sobre el sistema de numeración decimal al formar números de hasta seis cifras, compararlos, ordenarlos y resolver problemas. Propiciar que los alumnos lean, escriban números de hasta doce cifras aplicando las reglas de base y posición del sistema de numeración decimal. La presente investigación se aplicó en los niños de sexto grado de primaria; llegando a las siguientes conclusiones:1) El desarrollo cognitivo de los niños depende de la etapa y del desarrollo mental en el que se encuentren, a esto hay que agregarle otro aspecto importante y que interviene para que estos aprendan significativamente: el contexto social, la familia en el que se desarrollen, es decir los conocimientos previos que tengan. 2) El papel de docente, así como el método y estrategias que aplique durante la enseñanza de los contenidos es fundamental, de él

dependerá que los niños se sientan a gusto dentro del salón, con la confianza suficiente para expresarle sus inquietudes y tratar de solucionar sus carencias. Ya que para elevar la calidad del aprendizaje es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés. 3) La interacción y el fortalecimiento de habilidades físicas y mentales a través de juegos nos ayudaran a lograr una mejor enseñanza-aprendizaje.

2.1.2 A nivel nacional

1. **Aplicación de estrategias metacognitivas para mejorar la comprensión lectora en alumnos de educación primaria de Condori Salazar, Laura Soledad (2006). Puno.** Cuyo propósito fue de mejorar la comprensión lectora aplicando estrategias meta-cognitivas, en los niños del cuarto grado, sección B de la Institución educativa pública Nº 70537 – Cabanillas; fue un estudio de tipo experimental, con un total de 50 estudiantes del cuarto grado de educación primaria aplicado en la Institución Educativa Primaria No. 70 537, con edades comprendidas de 9 a 10 años con un diseño de investigación con grupo Control y Experimental. Donde llegó a la conclusión *de que por medio de la aplicación de estrategias metacognitivas de lectura se logró mejorar la comprensión lectora de los estudiantes del cuarto grado de la Institución Educativa Primaria No. 70 537 del distrito de Cabanillas. el aporte de dicha investigación*

fue de diseñar un conjunto de estrategias metacognitivas para mejorar la compresión lectora.

2. **Eficacia de la educación matemática en instituciones educativas de primaria rural quechua de Azángaro- Puno. Tumi Quispe, Julio Adalberto. Universidad Nacional Mayor De San Marcos, Facultad De Educación, Unidad De Postgrado**, dicha investigación tuvo como propósito general de analizar la eficacia de la educación matemática del modelo pedagógico Educación Intercultural Bilingüe, en los resultados del rendimiento, en la idoneidad didáctica, en las características de la dimensión cognitiva y epistémica del aprendizaje de matemática, en los niños y niñas de tercer y cuarto grado de instituciones educativas de primaria rural quechua de Azángaro-Puno, en comparación a otros que no utilizan este modelo. y cuyos objetivos fueron Comparar el rendimiento escolar en la prueba de matemática en una muestra de niños de tercer y cuarto grado de instituciones educativas de primaria rural quechua de Azángaro-Puno con y sin el modelo EIB de los mismos contextos y Analizar comparativamente la eficacia de la educación matemática del modelo pedagógico EIB sobre el nivel de idoneidad didáctica en las características de la dimensión cognitiva del aprendizaje de matemática. fue de tipo y nivel transaccional – Descriptivo, con una muestra de 54 niños, el tipo de diseño de la muestra fue aleatorio simple; donde llego a las siguientes conclusiones de que las dificultades que tienen los niños de tercer y cuarto grado de primaria rural en el aprendizaje de la matemática dependen del modelo de educación matemática, del entorno socio cultural, de las creencias del

maestro en la matemática del modelo educativo y de las expectativas de los niños hacia la matemática.

3. **Modelos de Interacción como Estrategia Metodológica en la Resolución de Problemas para el Aprendizaje de la Matemática en los alumnos del 6to. Grado de Educación Primaria, en las Instituciones Educativas Estatales, UGEL N° 1, San Juan de Miraflores (2010), de Jara Abunda, Miguel Alejandro, de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle**, Cuyo propósito es Conocer cómo influyen los modelos de interacción como estrategia metodológica para la resolución de problemas (normativo, iniciativo y aproximativo, modelo Guzmán y Polya) en el mejor aprendizaje del área matemática, de los alumnos del sexto grado de educación primaria en las Instituciones Educativas Estatales, UGEL N" 1, Lurín. La clase investigación fue cuantitativa, el tipo aplicada. con una población de 56 alumnos. Dicha investigación llego a la conclusión de que los modelos de resolución de problemas: normativo, iniciativo. aproximativo, Polya, y Guzmán ayudan al aprendizaje de los contenidos del área Matemática, de los alumnos del sexto grado de Educación Primaria, en la Institución Educativa N" 7098, Villa Alejandro, Lurín y La aplicación de estrategias para la resolución de problemas matemáticos ayudan a incrementar el rendimiento conceptual en los alumnos en el área Matemática en forma significativa.

4. **Efectividad del programa “gpa-resol” en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos**

instituciones educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de San Luis. (2012); de Aliaga Tovar, Jaime y Gonzales More, Luz Elena, sustentado en la Pontífice Universidad Católica del Perú. Dicha investigación tuvo como objetivo principal establecer la efectividad del programa "GPA-RESOL" en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivo y sustractivo en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de San Luis. Dicha investigación utilizó en el tamaño de la muestra a 49 sujetos repartidos en dos grupos pre formados, uno experimental, de 25 sujetos de la I.E de gestión particular y 24 sujetos de la I.E. de gestión estatal. El grupo control está formado por 25 sujetos de la I.E de gestión particular y 20 sujetos de la I.E. de gestión estatal. Llegaron a las siguientes conclusiones: 1) El nivel de logro en resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas, una de gestión estatal y otra particular del distrito de San Luis después de la aplicación del programa GPA - RESOL es altamente significativo. En el momento pre test el grupo experimental difiere del grupo control y al interior de los grupos, los estudiantes de la institución de gestión privada evidencian un mejor nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos. 2) En el momento post test el grupo experimental tiene mayor nivel, pero al interior del grupo experimental el tipo de gestión no evidenció mayor impacto en el nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos.

2.1.3 A nivel local.

1. **Efectividad del Programa Office 2000 en el Aprendizaje de los Contenidos del Área Lógico Matemática en los** Alumnos **del Segundo Grado del Centro Educativo Nº 32231. "Hipólito Unanue"- OBAS. 2004. De Cisneros Rojas, Manuel y otros,** quien llego a las siguientes conclusiones: 1) Se probó la hipótesis a un nivel de confianza de 0.05 con grado de libertad 72, se encontró la "T" calculada igual a 5.33 frente a la "t" crítica igual a 3.46, por lo cual se afirma que el Programa Office 2000 es efectivo para el aprendizaje de los contenidos del área lógico matemático en los alumnos del segundo grado del Centro Educativo "Hipólito Unanue" de Obas. 2) Se evaluó el rendimiento académico de los alumnos del segundo grado en el área lógico matemático, antes obteniendo una nota promedio de 10.92 y después se obtuvo un promedio de 13.51, aplicando el Programa Office 2000, comprobándose que las diferencias de notas en el pre y pos test son significativas.3) Se adecuó, aplicó y validó el Programa Office 2000 en los alumnos del segundo grado, para mejorar el aprendizaje de los contenidos en el área lógico matemático.4) El aprendizaje del área lógico matemático se hace significativo cuando se hace uso de otros recursos como el Programa Office 2000
2. **El método del conjunto básico en el desarrollo de la lógica matemática en niños de 6-7 años de edad en las Instituciones Educativas Públicas de la Provincia de Huánuco (2009) de Postijo Remache, Félix;** quien llego a las siguientes conclusiones: 1) Se ha confirmado que los ejercicios operatorios inducen a la adquisición de

la noción de imagen, idea y concepto de números naturales a partir de la observación viva de los elementos de un conjunto o encuentro de conjuntos en la acción operatoria. 2) Se ha confirmado que los ejercicios operatorios facilitan un mejor rendimiento en la solución de ejercicios de lógica matemática en alumnos (niños) de 6 – 7 años de edad del nivel de educación primaria.3) Se diseñó y elaboró los procedimientos de la aplicación del Método del Conjunto Básico, en función de los teóricos del desarrollo de la lógica matemática, por lo que queda establecida los argumentos científicos para posteriores investigaciones. 4) Se desarrolló el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática en los alumnos (niños) de 6 - 7 años de edad del primer grado de educación primaria del Grupo Experimental (G.E) a diferencia del Grupo Control (G.C), desarrollándose significativamente la lógica matemática a partir de la observación, diferenciación y análisis de los elementos del conjunto y la operación de suma resta de los números naturales (unidades y decenas). 5) Se muestra la diferencia significativa entre el nivel de aprendizaje de los alumnos (niños) de 6 – 7 años de edad del Grupo Experimental (G.E), que es eminentemente positivo, y el Grupo Control (G.C) que es negativo, como resultado muestra de la Media (estadístico) del Pos test y en el Grupo Experimental (G.E) el resultado de la muestra del Análisis de la Varianza (ANOVA).

2.2 Bases teóricas.

En la actualidad hay mucha preocupación de docentes, pedagogos y psicólogos sobre el aprendizaje – enseñanza de la matemática. Por lo que: *«el aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro sólo debe provocar»* (Brousseau, 1994, p. 66).

Que la construcción de los conocimientos da lugar a la existencia de un real aprendizaje. Al respecto Martínez Recio y Otros (2004) afirma que:

> **«el proceso de aprendizaje del alumno debe basarse en su propia actividad creadora, en sus descubrimientos personales, en sus motivaciones intrínsecas, debiendo ser la función del profesor la de orientar, guiar; animar, pero no la de fuente fundamental de información» (p. 18)**

2.2.1 Aprendizaje de la matemática.

2.2.1.1 Fundamento psicológico de la matemática.

2.2.1.1.1 El pensamiento matemático infantil desde el enfoque cognitivo.

2.2.1.1.1.1 El pensamiento surge de las acciones.

Según la teoría de Jean Piaget sobre el desarrollo de la inteligencia sostiene que todo pensamiento surge de **acciones** y los conceptos matemáticos tienen su origen en los actos que el sujeto lleva a cabo con los objetos y no en los objetos mismos. Esta sutil diferencia marca la adquisición del conocimiento lógico- matemático. Es ese sentido el pensamiento se desarrolla en los niños(as):

- El niño aprende en el medio interactuando con los objetos.
- En el medio adquiere las representaciones mentales que se transmitirán a través de la simbolización
- El conocimiento se construye, a través de un desequilibrio, lo logra a través de la asimilación adaptación y acomodación

- El conocimiento se adquiere cuando se acomoda a sus estructuras cognitivas.

Piaget sostiene que una operación implica siempre una forma de acción: es necesario «operar» sobre el mundo para comprenderlo. Por lo que:

> ***«la acción es el instrumento por el que el sujeto entra en contacto con los objetos y los conoce modificándolos; y es al mismo tiempo la manifestación externa del conocimiento preexistente o, más precisamente, de la forma previa en que el conocimiento está organizado internamente.»*** **(Gutiérrez, 2005, p. 72)**

Estas operaciones no se dan aisladamente, sino que se organizan en un sistema mayor de estructuras cognitivas interrelacionadas. La experiencia física que van acumulando los niños ayuda a estructurar su pensamiento lógico-matemático. Cuanto mejor sea la estructura, mayor será la comprensión del niño sobre los hechos de su realidad.

Podemos afirmar que la característica del pensamiento operatorio concreto es el trabajo mental, que no pude prescindir, en un primer momento, de la sustancia material, de lo perceptivo. Luego va desligándose de los objetos físicos: es capaz de anticipar, cambiar, retroceder sobre el procedimiento realizado, pero lo hace mentalmente, en cuyo caso se vuelve una acción controlada conscientemente. Esta acción es interiorizada e integrada a su estructura mental.

Si observamos al niño en esta etapa podemos ver en él o ella un investigador del mundo, con una curiosidad innata y una gran capacidad para formular hipótesis: a través de su actividad comprueba lo que piensa, adquiere experiencia sobre y con los objetos que manipula. Por ello, la experiencia y el conocimiento preexistente, así como el lenguaje juegan un papel importante en el aprendizaje.

Tal como lo afirma Lovell (1999)

> **«las matemáticas son, ante todo, una actividad mental, y el hecho de escribir cifras en un papel es una mera ayuda. Por otra parte, hay muchos sistemas de conceptos relacionados con los puramente matemáticos, como son los numéricos y los espaciales; las matemáticas estudian las relaciones entre ellos y las operaciones mentales o cálculos a que pueden dar lugar. Para ayudar al niño a desarrollar sus conceptos matemáticos tenemos que enseñarle su lenguaje y sus símbolos. Sin embargo, la comprensión de los conceptos matemáticos no es todo para la formación de la capacidad matemática. Esta exige, además de la comprensión de conceptos y del conocimiento del lenguaje y de los símbolos, la de los métodos y las demostraciones. Algunas de éstas tienen que ser aprendidas, retenidas y reproducidas; han de ser combinadas con otros conceptos, símbolos, métodos y demostraciones; es necesario operar conjuntamente con todo ello y "manejarlo" para que sirva a las tareas de matemáticas. El niño no podrá llegar muy lejos en su razonamiento matemático a menos que posea los conceptos, aunque no sea capaz de formular la definición de los mismos en términos verbales.» (p. 33-34)**

2.2.1.1.1.2 Anticipación, reversibilidad y conservación.

La habilidad fundamental en la que se basa todo conocimiento lógico y matemático (internamente estable) es la reversibilidad, que es «*la capacidad de ejecutar mentalmente una misma acción en los dos sentidos de su recorrido, estando consciente de que se trata de la misma acción*» (Gaonac'h & Golder, 2005, p. 112); es decir, la posibilidad permanente de volver con el pensamiento al propio punto de partida. La reversibilidad requiere que los niños coordinen operaciones de carácter retroactivo (hacia atrás) y procesos de anticipación (hacia delante). Por lo que «gracias a la reversibilidad, el niño puede realizar determinado número de operaciones intelectuales» (Gaonac'h & Golder, 2005, p. 112)

Acompañando el pensamiento reversible tenemos la conservación del objeto. «*pude definirse el concepto de un objeto* *como la comprensión por parte del niño de que un objeto existe permanentemente y fuera de él». *(Richmond, 2000, p. 25). En esto hay una gradual adquisición de la conservación dé número, masa, peso, volumen, tiempo según niveles de maduración cognitiva que le permiten al niño comprender las transformaciones que tiene lugar en la realidad. Asimismo, logra diferenciar que en el objeto hay aspectos que se conservan y otros que se modifican. Los aspectos que se conservan se denominan invariantes. Esto se relaciona con una mayor movilidad cognitiva, con mayor reflexión y aplicación de principios lógicos, pues su pensamiento deja de ser egocéntrico para descentrarse hacia otros puntos de vista. Cuando se llega a ese punto «*el objeto cobra una existencia que haya que considerar como independiente de la acción que ha provocado*» (Richmond, 2000, p. 25). Piaget (1965) señala: ***«****Por tanto, el niño sitúa los movimientos de su propia mano entre los de aquellos otros cuerpos externos, dotados a éstos de una actividad complementaria de la propiamente suya.*» (p.68)

2.2.1.1.1.3 Del razonamiento intuitivo al hipotético – deductivo.

Según Zubiría Remy (2004) manifiesta que ***«****durante la etapa pre operacional, el niño genera un razonamiento intuitivo en relación con acciones vinculados a objetos del mundo exterior con base en sus propias configuraciones perceptivas*». (p.44). A partir de ello los niños pueden resolver los problemas que se les plantean sobre la base de datos concretos y asequibles a una lógica que aún no es abstracta y reflexiva. Su inteligencia atraviesa una fase intermedia entre la forma de razonar intuitiva y la hipotética- deductiva. Las características de su razonamiento se expresan según Sánchez & Fernández (2005, p. 26) en:

- **Razonamiento verbal concreto**: estructurado por proposiciones cuya implicación es eficaz en términos concretos. No lo es tanto si se trata de conceptos más universales.
- **Sincretismo del razonamiento**: el hecho de que la inteligencia se mueva en un plano globalista provoca que la mente no proceda al análisis y comparación de términos, sino a su simple aprehensión.
- **Razonamiento silogístico**: el pensamiento busca explicaciones lógicas, va desarrollando su capacidad de pasar de lo general a lo particular, en base a reglas, propio del razonamiento deductivo.

En los niños acontece un proceso de maduración cognitiva que progresivamente le conduce hacia el razonamiento hipotético-deductivo y la Matemática contribuye en ese cambio.

2.2.1.1.1.4 Pensamiento y comunicación.

Uno de los aspectos fundamentales que favorece el desarrollo del pensamiento matemático es la expresión oral mediante el diálogo, la discusión, la argumentación de ideas, la revisión y perfeccionamiento de éstas al contrastar con el grupo de compañeros y el docente. La comunicación sirve de apoyo en la construcción de significados y en una mayor comprensión matemática. Tal es así que «*La comunicación ayuda compartir conocimientos, a clarificar su pensamiento y desarrollar sus esquemas conceptuales*». (Hernández & Soriano, 1997, p. 121)

Por tal motivo, se pretende que las situaciones propuestas a los niños favorezcan su habilidad para expresar ideas, explicar a sus compañeros sus estrategias para resolver las situaciones problemáticas, argumentar sus formas de solución y reconocer sus errores.

El hecho de que los niños expresen sus ideas permite entender qué razonamiento siguen para la resolución de un problema y, así proponer situaciones que favorezcan su proceso de aprender a pensar. Además, ello les permite autorregular su proceso frente a las tareas matemáticas, ser más consciente de su actuación en la resolución de problemas y conocer mejor su forma de aprender.

Desde una perspectiva socio cultural, se destaca la importancia de la mediación de lenguaje para la construcción del pensamiento. Por eso, afirma Vygotsky (1993): «el pensamiento y el lenguaje son la clave para la comprensión de la naturaleza de la conciencia humana.» (p.98). El niño accede a la conceptualización a través de operaciones simbólicas propias de su cultura. El dominio del lenguaje es considerado un elemento esencial para estar en capacidad de formar un concepto, para comprender e interpretar correctamente estructuras lingüísticas.

2.2.1.1.1.5 Pensamiento y comprensión.

El niño mientras aprende va modificando su estructura mental, la manera en que se organiza su pensamiento. Cuando se le presenta una nueva situación, la relaciona con experiencias previas. La primera tendencia es interpretar la situación y buscar soluciones por medio de las estructuras y conocimientos previos. A este proceso lo llama Piaget asimilación. Cuando estas estructuras previas no le sirven para explicar o resolver la situación, el aprendiz se ve obligado a cambiar estas estructuras por otras. Este proceso de acomodación le lleva a restablecer el equilibrio.

Lo interesante es que, al establecer nuevas conexiones y relaciones entre conceptos, se originan cambios en su modo de pensar. En ello juega un papel importante la comprensión.

Es así como Posada, Gómez, & Ramírez (2005) afirman que:

> ***«de los seis a los siete años suele terminar la fase preoperacional y empezar la fase de operaciones concretas. El niño ya puede contar, aunque no tenga el concepto de número. Primero actúa y después piensa. Emplea un lenguaje cada vez más apropiado aún sin entender completamente el significado; por ejemplo, distingue el brazo derecho del izquierdo, pero no tiene claro el concepto de derecha e izquierda. Al final de la etapa preoperacional, el niño adquiere conciencia de la presencia de dos cualidades simultáneas en un objeto, pero no de las relaciones de dos objetos o ideas. Su lenguaje es un monólogo colectivo similar al juego paralelo.*» p. 146)**

Los cambios de las pautas de pensamiento son esenciales para la comprensión, que está relacionada con el captar el sentido de lo que se hace, generar nuevas relaciones y hallar aplicación a lo que se aprende. Nos referimos a un aprendizaje comprensivo de la matemática. En ese sentido, se habla de una comprensión relacional y comprensión instrumental, que fundamento teórico del Método Singapur, que es tratado apartados más abajo.

2.2.1.1.2 Formación de los conceptos matemáticos.

Consideramos de interés conocer en el aprendizaje de la Matemática cómo ocurre la formación de los conceptos u objetos matemáticos desde un enfoque cognitivo. Sabemos que, en el niño, los conceptos no surgen espontánea y totalmente elaborados, sino que van evolucionando, ampliando y perfeccionando a lo largo de la vida. Por ejemplo, los niños elaboran los primeros conceptos numéricos de manera intuitiva, pero progresivamente a medida de sus experiencias logran el concepto de número.

2.2.1.1.2.1 Principales nociones teóricas de base.

Para comprender la formación de conceptos matemáticos, es decir comprender la apropiación e integración de éstos a la estructura cognitiva del aprendiz, se requiere la comprensión de ciertas nociones o constructos. Estos constructos son:

2.2.1.1.2.1.1 Representaciones externas e internas. Sistema de representación.

El reconocimiento del papel fundamental que la representación juega en el trabajo escolar ha sido objeto de estudio y reflexión creciente en los últimos años. Existen dos tipos de representaciones: las internas y las externas.

Una representación matemática puede ser interpretada como Goldin y Javier (citado por Gadino, 2003), en lo expresa:

- **Una situación física**, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concretización de ideas matemáticas. Por ejemplo: la disposición concreta del material multibase o del ábaco para mostrar la representación de una determinada cantidad.

- **Un constructo matemático formal**, o un sistema de constructos, que puede representar situaciones mediante símbolos o mediante un sistema de símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas-o conforme a definiciones precisas-incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos. Por ejemplo: Una ecuación o una fórmula específica.

- **Una configuración cognitiva interna** (una imagen mental), individual, o un sistema de tales configuraciones inferida a partir de la conducta o la introspección que describe algunos aspectos de los procesos de pensamiento matemático y la resolución de problemas. Ejemplo: La utilización de una determinada técnica por el sujeto al tener que resolver un problema.

- Hay que considerar que las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada, sino que adquieren sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones establecidas. Ello constituye un sistema de representación, que en sí mismo es una estructura de relaciones que conecta las representaciones matemáticas de manera significativa.

Sistema de representación = Estructura de relaciones matemáticas conectadas de manera significativa.

- Las matemáticas tienen determinados sistemas representacionales que incluyen las convenciones que lo configuran, así como las relaciones con otros objetos y sistemas matemáticos. Son sistemas representacionales: sistemas numéricos; sistemas lógicos, sistemas espaciales, sistemas algebraicos.

A continuación, vamos a referirnos a las representaciones externas e internas, así como a sus características principales:

A. ***Representaciones internas****.* Son las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir. También se incluye el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y los heurísticos de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a la Matemática.

Las configuraciones cognitivas internas (o imágenes mentales) pueden tener o no tener, semejanza estructural con los sistemas externos. Estas representaciones cognitivas internas se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables.

Este tipo de representaciones internas son importantes a tener en cuenta durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Veamos cuáles son:

- Verbales o sintácticas: capacidades relativas al uso del lenguaje natural por los estudiantes, vocabulario matemático y no matemático, incluye el uso de la gramática y la sintaxis.

- Sistemas figúrales y gestuales: incluyen configuraciones cognitivas espaciales y visuales, «imágenes mentales»; esquemas gestuales y corporales.
- Manipulación mental de notaciones formales (numerales, operaciones aritméticas, visualización de pasos simbólicos para resolver una ecuación).
- Procesos estratégicos y heurísticos: «ensayo y error», «descomposición en fases», etc.
- Sistemas de representación afectivos, emociones, actitudes, creencias y valores sobre las matemáticas, o sobre sí mismos en relación a la Matemática.

B. ***Representaciones externas***. Son las representaciones que comunicamos fácilmente a otras personas. Comprenden las notaciones simbólicas y gráficas convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la representación en coordenadas cartesianas, entre otras. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos o software educativo o Internet. Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar).

El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación: en el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica. Por tanto, los sistemas de representación son constructos de carácter convencional. Por ejemplo: El número nueve puede simbolizarse de diferentes maneras:

El conocimiento de las matemáticas viene mediado por un sistema semiótico –como nuestro sistema numérico decimal- de gran complejidad y riqueza. Además, es un sistema externo de representación con reglas bien determinadas que potencia el razonamiento deductivo, el cálculo y otros procesos cognitivos inherentes al pensamiento matemático.

La utilización del lenguaje matemático en las primeras edades está basada principalmente en el uso de números y operaciones, entendiendo por número «*expresión de una cantidad con relación a su unidad*» y operación como «*conjunto de reglas que permiten, partiendo de una o varias cantidades o expresiones, llamados datos, obtener otras cantidades o expresiones llamadas resultados*». Estos conocimientos matemáticos, permiten al niño apreciar la cantidad de un grupo de objetos, comparar el número de objetos de dos colecciones, juzgar el resultado de la acción de añadir o de quitar, comparar la colección entera con alguna de sus partes, entre otros.

Uso de la información sobre las representaciones matemáticas externas e internas para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática:

1º. En primer lugar, debemos tener presente que la interacción entre ambas representaciones es fundamental para el aprendizaje y enseñanza. Las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes están ligadas a la interiorización de representaciones externas, y viceversa.

2º. Las representaciones mentales se infieren a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, o la producción de representaciones externas.

3º. Nuestra acción didáctica debe procurar el desarrollo de sistemas internos eficientes de representación en los estudiantes que correspondan de manera coherente e interactúen bien, con los sistemas externos convencionalmente establecidos de las matemáticas.

Un concepto matemático se aprende y se puede aplicar mejor, en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con relaciones funcionales entre ellas. Las conexiones entre representaciones se pueden basar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación que se hacen notara los estudiantes.

2.2.1.1.2.1.2 Esquemas conceptuales.

Un esquema *«es una estructura de datos para representar conceptos genéricos almacenados en la memoria*», tal como lo expresa Rumelhart y Ortony citados por Pozo (2006), por lo que es una totalidad organizada que permite a un sujeto generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de las situaciones en la que se pone en juego. Un esquema puede ser, por ejemplo, dibujar la imagen simétrica de una figura plana solo con regla y compás. El usar este juego de compás y regla implica al menos el concepto de ángulo recto y el teorema de que la simetría conserva los ángulos.

Cuando un sujeto invoca un esquema es con el fin de comprender, tratar con, organizar o dar sentido a una situación problema dado; en realidad, revela su conocimiento sobre un concepto matemático particular. Por eso se afirma que es en los esquemas donde se debe investigar los conocimientos en acto del sujeto. Existen esquemas para los números, aritmética, funciones, etc. Estos esquemas deben estar interrelacionados en una organización compleja más amplia.

El esquema conceptual no siempre es verbal, no es sólo una asociación mental del nombre del concepto, puede ser una representación visual del concepto. También incluye las experiencias y las impresiones vividas en relación al mismo. Para ser más precisos, podemos concebir el esquema como la estructura abstracta de una imagen, un patrón organizado sobre lo que hay de «repetible» y «generalizable» en una acción.

Funciones principales: integra conocimiento existente y es un instrumento mental para la adquisición de nuevo conocimiento.

2.2.1.1.2.1.3 Abstracción perceptual y reflexiva.

La abstracción perceptual - empírica es aquella que provee al sujeto información sobre las propiedades físicas de los objetos. Esta actividad genera un conocimiento físico de los objetos. Como lo expone Kamii & Devries (1983):

> **«La abstracción empírica es la información que se obtiene acerca de las propiedades físicas de los propios objetos mediante la experiencia o acción, como decíamos el niño puede centrarse en un aspecto o en algunos haciendo caso omiso de otros. Por ejemplo, cuando el niño se fija en una pelota observa que es redonda, se centra en esta propiedad y, en ese momento, no hace caso de otras como peso y color. Cuando deja caer la pelota y descubre que rebota, se centra en este hecho y hace caso omiso de otros. Esta información lo organiza a partir de sus observaciones.» (p. 15)**

En cambio, la abstracción reflexiva se concibe como la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre tales objetos. En la base del conocimiento lógico- matemático está la abstracción reflexiva, puesto que proviene de la acción del sujeto al introducir relaciones en o entre los objetos. Piaget (1973) expresa que:

> «***…las operaciones lógico-matemáticas del sujeto se desarrollarían de manera autónoma por abstracciones reflejas a partir de coordinaciones generales de sus acciones y, en la medida del progreso de esta construcción endógena, los instrumentos operatorios nuevamente elaborados, nivel a nivel, serían, cada vez, atribuidos a los objetos, lo que conduciría a la formación de nuevos modos de explicación, y de ahí a nuevas estructuras causales.*» *(p.16)***

Tengamos presente que la manipulación física se vuelve innecesaria cuando el niño deviene en ordenar, cuantificar objetos en su mente, en este punto la acción está interiorizada y la abstracción reflexiva cumple su papel. Como lo explica Kamii & Devries (1983):

> «***El conocimiento lógico-matemático supone un conocimiento físico sobre los objetos (abstracción perceptiva) pero comprende las relaciones que crea el sujeto e introduce en o entre los objetos. Estas relaciones entre objetos, le permiten organizar, agrupar, comparar, etc. la fuente del conocimiento lógico-matemático está pues principalmente en el sujeto, es decir, en la manera cómo éste organiza los objetos de su realidad. El niño realiza acciones con los objetos y va abstrayendo lo que hace, introduce relaciones (tamaño, cantidad, orden, grupos, etc.) entre dos objetos o más a través de la acción física o mental. Por ejemplo: el niño conoce el color rojo (perceptual) luego agrupa objetos por su característica de ser rojos; el niño hace seriaciones según el tamaño de un grupo de objetos.***» **(p. 16)**

Experiencias con los objetos = abstracción reflexiva = conocimiento lógico matemático

La abstracción reflexiva es uno de los mecanismos que incide con mayor fuerza en la equilibración, es el proceso en el que las acciones u operaciones del sujeto se proyectan en un nuevo plano y son sometidas a una reorganización. Dicha reorganización no supone que lo adquirido anteriormente sea eliminado, sino que se integrará en una unidad superior. En ese sentido, «*La abstracción reflexiva es constructiva y el niño en la interacción con su realidad concreta construye representaciones o imágenes mentales.*» (Kamii & Devries, 1983, p. 16)

Piaget (1973) nos dice que «*Las operaciones lógico-algebraicas del sujeto consisten en transformar los objetos concretos o abstractos enriqueciéndolos con formas nuevas (clases, orden, correspondencias o morfismos, etc.), cuya producción procede por abstracciones reflejas a partir de* *operaciones de rango inferior o de las coordinaciones generales de la acción.*» *(p. 24)*

Una abstracción bien lograda, favorece una mejor transferencia a otras situaciones

2.2.1.1.2.1.4 Concepto matemático.

Según Godino, Batanero, & Font (2004), manifiestan que «*el concepto tiene una naturaleza dual, es una idea matemática en su forma «oficial»-como un constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento ideal. El concepto tiene una dimensión operacional y estructural, que son complementarias.*»

El concepto visto como un objeto abstracto, con una cierta estructura descrita mediante definiciones estructurales, nos lleva a considerarlo como algo real que existe en algún lugar del espacio y del tiempo. Desde la dimensión operacional, el concepto es una entidad más bien potencial, adquiere existencia en cada circunstancia mediante una secuencia de acciones. Por ejemplo: la noción de función dada como un conjunto de pares ordenados responde a una descripción estructural, mientras que al proporcionar un proceso de cálculo de los valores imágenes a partir de los originales se tiene una descripción operacional.

Según Skemp (1999) afirma que «*los conceptos de un orden más elevado que aquellos que un estudiante ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándole para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos.*» *(p. 36)*

2.2.1.1.2.2 Proceso de formación de los conceptos

Podemos decir que antes del proceso de la formación de los conceptos, se inicia con los percepto, que son:

> «***estímulos sonoros, táctiles y olfativos del mundo externo llegan por la vía del sistema nervioso central al órgano sensorial adecuado, son sometidos a un proceso de filtración (…). Después que ha tenido lugar esta selección, los estímulos llegan a la corteza cerebral y a las áreas conexas del cerebro medio. En ese momento experimentamos sensaciones. (…). La percepción resulta del refuerzo de esas sensaciones con experiencias anteriores, ideas, imágenes, expectativas y actitud, (…) el aprendizaje juega un importante papel en la interpretación que damos de esas sensaciones***» **(Lovell, 1999, p. 24-25)**

Un concepto es definido como una «*generalización a partir de datos relacionados, y posibilita responder a, o pensar en estímulos específicos o perceptos de una manera determinada. Por esto, un concepto equivale a un juicio y se utiliza como un criterio. Los conceptos parecen proceder de las percepciones (…)*» (Lovell, 1999, p. 25)

El concepto en matemática se entiende como el reflejo de una clase de individuos, procesos y relaciones de la realidad objetiva sobre la base de sus características invariantes. A su vez posee contenido el cual abarca todas las características esenciales comunes a los objetos considerados como invariantes para la formación del concepto y extensión que comprende a todos los objetos que pertenecen al concepto de acuerdo con su contenido.

El concepto matemático según Lovell (1999) «tiene su origen en los actos que el niño lleva acabo con los objetos, y no en los objetos mismos (…). La habilidad fundamental en que se basa todo conocimiento lógico y matemático (internamente estable) es la reversibilidad, es decir, la posibilidad permanente de volver con el pensamiento al propio punto de partida.» (p. 29-31)

Lovell (1999) comentó, que:

«***para Piaget, el tipo de concepto que se desarrolla depende esencialmente, del nivel de abstracción o disociación de que es capaz el niño, y así, en correspondencia, de la calidad de la secuencia de acción en la mente, denominadas schemata o esquema, que el niño puede elaborar*» *(p. 32)***

Finalmente, la definición es el resultado de la operación lógica mediante la cual se establece cuál es el contenido del concepto o lo que significa el término que designa al concepto. Como ejemplo tenemos: ***El TRIÁNGULO: concepto: triángulo definición: Clase de los polígonos de tres lados***.

La importancia de la elaboración de conceptos y sus definiciones es fundamental para la comprensión de relaciones matemáticas, para el desarrollo de la capacidad de aplicar lo aprendido en forma segura y creadora, para el adiestramiento lógico - lingüístico, contribuye al desarrollo del pensamiento lógico, permite transmitir nociones acerca de la teoría del conocimiento.

Nosotros para formar los conceptos; acomodamos la situación presente a nuestra experiencia pasada. Las nuevas experiencias u objetos se integran a una clase. La actividad es tan continua y automática que basta una manifestación ligeramente inesperada de ella para que llame nuestra atención y procedamos a acomodar, ubicando a qué clase pertenece y a dónde la integramos. Nuestros conceptos pueden enriquecerse, mejorarse, ampliarse.

Por eso, cuando se forma un concepto están presentes la abstracción, la clasificación, la denominación que el sujeto hace con respecto a ese objeto matemático. Veamos cómo:

- A través de la PERCEPCIÓN Y DISCRIMINACIÓN, diferenciamos las características o propiedades de determinado objeto, en cuanto a sus particularidades.
- CLASIFICACIÓN, cada vez que reconocemos un objeto como «uno que hemos visto antes» a partir de semejanzas con otras clases.
- ABSTRACCIÓN, se «saca de» un objeto, hecho, situación, ciertas propiedades invariantes, comunes.
- GENERALIZACIÓN, se incluye en categorías o clases que vamos denominando, es decir designamos un nombre.

Al principio este proceso de formación del concepto es no controlado, no consciente, luego hay un grado mayor de conciencia y deliberación. Por ejemplo: Lea la siguiente palabra, AVE.

No piensa en todas las especies de aves existentes. Esa palabra significa una clase (o especie) definida como el conjunto de todos aquellos seres que poseen cierta propiedad. Así significa una clase de animales que tienen plumas y dos patas, y la mayor parte de individuos en ella pueden volar. Ha seleccionado algunas propiedades comunes a ciertos animales, y a aquellos que tienen esas propiedades les ha dado el nombre de «aves».

Al generalizar, los conceptos proporcionan palabras que representan a toda una clase de objetos, cualidades o acontecimientos, y nos son de enorme ayuda para nuestro pensamiento.

Ponemos en práctica la «clasificación», cada vez que reconocemos un objeto como «uno que hemos visto antes». Claro que no hay dos ocasiones en que los datos sensoriales son, en verdad, exactamente iguales. Lo que hacemos es ABSTRAER ciertas propiedades INVARIANTES que persisten en la memoria más tiempo que el recuerdo de una particular presentación del objeto. Es una abstracción reflexiva que permite al sujeto establecer relaciones.

Podemos encontrar ciertas características que van formado un concepto: C^1, C^2, C^3, C^4, C^5; C^n que representan sucesivas experiencias pasadas del mismo objeto, por ejemplo: una silla. De estas experiencias ABSTRAEMOS PROPIEDADES COMUNES, representadas por C. Una vez formada esta abstracción, cualquier experiencia posterior C" evoca C y la silla se RECONOCE, o sea, la nueva experiencia se clasifica con C^1, C^2, etc. De tal manera que C^n y C se experimentan ahora juntamente y mediante su combinación experimentamos tanto la SIMILITUD C de C" respecto a nuestras experiencias previas de haber visto esta silla. También experimentamos las diferencias entre C^1, C^2, C^3, C^4

Por eso los niños encuentran más fácil hallar semejanzas entre, por ejemplo, una manzana y una naranja, que sus diferencias.

Progresamos con nuevas abstracciones. Desde sillas particulares C, C^1, C^2, abstraemos ulteriores propiedades invariantes, por la cuales reconocemos (un nuevo objeto) como un miembro de esta clase. Esta es la clasificación de segundo orden. Y así, sucesivamente se puede construir otros niveles u órdenes, cada vez de mayor complejidad y elaboración teórica. Ejemplo de un concepto superior sería el de la gravedad, leyes de dinámica, etc.

Cuando el niño forma un concepto, ha de ser capaz de DISCRIMINAR o DIFERENCIAR las propiedades de los objetos o de los acontecimientos que están frente a él, ABSTRAER formando una clase a partir de sus propiedades invariantes y de GENERALIZAR sus descubrimientos respecto de cualquier rasgo común que haya encontrado. La discriminación exige que el niño pueda reconocer y apreciar cualidades comunes y distinguir éstas de otras propiedades diferentes. También puede recurrir a sus percepciones, del contacto real con objetos y situaciones vitales, de experiencias sufridas, de recuerdos e imágenes, y de distintas clases de acciones realizadas.

Conviene señalar que los conceptos en el niño, por lo general, no se desarrollan repentinamente en su forma definitiva. En realidad, los conceptos se ensanchan y profundizan al largo de la vida, permanentemente nuevos objetos son CATEGORIZADOS (situar mentalmente un objeto, y con exactitud, en el grupo que le corresponde ser clasificado).

El significado de los conceptos reside en las relaciones que se establecen entre unos y otros, por ello se tiene una estructura conceptual, para poner énfasis en que los conceptos deben estar interrelacionados. La estructura es así la esencia del conocimiento.

Nos interesa que el niño construya adecuados esquemas conceptuales e integre éstos en estructuras conceptuales estableciendo relaciones significativas entre los conceptos. Serán importante las actividades que se proporcionen para reconocer las propiedades invariantes asociadas a un concepto.

En resumen: El niño empieza con preceptos (percepción) Pero desde la infancia comienza a discriminar, abstraer y generalizar a partir de los datos de la realidad circundante. Por supuesto no entiende ni controla este proceso de abstracción («Sacar de») ni tiene conciencia de él al principio; sino que ocurre simplemente. A medida que progresa la edad del sujeto se produce un mayor grado de conciencia y deliberación. Las abstracciones y generalizaciones prosiguen con mayor facilidad y rapidez si encuentra una variedad de experiencias estimulantes y si éstas son paralelas al desarrollo neurofisiológico del niño.

Como lo expresa Lovell (1999); «*el orden de sucesión es: "percepción- abstracción- generalización*» (p. 25)

2.2.1.1.3 El conocimiento matemático.

La naturaleza y concepciones acerca de la matemática, lo establecemos, específicamente en el conocimiento matemático, desde una dimensión formal, puramente matemático, presenta características específicas, en su estado final de construcción:

- Es un conocimiento abstracto y tiene un nivel de generalidad.
- Se expresa mediante un lenguaje formal específico.

- Utiliza un razonamiento axiomático y hace uso de técnicas y procedimientos de la lógica.

Además, la matemática desde su dimensión referencial, vinculada a la realidad externa que interviene en la resolución de problemas prácticos.

Al respecto podemos precisar que el conocimiento matemático tiene una dimensión dual que le provee de dos tipos de significado: uno interno, formal, puramente matemático, y otro externo, referencial, que vincula el sistema formal de las matemáticas con algunos aspectos del mundo real. Esta idea nos da la importancia de coordinar ambos tipos de significados, que como vimos anteriormente, dan lugar a una comprensión instrumental y relacional del conocimiento matemático.

2.2.1.1.4 Aportes de las teorías cognitivas al aprendizaje y enseñanza de la matemática.

2.2.1.1.4.1 Aportaciones de Jean Piaget.

2.2.1.1.4.1.1 Los factores del desarrollo intelectual

El desarrollo intelectual se explica según Piaget por la participación de cuatro factores esenciales que determinan el proceso formativo y que posibilitan su evolución:

1) **Maduración fisiobiológica,** en cuanto integración de estructuras nerviosas y de maduración del sistema endocrino suficientes para permitir un funcionamiento global de las facultades mentales del individuo.

   Esta maduración consiste básicamente en posibilitar nuevas adquisiciones y constituye un elemento indispensable para la aparición de nuevas conductas, aunque no sea el único factor determinante. Es una parte necesaria que marca un límite de complejidad que las nociones y las operaciones no pueden sobrepasar.

La base fisiobiológica conforma la infraestructura básica que permite un desarrollo global de la persona y su maduración determina las posibilidades intelectuales y de actuación de cada sujeto.

2) **Experiencia o contacto con los objetos**, en cuanto establecimiento de relaciones entre el individuo y el medio ambiente, que se realiza a tres niveles:

- El simple ejercicio supone la presencia de objetos sobre los cuales se efectúa la acción, pero que no implica necesariamente la adquisición de conocimiento. El ejercicio puede ser una actividad perceptiva-exploratoria, o bien una repetición que consolida las operaciones intelectuales.
- La experiencia física permite la adquisición de un nuevo conocimiento por medio de la manipulación de objetos, de los cuales abstrae sus propiedades físicas, pero sin tener en cuenta el conjunto del objeto.

Esta experiencia física se traduce en un conocimiento, al que se llega a base de observaciones empíricas repetidas, pero no incluyen una nueva estructura de pensamiento.

El conocimiento físico tiene un nivel perceptivo como elemento fundamental, lo que implica un conocimiento condicionado por el punto de vista egocéntrico del sujeto y limitado por la percepción.

- La experiencia lógico-matemática permite al niño la construcción de estructuras intelectuales, a partir de la interacción de éste con el medio. El niño con su acción sobre los objetos va desarrollando un marco de relaciones que conforman los esquemas de pensamiento capaces de deducir propiedades de los objetos dependientes de las relaciones entre ellos y que no están implícitas en su propia estructura física.

  La experiencia lógico-matemática depende directamente de la actuación de cada sujeto que va relacionando su acción sobre la realidad con sus conocimientos previos y de esta forma va construyendo nuevas estructuras que se corresponden con nuevas operaciones mentales, las cuales permitirán analizar desde nuevas perspectivas esta realidad circundante y avanzar en su evolución intelectual, por lo que **«***Sólo cuando el niño posee la estructura mental previa cuando se halla en condiciones de asimilar nuevas experiencias y cuando se da aprendizaje auténtico con la posibilidad de generalizar la experiencia adquirida a nuevas situaciones***».** (Ginsburg & Opper, 1981, p. 166)

3) **Transmisión social.** El sujeto debe desarrollar sus capacidades en un contexto social determinado que le

condiciona, pues la situación socio-cultural con que se encuentra el niño influye en su evolución. El niño debe sufrir su proceso de «Homonización» y ello implica toda una serie de conocimientos convencionales y experiencias que únicamente son aprendidas a través del contacto social con cada ambiente determinado.

Esta trasmisión social juega un papel fundamental, pero es insuficiente por sí sola, precisa de un conocimiento lógico-matemático que le permita asimilar la situación a una determinada estructura de pensamiento, precisa una base adecuada para que toda experiencia sea útil y provechosa.

Tanto la experiencia física como la trasmisión social exige la actividad del niño sobre los objetos y su medio sociocultural para adquirir conocimientos fundamentales para el desarrollo intelectual del niño, pero todos exigen un marco lógico-matemático para lograr la formación de estructuras operatorias que repercutan en un avance de su progreso evolutivo.

4) **La equilibración**. Los factores tradicionales no bastan según Piaget, para explicar el desarrollo intelectual. Debemos recurrir a un cuarto factor que organice y regule todo el conjunto. Para Piaget, tal como los explica Tran-Trong (1981), *«el desarrollo de la inteligencia es un proceso de equilibración continua y progresiva; donde los estadios de desarrollo constituyen niveles sucesivos de equilibración»* (p. 79)

El desarrollo intelectual evoluciona mediante un proceso de equilibración, que realiza la labor de motor de cambio y opera continuamente en todos los intercambios del sujeto en crecimiento. Este equilibrio, tal como lo expresa Piaget (1976): «Nunca entendido como si se tratara de una balanza de fuerzas en un estado de reposo, sino que lo definiremos muy ampliamente por la compensación debida a las actividades del sujeto como respuesta a las perturbaciones externas» (p. 126).

El proceso de equilibración es una autorregulación de los intercambios entre la actividad del sujeto y los objetos que se mueven dentro de estados de desequilibrio (comprensión incompleta de la realidad) hasta otros de mayor equilibrio (períodos de mayor comprensión), que se suceden a lo largo de todo el desarrollo, de forma que van integrando los estados inferiores en los superiores hasta completar el máximo de coherencia y estabilidad de sus estructuras intelectuales.

Piaget (1976) describe el equilibrio en función de tres características:

A. Estabilidad, la no inmovilidad, es la capacidad de regular y compensar mediante acciones u operaciones los cambios de los elementos, pero manteniendo la estructura básica.
B. Movilidad que permite compensar las perturbaciones exteriores.
C. Actividad del individuo para poder anticipar y realizar las compensaciones precisas para mantener el equilibrio de la estructura. (p. 188-189)

Ginsburg & Opper (1981), resumen estas características diciendo: *«El equilibrio implica actividad, apertura y un estado de armonía relativa con el medio». (p.63)*

2.2.1.1.4.1.2 Desarrollo de las etapas de aprendizaje.

Jean Piaget tuvo como propósito defender una teoría del desarrollo basado en un planteamiento que postula que el niño edifica el conocimiento por distintos canales: lectura, escucha, observación, exploración.

Piaget se interesó en el hecho de por qué los niños no podían pensar lógicamente siendo pequeños y, sin embargo, más adelante resolvían los problemas con facilidad. Piaget hace percibir que la capacidad cognitiva y la inteligencia están estrechamente ligadas al medio físico y social.

Piaget considera que hay dos mecanismos para el aprendizaje: La asimilación y la acomodación.

Los seres humanos buscamos el **equilibrio**: incorporación de las nuevas vivencias en nuestros esquemas. Tal como lo manifiesta Martín Bravo (2009): «*El niño asimila correctamente los objetos tras haberse acomodado a sus características*» *(p.27)*

Para Piaget, lo explica Trang-Thong (1981)*:«el desarrollo de la inteligencia es un proceso de equilibración continua y progresiva; donde los estadios de desarrollo constituyen niveles sucesivos de equilibración» (*p. 79)

Cuando estas vivencias y esquemas se corresponden, se sostiene el equilibrio; sin embargo, si las experiencias están reñidas con los esquemas ya establecidos previamente, se lleva a cabo un desequilibrio que en un principio crea confusión, pero finalmente nos lleva al **aprendizaje** mediante la **organización** y la **adaptación**: el acoplamiento de los pensamientos previos y los nuevos. Por lo que la:

> **«La organización y la adaptación con sus dos polos de asimilación y de acomodación, constituyen el funcionamiento que es permanente y común a la vida, pero que es capaz de crear formas o estructuras variadas" (Thong, 1981, p.26). "La adaptación es el equilibrio entre el organismo y el medio» (Piaget, 1990, p.15).**

En ese sentido Piaget citado por Dolle (2009) define a la asimilación como «*la conservación y la supervivencia, es decir, el equilibrio entre el organismo y el medio ambiente*.» (p. 51). «*Tal definición también se aplica tanto a la organización biológica como a la intelectual. Ésta es asimilación por cuanto incorpora dentro de sus marcos todo lo obtenido por medio de la experiencia».* (Dolle, 2009, p. 51)

En el desarrollo de adaptación por **asimilación**, se adhieren nuevos testimonios en el esquema previo.

Como lo expresa Piaget (citado por Dolle, 2009) «*en todos los casos la adaptación intelectual conlleva un elemento de asimilación, es decir, de estructuración por incorporación de la realidad externa a formas debidas a la actividad del sujeto» (p. 51)*

En el desarrollo de adaptación por **acomodación**, el esquema previo ha de cambiarse, acomodarse a la nueva experiencia.

Desde luego, la inteligencia es, asimismo, acomodación al medio y a sus variaciones. Sin embargo, la asimilación jamás puede ser pura porque «*al incorporarse los nuevos elementos en los esquemas anteriores, la inteligencia modifica sin cesar estos últimos para añadirlos a los nuevos datos. Pero, inversamente, las cosas jamás son conocidas en sí mismas, ya que este trabajo de* *acomodación sólo es posible en función del proceso inverso de asimilación*» (p. 51)

Piaget citado por Dolle (2009), no expresa que el «*equilibramiento progresivo entre un mecanismo asimilador y una acomodación complementaria*» *y* «*la adaptación se logra únicamente cuando desemboca en sistema estable, es decir, cuando se logra un equilibrio entre la asimilación y acomodación.*» *(p. 51)*

Para que se produzca el desarrollo cognitivo, Piaget establece cuatro etapas o períodos:

Período **sensomotor**, período **preoperacional,** período de las **operaciones concretas** y período de las **operaciones formales**. Po lo que hay «*quedar claro que la aparición de cada nuevo estadio no suprime en modo alguno las conductas de los estadios anteriores y que las nuevas conductas se superponen simplemente a las antiguas*». (Piaget, 1990, p. 316)

A. PERÍODO SENSOMOTOR (PRIMEROS DOS AÑOS)

En este periodo, llamado sensomotor, es el primer periodo de la inteligencia del niño, en esa misma línea, Tran (1981) manifiesta que «*La inteligencia sensomotriz es una adaptación práctica, vivida en el mundo exterior.*» (p. 27)

Piaget denomina así a esta etapa, porque el bebé conoce el mundo poco a poco a través de sus sentidos y las tareas motrices de su cuerpo. Los bebés pasan de ser individuos «reflejos» con limitado conocimiento, a ser «solventadores de problemas», programadores que han profundizado mucho sobre sí mismos y lo que les rodea.

Divide este período en **seis subetapas**, en las cuales, los esquemas mentales del niño «*van configurando nuevas redes de esquemas que facilitarán la construcción de objetos permanentes*» (Martín Bravo, 2009, p. 29)

- ✓ **Estadio 1 Actividad refleja (desde el nacimiento hasta 1 mes)**: El comportamiento del recién nacido está caracterizado por los reflejos innatos (rotación, succión, prensión), los reflejos Para Piaget son:

  > **«elementos que intervienen como tales en el comportamiento de adaptación –fenómeno total- del recién nacido. Desde las primeras reacciones, el bebé activa los mecanismos de asimilación y de acomodación que, por lo menos en este primer estadio, están confundidos y sólo posteriormente se disociarán.» (Marie Dolle, 2009, p. 82)**

  En ese sentido los reflejos cada vez se harán más eficientes. Sigue elementos que se desplazan, pero desconoce su ocultación. Por lo tanto los reflejos es una «*estructura hereditaria, un sistema de movimientos cerrados o esquema, que no se consolida, no acaba de organizarse más que ejercitándose, funcionando*» (Tran,1981,p.28)

- ✓ **Estadio 2 Reacciones circulares primarias (de 1 a 4 meses):** El bebé comienza a delimitar su cuerpo a través de hallazgos casuales que le despiertan interés. Observa atentamente el lugar donde desaparece un elemento.

«*Ciertas estructuras que aparecen en este estadio son un primer paso hacia la adquisición del concepto del objeto*» (Martín Bravo, 2009, p. 66)

- ✓ **Estadio 3 Reacciones circulares secundarias (de 4 a 8 meses):** Entendidas como el «*comportamiento que consiste en recobrar los gestos que por azar hayan ejercido una acción interesante sobre las cosas.*» (Tran, 1981, p. 31)

  El bebé aprende a adecuar los esquemas conocidos a otras situaciones. Se interesa menos por su propio cuerpo y más por lo que le rodea. Podrá coger elementos visibles, pero estarán fuera de su mente los que no puede ver. «*Los objetos comunes se reconocen asiéndolos, pasándolos de una mano a otra, tocándolos, apretándolos, introduciendo el dedo en el agujero de la llave, etcétera.*» (Holloway, 1982, p.68)

- ✓ **Estadio 4 Coordinación de esquemas secundarios (8-12 meses):** Comienza a haber una intencionalidad cuando aparta cosas o emplea la mano de sus padres para poder conseguir coger objetos deseados. Consigue buscar elementos ocultos delante de él. «*El niño sigue con los ojos el objeto hacia B, lo busca en este segundo lugar, y si no lo encuentra inmediatamente vuelve entonces a «A»*» (Martín Bravo,2009, p. 68)

  Imita sonidos y actos, lo cual indica el inicio de la memoria y representación.

- **Estadio 5 Reacciones circulares terciarias (12 a 18 meses):** El niño comienza a experimentar de forma metódica. Utiliza fórmulas nuevas para conseguir lo que desea. Sigue los movimientos visibles de un objeto cuando se le esconde y lo localiza donde lo vio la primera vez, pero no puede deducir los movimientos invisibles. Reconoce fotografías familiares y lleva a cabo órdenes verbales simples.
- **Estadio 6 Intervención de medios nuevos a través de combinaciones mentales (de 18 a 24 meses):** Se lleva a cabo un cambio de la tarea sensomotriz a la mental. Inventa modos nuevos por conclusiones mentales. Ya deduce el movimiento invisible de algún objeto cuando se le esconde y sabe que se conserva aún sin resultarle visible, es la permanencia de objeto, «*por el mismo hecho de entrar en el sistema de representaciones y de relaciones abstractas o indirectas, el objeto adquiere, para la conciencia del sujeto, un nuevo y último grado de libertad.*» (Martín Bravo, 2009 p. 70)

Empieza a emplear símbolos en el lenguaje, recuerda actos pasados e imita posteriormente. Está llegando al período de la representación simbólica.

Mostrando en la siguiente tabla realizada por Martín Bravo (2009, p. 71) las características de cada subetapa del período sensomotor:

Tabla 1: Características de las sub etapas del periodo sensomotor.

EDAD	ESTADIO	OBJETO
Estadio I **0-1 mes**	**Ejercicio y consolidación de los objetos**	Seguimiento visual de objetos.
Estadio II **1-4 meses**	**Reacciones circulares primarias:** Coordinación de varios esquemas perceptivos que no habían sido utilizados antes con correlación alguna: prensión-succión; visión-audición; fonación-audición. Primeras adaptaciones adquiridas.	No se observa conducta de búsqueda cuando el objeto desaparece.
Estadio III **4-8 meses**	**Reacciones circulares secundarias:** Coordinación completa de la visión y prensión. Realiza acciones para prolongar espectáculos interesantes, aprende a diferenciar entre medios y fines.	Búsqueda de un objeto parcialmente oculto. El bebé intenta apartar el obstáculo que lo oculta. Ante la caída de un objeto, los bebés reaccionan anticipando su punto de llegada.
Estadio IV **8-12 meses**	**Coordinación de esquemas secundarios y su aplicación a situaciones nuevas:** Búsqueda de fines utilizando otros esquemas como medios.	Búsqueda de objetos totalmente ocultos que acaban de desaparecer. Tienden a buscar el objeto desaparecido en primer lugar escondido y que fue encontrado.
Estadio V **12-18 meses**	**Reacciones circulares terciarias:** Descubre nuevos medios a través de la experiencia activa y de la diferenciación de esquemas conocidos.	Puede descubrir el objeto en los distintos sitios que se va ocultando. Aún no es capaz de tener en cuenta los desplazamientos no visibles.
Estadio VI **18-24 meses**	**Invención de nuevos medios mediante combinaciones mentales:** Inicio de capacidad simbólica o representacional. Comprensión súbita.	Búsqueda de objetos en todos los lugares. El bebé concibe ya una permanencia de los objetos.

Tabla 2: "Resumen de los seis estadios y la evolución de la permanencia del objeto". (Martín Bravo, 2009, pág. 71)

B. PERÍODO PREOPERACIONAL (2 A 7 AÑOS)

Este lo divide a su vez en otras dos etapas:

- ✓ **Etapa preconceptual (2 a 4 años):** El niño actúa en el nivel de la representación simbólica, como nos explica Piaget (1999) que**:**

> «***Desde los últimos estadios del período sensorio-motor, el niño es capaz de imitar ciertas palabras y atribuirles una significación global, pero sólo hacia el término del segundo año comienza la adquisición sistemática del ·lenguaje.***
> ***Tanto la observación directa del niño como el análisis de ciertas turbaciones de la palabra, ponen en evidencia el hecho de que la utilización del sistema de los signos verbales obedece al ejercicio de una «función simbólica» más general, cuya propiedad es permitir la representación de lo real por intermedio de «significantes» distintos de las cosas «significadas»»*. *(p. 138)***

Es así como se puede ver en la imitación y memoria manifiestas en dibujos, lenguaje, sueños y simulaciones. En el mundo físico maniobra muy de acuerdo a la realidad, pero en el pensamiento sigue siendo egocéntrico. Cree que todos los elementos tienen vida y sienten. Piensa que todo lo que sucede tiene una relación causa- efecto. También cree que todo es tal y como él lo percibe; no entiende otros puntos de vista.

- ✓ **Etapa prelógica o intuitiva (4 a 7 años):** Se manifiesta el pensamiento prelógico (por ejemplo, media taza de líquido que llena un vaso pequeño es más que media taza que no llena un vaso grande). Piaget (1999) afirma que:

> «**En efecto, desde los cuatro a los siete años, se asiste a una coordinación gradual de las relaciones representativas, esto es, a una conceptualización creciente que, desde la fase simbólica o preconceptual, conducirá al niño hasta el umbral de las operaciones. Pero -cosa digna de ser destacada-**

esta inteligencia, cuyos progresos, a menudo rápidos, pueden seguirse, se mantiene constantemente en estado prelógico, y ello en los terrenos en que llega a su máximo de adaptación: hasta el momento en que la «agrupación» señala el término de esta cadena de equilibramientos sucesivos, esa inteligencia suplanta todavía las operaciones incompletas por una forma cuasisimbólica de pensamiento, que es el razonamiento intuitivo; y no controla los juicios sino por medio de «regulaciones» intuitivas, análogas, en el plano de representación, a lo que son las regulaciones perceptivas en el plano sensorio-motor.» (p. 144)

Para Piaget (1999) la:

«**(…) la intuición es siempre, en primer lugar, una especie de acción ejecutada en pensamiento: trasvasar, hacer corresponder, englobar, seriar, desplazar, etcétera, son esquemas de acción a los cuales la representación asimila lo real.(…) [la intuición es] en segundo lugar, un pensamiento imaginado, más refinado que en el período anterior, pues se refiere a configuraciones de conjunto y no ya a simples colecciones sincréticas simbolizadas por ejemplares tipos; pero utiliza todavía el simbolismo representativo y sigue presentando siempre una parte de las limitaciones que le son inherentes.**» **(p. 552)**

El ensayo y error puede hacerle descubrir intuitivamente las relaciones correctas, pero no es capaz de considerar más de una característica al mismo tiempo (por ejemplo, las bolitas azules no pueden ser al mismo tiempo de madera). El lenguaje es egocéntrico, lo que refleja sus limitaciones por falta de experiencia.

En este estadio, no hay ausencia de composición transitiva, reversible y asociativa, ni identidad asegurada de los elementos, ni conservación del todo. Tal como nos explica Piaget (1999):

«**El sujeto no llega a la reversibilidad porque una acción traducida en simple experiencia imaginada conserva un sentido único, y porque una asimilación centrada sobre una configuración perceptiva también tiene necesariamente ese sentido único. De ahí la ausencia**

de transitividad, porque cada centración deforma o anula las otras, y de asociatividad, pues las relaciones dependen del camino recorrido por el pensamiento para elaborarlas (…). Así, puede decirse también que la intuición sigue siendo fenoménica, ya que imita los contornos de lo real, sin corregirlos, y egocéntrica, porque constantemente se halla centrada en función de la acción del momento: carece por ello de equilibrio entre la asimilación de las cosas a los esquemas del pensamiento, y la acomodación de esos esquemas a la realidad.» (p.153)

C. PERÍODO DE LAS OPERACIONES CONCRETAS (7 A 12 AÑOS)

Este periodo, según Piaget & Inhelder (2007) pueden «llamarse concretas en el sentido de que afectan directamente a los objetos y aún no a hipótesis enunciadas verbalmente…» (p. 103). Por lo que según Piaget & Inhelder (2007) «… Las operaciones concretas forman, pues, la transición entre la acción y las estructuras lógicas más generales que implica una combinación y estructura de «grupo» coordinante de las dos formas posibles de reversibilidad... » (p. 103). En esta etapa el niño puede emplear la lógica sobre lo que ha experimentado y manipularlo de una manera simbólica (operaciones aritméticas). Piensa hacia adelante y atrás. Reconoce que, si se pasa media taza de líquido de un recipiente alto a uno corto, sigue siendo media taza, que es lo que era en un principio. A la capacidad de pensar hacia atrás Piaget la llama **reversibilidad**. Esta aptitud ayuda a acelerar el pensamiento lógico y se pueden llevar a cabo deducciones (Si 2+2 =4, 4-2=2).

En esta etapa Piaget (1999) advierte de la existencia del «equilibrio móvil», que se alcanza cuando se producen las siguientes transformaciones en forma simultánea:

> **«1) dos acciones sucesivas pueden coordinarse en una sola; 2) el esquema de acción, ya en marcha en el pensamiento intuitivo, se vuelve reversible; 3) un mismo punto puede alcanzarse, sin ser alterado, por dos caminos diferentes; 4) el retorno al punto de partida permite encontrar a éste idéntico a sí mismo; 5) la misma acción, al repetirse, o no agrega nada a sí misma, o es una nueva acción, con efecto acumulativo. Se reconoce en ello la composición transitiva, la reversibilidad, la asociatividad y la identidad con (5) la tautología lógica o la iteración numérica, que caracterizan las «agrupaciones» lógicas o los «grupos» aritméticos.» (p. 156)**

Aquí se puede ver el bucle ascendente del desarrollo de la inteligencia, desde el saber edificado durante las experiencias concretas del período sensomotor, hasta la posibilidad de poder simbolizarlo y razonar sobre ellas de forma abstracta. Es así como los agrupamientos operatorios se:

> **«… concretan en las estructuras sucesivas. Conducen primero a las operaciones lógicas de encajamiento de las clases (hacia los siete años queda resuelta la cuestión de las bolitas negras *A,* menos numerosas que las bolitas de madera *B),* y de la seriación de las relaciones asimétricas. De ahí el descubrimiento de la transitividad que funda las deducciones: $A = B$; $B = C$, luego $A = C$; o $A < B$; $B < C$, luego $A < C$. Además, no bien se han adquirido esas agrupaciones aditivas, las agrupaciones multiplicativas se comprenden también bajo la forma de correspondencias; sabiendo seriar objetos según las relaciones $A_1 < B_1 < C_1$ ... , el sujeto ya no tropezará con dificultades para seriar dos o varias colecciones, tales como $A_2 < B_2 < C_2$ ... , correspondiéndose término por término: a una sucesión de fichas de medidas crecientes, por él mismo ordenadas, el niño de 7 años sabrá hacer corresponder una sucesión de bastones o de sacos, e incluso señalar, cuando se mezcla el todo, a qué elemento de una serie corresponde tal elemento de la otra (ya que el carácter multiplicativo de esa agrupación no agrega dificultad alguna a las operaciones aditivas de seriación que acaban de descubrirse).»** (Piaget, 1999, pág. 158)

Además, la construcción simultánea de los agrupamientos del encajamiento de las clases y de la seriación cualitativa acarrea la aparición del sistema de los números. Por lo que Piaget (1999) expresa que:

> «***Ciertamente, el pequeño no espera esta generalización operatoria para construir los primeros números (…), pero los números de 1 a 6 todavía son intuitivos, porque se hallan ligados a configuraciones perceptivas. Por otra parte, podrá***

enseñarse al niño a contar, pero la experiencia nos ha demostrado que el uso verbal del nombre de los números se mantiene sin gran relación con las operaciones numéricas, las que son a veces anteriores a la numeración hablada o le suceden sin vínculo necesario.» (p. 158)

Las operaciones constitutivas del número, Piaget (1999) nos explica que:

> «***En cuanto a las operaciones constitutivas del número, es decir, a la correspondencia biunívoca (con conservación de la equivalencia obtenida, pese a las transformaciones de la figura), o a la iteración simple de la unidad (1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; etc.), ellas no requieren más que las agrupaciones aditivas del encajamiento de las clases y de la seriación de las relaciones asimétricas (orden), pero fundidas en un solo todo operatorio, de modo que la unidad 1 sea, a la vez, elemento de clase (1 comprendido en 2; 2 en 3, etc.) y de serie (el primer 1 antes del segundo 1; etc.)*** » ***(p. 158)***

Piaget (1999) manifiesta que las operaciones lógico-aritméticas:

> **«… no constituyen sino un aspecto de las agrupaciones fundamentales cuya construcción caracteriza la edad media de los 7-8 años. A estas operaciones que reúnen los objetos para seriados, clasificarlos o numerarlos, corresponden, en efecto, las operaciones constitutivas de los objetos, objetos complejos y, sin embargo, únicos, tales como el espacio, el tiempo y los sistemas materiales.» (p. 159)**

Pero cabe notar las operaciones lógico-aritméticas se agrupen con las operaciones infralógicas o espacio-temporales, tal como nos explica Piaget (1999)

> **«… ya que se trata de las mismas operaciones, aunque en escala distinta: al encajamiento de los objetos en clases y de las clases entre sí, le siguen el encajamiento de las partes o pedazos en un todo; la seriación que expresa las diferencias entre objetos se presenta bajo la forma de relaciones de orden (operaciones de colocación) y de desplazamiento, correspondiendo el número a la medida. Así, pues, en tanto que se elaboran las clases, las relaciones y los números, se ve cómo se construyen, de un modo notablemente paralelo, las agrupaciones cualitativas generadoras del tiempo y del espacio.» (p. 159)**

Adquisiciones perceptivas, luego intuitivas que aparecieron en las etapas anteriores del desarrollo de la inteligencia, termina en las operaciones reversibles finales como en su forma necesaria de equilibrio. Pero las diferentes agrupaciones lógico-aritméticas o espacio-temporales se hallan lejos de constituir todavía una lógica formal aplicable a todas las nociones y a todos los razonamientos. Por lo tanto *«Las operaciones de que aquí se trata son, pues, «operaciones concretas», y no todavía formales: siempre ligadas a la acción, ésta queda estructurada lógicamente por esas operaciones, comprendidas las palabras que la acompañan, pero de ningún modo implican la posibilidad de construir un discurso lógico independientemente de la acción.»* (Piaget, 1999, p.160)

Es así como niños de Educación Primaria pueden hacer seriaciones, clasificaciones en grupos y otras operaciones lógicas. Si se les enseña un trozo de cuerda A más largo que un trozo de cuerda B y más adelante otro C más corto que B, pueden deducir que A por lógica es más largo que C sin necesidad de verlos ni realizar una comparativa sensomotora.

D. Período de las operaciones formales (12 años hasta la madurez)

Piaget (1999) afirma que *«la constitución de las operaciones formales, que comienza hacia los 11-12 años, requiere igualmente toda una reconstrucción, destinada a trasponer las agrupaciones «concretas» en un nuevo plano de pensamiento, y esta reconstrucción se caracteriza por una serie de diferenciaciones verticales. (…). El pensamiento formal alcanza su plenitud durante la adolescencia. El adolescente, por oposición al niño, es un individuo que reflexiona fuera del* *presente y elabora teorías sobre todas las cosas, complaciéndose particularmente en las consideraciones inactuales.»* (p.162)

El adolescente en esta etapa razona lógicamente sobre cosas abstractas que nunca había investigado de forma directa. Esto es lo que singulariza el período de las operaciones formales. El niño está capacitado para hacer un pensamiento racional e inductivo a través de la forma de una propuesta ofrecida. Sólo conoce el problema de forma hipotética y puede llegar a una reflexión lógica a través del pensamiento. Es así como afirma Piaget (1999) que «*el sujeto es capaz de razonar de un modo hipotético-deductivo, es decir, sobre simples suposiciones sin relación necesaria con la realidad o con las creencias del sujeto, confiado en la necesidad del razonamiento, por oposición a la concordancia de las conclusiones con la experiencia*.» (p. 163)

Esta última etapa no es lograda por todos los adultos, pero sí es característico de los científicos, que pueden manejar un gran número de datos y explicárnoslos claramente. Einstein dijo sobre la teoría de Piaget «Es tan simple que sólo un genio podía haberla pensado».

2.2.1.1.4.1.3 Adquisición del conocimiento matemático según los estadios.

Dice Piaget (1972) sobre la enseñanza de la matemática en relación a la elaboración y utilización de las estructura lógicas matemáticas:

«la enseñanza de las Matemáticas ha planteado un problema bastante paradójico (...); es difícil suponer que sujetos bien dotados para la elaboración y utilización de las estructuras lógico-matemáticas espontáneas de la inteligencia se encuentren en desventaja en una enseñanza que se refiere exclusivamente a aquello de lo que se derivan tales estructuras (...).»(p.54)

Piaget (1972) *nos explica que hay una confusión entre aptitud matemática con la inteligencia en la que expresa:*

«***Habitualmente se responde de una manera un tanto simple al hablar de «aptitud» para las Matemáticas. Pero si lo que acabamos de suponer en cuanto a las relaciones de esta forma de conocimiento con las estructuras operatorias fundamentales del pensamiento es exacto, la «aptitud» se confunde con la inteligencia misma, lo que no se considera el caso, o se relaciona no con las Matemáticas como tales sino con la forma como se las enseña.*» *(p. 54)***

También, Piaget (1972), nos habla del problema de relacionar las estructuras operatorias y los métodos de enseñanza, específicamente en el área de la matemática, tal como nos explica el citado autor:

«***Efectivamente, las estructuras operatorias de la inteligencia, aun siendo de naturaleza lógico-matemática, no son conscientes en tanto que estructuras para los niños: son estructuras de acciones u operaciones que ciertamente dirigen el razonamiento del sujeto, pero no constituyen un objeto de reflexión para él (...). Por el contrario, la enseñanza de las Matemáticas invita a los sujetos a una reflexión sobre las estructuras, pero lo hace por medio de un lenguaje técnico que implica un simbolismo muy particular y exige un grado más o menos alto de abstracción (...). En una palabra, el problema central de la enseñanza de las Matemáticas consiste en ajustar recíprocamente las estructuras operatorias espontáneas propias de la inteligencia con el programa o los métodos relativos a los campos matemáticos enseñados.*» *(p. 56)***

Uno de los problemas de esta falta de relación de las estructuras operatorias y los métodos, son por la naturaleza abstracta de la matemática; por lo que Piaget (1972) nos plantea que:

Este problema se ha ido modificando profundamente en las últimas décadas a causa de las transformaciones de las mismas matemáticas; (...) las estructuras más abstractas y más generales de las Matemáticas contemporáneas se incorporan a las estructuras operatorias naturales de la inteligencia y del

> ***pensamiento mucho mejor de lo que lo hacían las estructuras particulares que constituían el armazón de las Matemáticas clásicas y de la enseñanza (...). A pesar del progreso de principio realizado por el retorno a las raíces naturales de las estructuras operatorias, subsiste enteramente el problema pedagógico de encontrar los métodos más adecuados para pasar de estas estructuras naturales, pero no reflexivas a la reflexión sobre tales estructurales y a su teorización» (p. 59).***

Es necesario señalar además que para Piaget las Matemáticas definen una especie de «axiomática del pensamiento» y son un producto de una abstracción reflexionante realizada a partir de las propias operaciones intelectuales (y no de los hechos) por lo que las actividades matemáticas serían especialmente adecuadas para estudiar las estructuras de operaciones que definen la inteligencia y un medio especialmente útil y adecuado para promover su desarrollo.

A continuación, presentamos una tabla de los periodos de inteligencia de Jean Piaget y el conocimiento matemáticos adquiridos por los niños y adolescentes:

Tabla 2: Los conocimientos matemáticos adquiridos por periodos de inteligencia de Jean Piaget.

PERIODOS	TIPO DE CONOCIMIENTOS		
PERIODO SENSORIOMOTOR (0-2 años)	**Fase Preconceptual**		♦ Comienza adquirir conocimientos lógicos matemáticos ♦ Manipulación de objetos ♦ Percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor...) ♦ A los 5 meses discrimina conjuntos 2-3 ítems / 10 meses discrimina conjuntos 3-4 ítems
PERIODO PREOPERACIONAL (2-6 años)	**Fase Conceptual**	**EDAD**	**TIPO DE CONOCIMIENTO ADQUIRIDO**
		2,5	♦Organiza el espacio situando y desplazando los objetos (dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo), conceptos básicos y vocabulario básico ♦Descubre propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia, cantidad, mezcladas con las cualidades perceptivas
		3	♦Compara objetos en función de cualidades físicas ♦Discrimina en virtud de la percepción de semejanzas-diferencias esto le facilite que agrupe en función de un criterio ♦Utiliza diferentes formas de etiquetado para diferenciar colecciones numéricas de pocos elementos ♦Detecta correspondencias numéricas entre elementos visibles y estímulos auditivos
		3,5	♦Contrasta magnitudes por comparación y estimar a partir de una cantidad la otra longitud/cantidad, volumen/ cantidad, peso/cantidad ♦Ordena en el tiempo y paulatinamente abstrae la cualidad de la percepción del objeto (es capaz de coleccionar) ♦Compara algunos términos de los componentes de las colecciones y establece correspondencias ♦Engloba aspectos de tipo espacial, cuantificación, semejanza/diferencia. Etapa muy manipulativa
		4	♦Ordena objetos por sus cualidades físicas. Ordenación serial cualitativas de diferencias que cambian alternativamente ♦Compara y explora las magnitudes de los objetos de las colecciones y realiza nuevas formas de agrupamiento y va hace equivalencias. ♦Se inicia en el conteo y esto le va permitir iniciarse en procedimientos de tipo número que suponen cierto grado de abstracción ♦Trabaja aspectos básicos de pertenencia, espacio y tiempo. ♦Adquiere la idea de número en la teoría de conjunto y las operaciones de juntar, quitar, repetir y repartir.
		4,5	♦Representa las secuencias de la etapa anterior Adquiere el orden, la equivalencia, los conceptos. ♦Compara magnitudes discretas desiguales que le conduce a clasificar en orden creciente o decreciente (progresión serial cuantitativa) ♦Es capaz de ponderar de apreciar el peso por claves internas , cenestésicas

		5	♦Objetiva el tiempo (ayer, mañana, hoy) ♦Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo, los de adición en los que la incógnita se sitúa en el resultado ♦No resuelve problemas de comparación, ni combinación. Puede contar de 4 a 6 y a loa 5,5 años cuenta y verbaliza lo anterior.
		6	♦Pueden medir realizando equivalencia entre continente y contenido. Comienza las nociones de área y longitud. ♦Relaciona el cambio que se produce entre el conjunto inicial y la acción que lo provoca y la dirección (incremento/decremento) y relacionarlas con la operaciones aritméticas de adición y sustracción ♦Puede contar hasta 12 y su lógica le permite resolver problemas de cierta complejidad. ♦Logra usar los números naturales para comparar los tamaños
PERIODO DE OPERACIONES CONCRETAS (7-12 años)	**Operaciones concretas simples y elementales**	7-10	♦Aparición de operaciones reversibles con la adquisición de principios de conservación por este orden: cantidad, peso y volumen. ♦Representa realidades físicas, compara y cuantifica mediante la geometría el sistema métrico decimal y representa datos gráficamente ♦Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas. ♦Ordena elementos en función de la cualidad que varía. Soluciona problemas primero por comparación y al final del periodo por abstracción ♦Adquiere la noción de sistema de numeración y de operación con números llegando adquirir la madurez hacia los 10 años
	Operaciones concretas complejas espacio temporales	10-12	♦Operaciones físicas: nociones de conservación (sustancia, peso, volumen) ♦Operaciones espaciales: espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento (topológicas, proyectivas euclidianas, métricas ♦Operaciones temporales y cinéticas: orden de sucesión de los objetos en el espacio
PERIODO DE OPERACIONES FORMALES A partir de los 12 años	**Génesis de operaciones formales**	12-14	♦Comienza con un periodo de preparación y estructuración de las operaciones formales, de transición entre el pensamiento concreto y el formal ♦Clasificar clasificaciones, seriar seriaciones ….hasta la combinatoria ♦Se accede al grupo de las cuatro transformaciones o INRC, (identidad, negación, reciprocidad, correlatividad.)
	Estructuras operatorias formales	14…..	♦Dominio de la estructura de las operaciones formales que le permite movilidad de pensamiento y organización mental. ♦Aquí se encuentran dos combinaciones la combinatoria (INRC), identidad, negación, reciprocidad, correlatividad y la estructura de retículo, que son las 16 operaciones binarias de la lógica proposicional. ♦ Realiza operaciones de variaciones, permutaciones y combinaciones, los esquemas de proporcionalidad, de doble referencia, de equilibrio mecánico, de probabilidad, de correlación, de compensaciones multiplicativas y de conservación que va más allá de la materia aplicándolas en todos los ámbitos, con lo que consigue una nueva forma de relacionarse con el mundo externo

2.2.1.1.4.2 Aportes de Vygotsky.

Probablemente la intencionalidad de Vygotsky al enunciar su teoría no estaba ligada al aprendizaje de las matemáticas en particular, pero lo cierto es que el conocimiento de ella nos aporta una nueva perspectiva para el estudio de la matemática y que inter conexionada con el resto de las teorías cognitivas existentes, las enriquece y les proporciona un nuevo punto de vista.

Coincide con Piaget en que los significados se elaboran en interacción con el ambiente; discrepa, en que para Piaget ese ambiente está compuesto únicamente de objetos (algunos son objetos sociales), y para él el ambiente está compuesto de objetos además de personas que son las que median en la interacción del niño con los objetos. Según Vygotsky, la adquisición de conocimiento, comienza siendo siempre objeto de intercambio social, es decir, comienza siendo interpersonal, para a continuación, interiorizarse y hacerse intrapersonal. En palabras del propio Vygotsky (1995) :

> «***En el desarrollo cultura del niño, toda función aparece dos veces: primero a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpersonal), y después en el interior del propio niño (intrapsicológíca). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos***» ***(p. 94).***

Es impórtame considerar, según Vygotsky, dos tipos de conocimiento en las personas: un primer nivel de desarrollo efectivo estaría determinado por lo que el sujeto logra hacer sin ayuda de otras personas o mediadores externos; un segundo nivel, de desarrollo potencial, estaría constituido por lo que el sujeto sería capaz de hacer con ayuda de otras personas o de instrumentos mediadores externos. La diferencia entre el desarrollo efectivo y el desarrollo potencial, sería la zona de desarrollo *potencial o próximo* (ZDP) de ese sujeto en esa tarea concreta.

En matemáticas hemos de partir del nivel de desarrollo efectivo de un alumno o alumna y hacerlo progresar a través de su zona de desarrollo potencial para ampliarla y generar nuevas zonas de desarrollo próximo. Así mismo.es importante para el aprendizaje de las matemáticas considerar que el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar sólo cuando los niños están en interacción con los niños de su entorno y en cooperación con algún semejante.

A. Zona de desarrollo próximo

Vygotsky (1988) argumenta que es posible que dos niños con el mismo nivel evolutivo real, ante situaciones problemáticas que impliquen tareas que lo superen, puedan realizar las mismas con la guía de un maestro, pero que los resultados varían en cada caso. Ambos niños poseen distintos niveles de edad mental. Surge entonces el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como:

> «***la distancia en el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.***» **(Vigotsky, 1988, p. 133)**

Con respecto al nivel real de desarrollo, Vygotsky considera que el mismo refiere a funciones que ya han madurado, entonces, la Zona de Desarrollo Próximo define como «*aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de* *maduración, funciones que en un mañana próximo alcanzarán su madurez y que ahora se encuentran en estado embrionario.*» (Vigotsky, 1988, p. 133)

Para este autor entonces, «*el único tipo de instrucción adecuada es el que marcha adelante del desarrollo y lo conduce*.» (Vigotsky, 1995, p. 143)

Vygotsky expresa que lo «*crea la zona de desarrollo próximo es un rasgo esencial de aprendizaje; es decir, el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante.*» *(Vigotsky, 1988, p. 138)*

Sin embargo, no se considera eficiente a todo trabajo en cooperación con alguien que sabe más; la idea es que se trabaje con alguien que sabe más sobre un concepto que el niño desarrollará e internalizará en un futuro próximo. Debe quedar claro que la noción de ZDP hace referencia a trabajar sobre un nivel evolutivo por desarrollarse, no sobre lo ya desarrollado, es decir que no es una mera práctica.

El aprendizaje no es desarrollo pero; «*el aprendizaje organizado se convierte en desarrollo mental y pone en marcha una serie de procesos evolutivos que no podrían darse nunca al margen del aprendizaje.*» *(Vigotsky, 1988, p. 139)*

A diferencia de otras corrientes psicológicas, la teoría socio-histórica considera que «*los procesos evolutivos no coinciden con los procesos del aprendizaje. Por el contrario, el proceso evolutivo* *va a remolque del proceso de aprendizaje, esta secuencia es lo que se convierte en la zona de desarrollo próximo.» (Vygotsky, 1988, p.139)*

Otro punto a tener en cuenta es «*la relación entre las pre-condiciones establecidas por el nivel de desarrollo previo de los sujetos y las posibilidades de aprendizaje consecuentes*.» (Baquero, 1996, p. 141)

De tal modo que *«operar sobre la ZDP posibilita trabajar sobre las funciones en desarrollo, aún no plenamente consolidadas, pero sin necesidad de esperar su configuración final para comenzar un aprendizaje.»* (Baquero, 1996, p. 141)

Como bien dice Newman, Griffin, & Cole (1991) se desarrolla: *«la actuación antes de que aparezca la competencia.» (p. 80)*

Es muy importante dentro del concepto de ZDP la relación del individuo con el otro que lo guía. Se habla aquí del plano interpsicológico, para luego pasar al intrapsicológico, cuando el individuo internaliza el nuevo concepto y éste se convierte en un logro de su proceso de desarrollo.

Cabe aclarar que no debiera confundirse un:

> «**proceso "evolutivo interno" o un "logro evolutivo" con una actividad que sea parte del mismo: "No debe contemplarse la adquisición de habilidades elementales como conquistas en el desarrollo psicológico en sentido estricto, aun cuando se las juzgue compatibles con tal desarrollo e, incluso, coadyuvantes o posibilitantes suyos.**». (Baquero, 1998, p. 143)

Un claro ejemplo sería el proceso de alfabetización que puede por un lado considerarse como un "genuino progreso en el desarrollo en sentido estricto" pero que por otro lado implica la apropiación de procedimientos, estrategias, habilidades más locales, que en sí mismos no constituyen “genuinos logros del desarrollo” y, agrega el autor, no se debe “confundir ambos niveles dando tratamiento de logro en el desarrollo a adquisiciones parciales o de habilidades elementales.

Moll, por su parte, sostiene que es necesario «*rechazar la conceptualización de la zona como la enseñanza o evaluación de habilidades y sub-habilidades discretas separables, indicando que, la transferencia de conocimiento y, especialmente, de habilidades, de aquellos que saben más a aquellos que saben menos, puede caracterizar a casi cualquier práctica de la enseñanza*.»(Baquero, 1996, p. 163)

La categoría de ZDP es, según Baquero (1998), la más debatida de la producción educativa o psicoeducativa Vigotskiana. Este autor indica que la descripción hecha por Vygotsky en varios de sus libros, ofrece distintas imágenes con respecto a los procesos que entran en juego en las interacciones entre un adulto y un niño o entre pares, dando lugar a diferentes interpretaciones de la naturaleza de los procesos pedagógicos.

2.2.1.1.4.3 Aportes de David Ausubel.

David Ausubel, Joseph Novak y Helen Hanesian, especialistas en psicología educativa de la Universidad de Cornell, han diseñado la teoría del aprendizaje significativo, según la cual para aprender es necesario relacionar los nuevos aprendizajes a partir de las ideas previas del alumnado.

Desde esta perspectiva el aprendizaje es un proceso de contraste, de modificación de los esquemas de conocimiento, de equilibrio, de conflicto y de nuevo equilibrio otra vez. Según Ausubel, Novak y Hanesian expresan: «*el mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto en la información adquirida como en el aspecto específico de la estructura cognoscitiva con la cual aquella está vinculada.*» (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983, pág. 14)

Podemos decir, por tanto, que el aprendizaje es construcción de conocimiento donde unas piezas encajan con las otras en un todo coherente.

Por tanto, para que se produzca un auténtico aprendizaje, es decir un aprendizaje a largo plazo y que no sea fácilmente sometido al olvido, es necesario conectar la estrategia didáctica del profesorado con las ideas previas del alumnado y presentar la información de manera coherente y no arbitraria, "construyendo", de manera sólida, los conceptos, interconectando los unos con los otros en forma de red de conocimiento.

El aprendizaje, para que se pueda denominar así, ha de ser significativo, es decir, que adquiera la propiedad de ser un aprendizaje a largo plazo.

Ausubel, Novak, & Hanesian (2002) explican que «l*a esencia del aprendizaje significativo reside en el hecho de que las ideas están relacionadas simbólicamente y de manera no arbitraria (no al pie de la letra) con lo que el alumnado ya sabe.*» *(p. 326)*

Podemos decir, por tanto, respecto a los materiales y recursos para el aprendizaje, que se produce aprendizaje significativo si el material está relacionado de manera no arbitraria en la peculiar estructura cognoscitiva del alumnado.

Por otra parte los materiales aprendidos significativamente pueden ser retenidos durante un periodo relativamente largo de tiempo, meses incluso años mientras que la retención del conocimiento después de un aprendizaje memorístico por repetición mecánica es de un intervalo corto de tiempo medido en horas o días.

Los aprendizajes por repetición son entidades aisladas, desconectadas y dispersas en la mente del alumnado, por lo que no permiten establecer relaciones en su estructura cognoscitiva. Estos aprendizajes son de rápido olvido y, aunque permiten una repetición inmediata o próxima en el tiempo, no son un aprendizaje real ni significativo.

Conseguir que el alumnado tenga estructuras de conocimiento potentes y significativas hace que se sienta bien y que mejore su autoestima, que se sienta interesado por lo que aprende y que le guste lo que hace; tiene un fuerte estímulo intelectual porque ve el resultado positivo de su proceso de aprendizaje, mantiene alta la moral del grupo y aprende a aprender. Con el aprendizaje significativo el alumnado da sentido a aquello que puede tener sentido, a lo que puede comprender, a lo que está dentro de su campo próximo de aprendizaje, ya que fuera de esta zona próxima no nos puede entender. El aprendizaje significativo da al alumnado los elementos de anclaje en la experiencia propia de los conceptos nuevos que se presentan de manera coherente e interconectada. Según Ausubel, Novak, & Hanesian (2002), «*el aprendizaje es por tanto un proceso de construcción individual y personal, los humanos integramos dentro de las estructuras de conocimiento aquellos conceptos que tienen en cuenta y se relacionan con lo que ya sabemos.*» (p. 326)

Los aprendizajes por repetición tienen poco valor de transferencia, (utilizar conceptos aprendidos y extrapolarlos a otras situaciones; se trata por tanto de la capacidad de que una información aprendida de manera coherente permita la extrapolación a otra situación de la realidad). Según los autores de la teoría constructivista ya citados, incorporar ideas claras, conectadas, estables e integradoras es la manera más eficaz de fomentar la transferencia.

Gran parte del aprendizaje escolar consiste en la asimilación de conceptos en la cual tienen una importancia capital los significados de los nuevos conceptos y las relaciones entre ellos. Por ello podemos decir que el aprendizaje significativo tiene varias ventajas, entre ellas que los conceptos aprendidos significativamente pueden extender el conocimiento de una persona mediante los conceptos relacionados, además como el aprendizaje significativo implica la construcción intencionada de enlaces sustantivos y lógicos entre los nuevos conceptos y los preexistentes, la información aprendida significativamente será retenida más tiempo.

Cuando el alumnado reconoce en su propia estructura cognitiva el fundamento del hecho educativo y de lo que aprende el significado en su experiencia será duradero. El aprendizaje significativo, por tanto, ayuda a pensar, mantiene las conexiones entre los conceptos y estructura, las interrelaciones en diferentes campos de conocimiento, lo que permite extrapolar la información aprendida a otra situación o contexto diferente, por lo que el aprendizaje es un aprendizaje real y a largo plazo.

El aprendizaje significativo no es sinónimo de aprendizaje de material significativo. Desde la perspectiva constructivista, el material sólo es potencialmente significativo, ya que material significativo también podría ser usado por repetición, por lo que no se potenciaría el aprendizaje significativo en el alumnado. Cuando se produce aprendizaje significativo, las nuevas ideas se relacionan con algún aspecto relevante en la estructura cognoscitiva del alumnado, como por ejemplo una imagen, un símbolo o un concepto ya significativo, y se relacionan con su estructura de conocimiento.

El alumnado tiene una capacidad inagotable de crear, por lo que es necesario utilizar el potencial enorme de la persona, la teoría de aprendizaje significativo viene a potenciar esta cualidad humana. Los materiales, los recursos diversificados y atractivos son una fuente potente de motivación y potencian el interés por aprender.

Ausubel, Novak y Hanesian concluyen que la motivación es tanto un efecto como la causa del aprendizaje, por lo que no se ha de esperar la motivación antes de comenzar las tareas del aprendizaje sino que, según estos autores recuerdan que, «*conviene elevar al máximo el impulso cognoscitivo, despertando la curiosidad intelectual y utilizando materiales que atraigan la atención*». (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983, p. 14)

El aprendizaje significativo es un aprendizaje interiorizado por el alumnado, resultado del conocimiento de las relaciones y conexiones, de manera no arbitraria entre aquello que el alumnado sabe y aprende. Según los autores de la teoría constructivista la tremenda eficacia del aprendizaje significativo se debe a su sustancialidad y falta de arbitrariedad.

2.2.1.1.5 El dominio afectivo de la matemática.

2.2.1.1.5.1 Relación entre cognición y afecto

Las matemáticas siempre se han vinculado a la racionalidad, a los sistemas formales, a la abstracción y a la lógica. Porque las matemáticas son una ciencia abstracta, rigurosa y exacta. Difícilmente podrían relacionarla con el ámbito afectivo, con la esfera de las emociones.

Es una realidad que las emociones intervienen en el aprendizaje de manera significativa ya sea facilitándolo u obstaculizándolo, desempeñando un papel en la comunicación de intenciones de los estudiantes hacia los demás.

Las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y que algunas de ellas están fuertemente arraigadas en el sujeto y no son fáciles desplazables por la instrucción.

McLeod citado por Gómez Chacon (2008) utiliza el término de dominio afectivo cuando «*se refiere a un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición*.» *(p. 22)*

En esta definición se incluye como descriptores específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones.

Los descriptores básicos están también consideradas:

a) **Las creencias**, definidas por McLeod citado por Gómez Chacon (2008) como las *"Experiencias y conocimientos subjetivos del estudiante y del profesor. Las creencias del estudiante se caracterizan en términos del objeto de creencias: creencias acerca de la matemática (el objeto); acerca de uno mismo; acerca de la enseñanza de la matemática; y creencias acerca del contexto en el cual la educación matemática acontece."* **(p. 23)**

La parte del conocimiento, perteneciente al dominio cognitivo, compuesta por elementos afectivos, evaluativos y sociales, con una fuerte estabilidad. McLeod, citado por McLeod y a la vez citado por Gómez Chacon (2008) señala dos categorías de las creencias que principalmente parecen tener influencias en el aprendizaje de las matemáticas:

> «***Creencias acerca de las matemáticas como disciplina que los estudiantes desarrollan. Estas creencias generalmente involucran poca componente afectiva, pero constituyen una parte importante del contexto en el que el afecto se desarrolla. Una segunda categoría se refiere a las creencias del estudiante (y del profesor) acerca del mismo y su relación con la matemática; tiene una fuerte componente afectiva, e incluye creencias relativas a la confianza, al autoconcepto, y a la atribución causal del éxito y fracaso escolar. Son creencias estrechamente relacionadas con la noción de metacognición y autoconciencia.***»***(p. 23)***

b) **Las actitudes:** se entiende como *«Una predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Consta por tanto, de tres componentes: una cognitiva que se manifiesta en las* *creencias subyacentes a dichas actitudes, una componente afectiva que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo de la tarea o de materia y un componente intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento.*» (Gómez Chacon, 2008, p. 23)

Entonces las actitudes como una moderada y estable predisposición evaluativa —positiva o negativa— que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento y consta de las componentes cognitiva y afectiva.

> «***Las actitudes hacia la Matemática se refieren a la valoración y el aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva; aquélla se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc…***
> ***Las actitudes que comprenden este grupo pueden referirse a cualquier de los aspectos siguientes:***
> ***1. Actitud hacia la matemática y los matemáticos (aspectos sociales de la matemática)***
> ***2. Interés por el trabajo matemático como asignatura.***
> ***3. Actitud hacia determinadas partes de la matemática.***
> ***4. Actitud hacia los métodos de enseñanza.***» **(Gómez Chacon, 2008, p. 24)**

c) **Los valores:** concebidos como aquel bien que el hombre ama y que descubre en cuanto lo rodea como merecedor de estima, altamente estructurado en el individuo; y las apreciaciones.

> «***… La clase de valoración relacionadas con el acto emocional sigue el acontecimiento de alguna percepción o discrepancia negativa en la que las expectativas del sujeto se infringen. Tales expresiones de las creencias de los estudiantes acerca de la naturaleza de la actividad matemática, de sí mismo, y acerca de su rol como estudiantes en la interacción en la clase…***» **(Gómez Chacon, 2008, p. 25)**

Estas tres categorías reflejan el rango total de reacciones afectivas implicadas en el aprendizaje de las matemáticas. Estos términos se refieren a un conjunto de respuestas que varían en cuanto a la intensidad del afecto que conllevan, es decir, desde una actitud más bien indiferente para las creencias hasta una actitud «cálida» para las emociones. También, difieren en términos de su estabilidad: mientras que las creencias y las actitudes son fundamentalmente estables y resistentes al cambio, las emociones se alteran rápidamente.

> «***El estudiante, al aprender matemática, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas -problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc. – que le generan cierta tensión. Ante ello reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa. Esta reacción está condicionada por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si el individuo se encuentra con situaciones similares repetidamente, produciéndose la misma clase de reacciones afectivas, entonces la activación de la reacción emocional (satisfacción, frustración, etc.) puede ser automatizada, y se "solidifica" en actitudes. Estas actitudes y emociones influyen en las creencias y colaboran a su formación.***» **(Gómez Chacon, 2008, p. 26)**

El aprendiz de matemática debe lograr un adecuado **autoconcepto** como alumno y **confianza** sobre sus propias habilidades para hacer matemática, en los diversos contextos en los que se usa: hogar, escuela, vida diaria; y al relacionarse con distintas personas: sus padres, familia, amigos, compañeros de clase, etc. El autoconcepto tiene una fuerte influencia en su visión de la matemática y en su reacción hacia ella.

Como pautas a tener en cuenta se sugiere que el docente debe proponer a sus estudiantes situaciones de aprendizaje que capten el interés en matemática, promover una motivación intrínseca y sensación de éxito. Ayudarles a realizar adecuadas atribuciones sobre su éxito o fracaso en actividades relacionadas con la Matemática, así como contribuir para que en su grupo social cada estudiante sea valorado y acreciente su sentimiento de capacidad en Matemática.

2.2.1.1.5.2 Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje.

En las actividades matemáticas que desarrollan nuestros estudiantes es relevante el tratamiento que otorguemos a los errores o dificultades que experimenten, desde la dimensión afectiva de la matemática.

Godino y otros (2003) puntualizan la diferencia entre error y dificultad. El error se produce cuando el alumno proporciona una acción (respuesta, argumento, discusiones grupales, uso de una técnica, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad, indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

Los errores que comenten nuestros estudiantes durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas son fuente rica para el conocimiento de su forma de pensar y razonar, también nos ayudan a identificar las estructuras relaciónales que han establecido sobre los contenidos, a determinar las causas de los errores y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información. Hay que tener presente que algunas de estas ideas o concepciones erróneas existen ya en los estudiantes antes de que comience el proceso instructivo específico del tema.

Las creencias del profesor en relación a los errores que comenten los estudiantes en su aprendizaje dejan entrever sus propias concepciones sobre las matemáticas y el modelo de aprendizaje. Si concibe la matemática como una ciencia estática, con un corpus de conocimiento acabado, piensan que en la matemática se debe eliminar el error a toda costa y cuando se produce debe ser corregido inmediatamente; en cambio, quien concibe la matemática como una ciencia abierta, cuya actividad es realizada con idas y venidas, con dificultades y aciertos, concibe el error como constitutivo del conocimiento.

Compartimos la idea de dar espacio a la equivocación del alumno, sin sancionar o corregir inmediatamente, sino más bien orientarle para que encuentre el camino, analice el error y tenga la oportunidad de corregir pero a costa de su reflexión y análisis. Este tipo de ayuda pedagógica tiene un componente formativo, que no descalifica la actividad del alumno sino, como los antiguos matemáticos, favorece una actividad matemática productiva y aumenta la confianza en sí mismo.

Godino y otros (2003) han establecido una categorización de algunas causas de errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática. Estas dificultades están en relación con:

- ✓ los contenidos matemáticos.
- ✓ la secuencia de actividades propuestas.
- ✓ la organización del centro.
- ✓ la motivación del alumno.
- ✓ el desarrollo psicológico del alumno.
- ✓ la falta y dominio de los contenidos anteriores.

2.2.1.2 Aprendizaje de la matemática en educación primaria.

2.2.1.2.1 La comprensión del número y del sistema de numeración.

El niño inicia la comprensión del número y del Sistema de Numeración Decimal a partir de experiencias que le ofrece su entorno. Es en la escuela donde formaliza sus ideas intuitivas, alcanzado una comprensión reflexiva de estas nociones. Entre ellos tenemos: la clasificación, seriación, secuencia verbal, conteo. En ese sentido Chamorro, Belmonte Gómez, Llinares, Ruiz Higueras, & Vecino Rubio, (2003) afirman que:

> «***El número y la numeración son objetos culturales, utilizados cotidianamente en el medio familiar y social. Es ingenuo no tener esto en cuenta en la enseñanza y hacer como si el niño no conociera absolutamente nada relacionado con el dominio numérico al llegar a la escuela. Debemos tener en cuenta los saberes previos de los alumnos, enriquecer sus prácticas iniciales y sus procedimientos primitivos en torno al número y a su designación.***» (*p. 106*)

2.2.1.2.1.1 Clasificación.

La clasificación «*nos permite organizar los elementos en clases en función de semejanza y diferencia*» (Ribes, Ales, Clavijo, & Fernández, 2006. p.238); es decir, es un proceso mediante el cual el niño junta elementos por semejanzas y los separa por diferencias, en función a uno o más criterios. Este proceso se inicia en los primeros años de vida.

Para comprender la clasificación es necesario construir dos tipos de relaciones lógicas:

- ✓ **La pertenencia:** relación que se establece entre cada elemento y la clase de la que forma parte. Por ejemplo; un triángulo pequeño es un elemento de la clase “triángulo”.

- ✓ **La inclusión:** relación que se establece entre cada subclase y la clase de la que forma parte. Por ejemplo: los triángulos y los cuadrados son subclases de la clase de “figuras geométricas”

Este proceso se va desarrollando de forma gradual en tres estadios, desde las agrupaciones en colecciones figúrales hasta las clases lógicas.

- ✓ **Primer estadio:** Colecciones figúrales (hasta los 5 años, aproximadamente).El niño realiza agrupaciones muy elementales en las que se limita a construir elementos del entorno: casas, torres, carritos, etc. Hay una fuerte influencia de lo perceptivo.
- ✓ **Segundo estadio:** Colecciones no figúrales (5 – 7 años, aproximadamente). El niño ya puede formar pequeños conjuntos por semejanzas, siguiendo criterios básicamente perceptuales (color, forma, tamaño, etc.). En este estadio se distinguen tres momentos:
    1. **Pequeñas colecciones yuxtapuestas.** Son agrupaciones que no siguen un criterio único y que no consideran todos los elementos. (Hay residuo).
    2. **Colecciones a partir de un criterio único, sin residuo.** Son agrupaciones que siguen un criterio único y que consideran todos los elementos.
    3. **Subclases dentro de clases.** Son agrupaciones en las que se considera algunas subclases al interior de alguna clase.
- ✓ **Tercer estadio:** Clases lógicas (a partir de los 7 años, aproximadamente). Son agrupaciones en las que el niño ya

clasifica utilizando todos los elementos y de manera jerárquica, es decir, ya puede formar clases y subclases.

2.2.1.2.1.2 Seriación.

Consiste en el *«ordenación de los elementos de un conjunto según sus dimensiones. Es necesario aplicar las propiedades antisimétricas y transitivas.»* (Ribes, Ales, Clavijo, & Fernández Gonzáles, 2006, p. 238), o como lo expresa Piaget & Inhelder (2007) «…que consiste en ordenar los elementos según sus dimensiones crecientes o decrecientes...» (p. 104), es decir, establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenarlos considerando algunas de sus diferencias. Está muy influenciado por la percepción del niño. La seriación requieres establecer tres propiedades:

- ✓ **La reciprocidad:** cada elemento de una serie tiene una relación con el elemento inmediato, de tal manera que al cambiar el sentido de la comparación, dicha relación también cambia.
- ✓ **La transitividad:** Consiste en establecer la relación entre un elemento de una serie y el siguiente, y de este con el posterior, para poder identificar la relación existente entre el primero y el último.
- ✓ **La reversibilidad:** Es la posibilidad de concebir simultáneamente dos relaciones opuestas, es decir, considerar a cada elemento como menor que los siguientes y mayor que los anteriores.

Según Piaget & Inhelder (2007), la seriación pasa por tres etapas en el niño:

> «**primero parejas o pequeños conjuntos (una pequeña o una grande, etc.), pero incoordinables entre sí; luego una construcción por tanteos empíricos, que constituyen regulaciones semireversibles, pero aún no operatorias; finalmente, un método sistemático, consistente en buscar, por comparaciones, dos a dos, el más pequeño elemento aparente, luego el más pequeño de los que quedan, etc. …» (p. 104**)

2.2.1.2.1.3 Secuencia verbal.

En determinadas ocasiones, los números naturales se puede recitar en su orden habitual: uno, dos, tres, cuatro, etc. sin referirlos a ningún entre u objeto externo.

Para lograr el dominio de la secuencia verbal el niño recorre cinco etapas:

- ✓ **Primera etapa:** secuencia en cuerda. La sucesión empieza en uno y los términos no están diferenciados. Se trata de un conocimiento verbal más que de conteo.
- ✓ **Segunda etapa:** cadena irrompible**.** La sucesión comienza en uno y los términos están diferenciados. A partir de este nivel ya pueden empezar a contar, pero iniciando siempre en 1**.**
- ✓ **Tercera etapa:** cadena rompible. La sucesión puede comenzar en un número cualquiera.
- ✓ **Cuarta etapa:** cadena numerable. Cuenta un número determinado a partir de cualquier número. Cuando se detiene, puede decir en qué número ha terminado.
- ✓ **Quinta etapa:** cadena bidireccional. Cuenta a partir de un número y lo puede hacer hacia adelante o hacia atrás.

Una vez alcanzada la quinta etapa (en un tramo de la secuencia) es posible establecer relaciones tales como: “antes de” y “después de”; entre los números de esta secuencia. Según la mayoría de los investigadores, los niños alcanzan este dominio alrededor de los siete años u ocho años. Debemos tener en cuenta que el dominio de la secuencia verbal no garantiza la comprensión del número.

2.2.1.2.1.4 Conteo.

Los niños a través del conteo, encuentran la cantidad de elementos de un conjunto dado y pueden abordar situaciones aditivas (nos referimos a los problemas que pueden resolverse mediante adiciones o sustracciones) sin tener la necesidad de realizar operaciones.

Para contar, el niño debe poner en juego los siguientes principios, tal como manifiesta Kulm citado por Espeleta & Castillo: (2003, pág. 26)

a) **Orden estable.** El niño cuenta en una secuencia fija: “uno, dos, tres”, etc. Si el niño cuenta siempre en el mismo orden, entiende este principio.
b) **Apareamiento uno a uno**: al contar los objetos, el niño aparea cada número con un objeto y cuenta todos los objetos.
c) **Número total:** el niño sabe que el último contado es el número total de objetos.
d) **Objetos diferentes:** el niño sabe que los objetos a ser contados no necesitan ser todos del mismo tipo.
e) **Orden diferente:** el niño sabe que los objetos pueden ser contados en cualquier orden.

2.2.1.2.1.5 Conservación de la Cantidad

Un niño logra la conservación de la cantidad cuando se da cuenta de que la cantidad de elementos de un conjunto no se altera aun cuando se modifica la disposición de estos en el espacio.

El desarrollo de la conservación de la cantidad no se logra repentinamente. Más bien, es un proceso que siguen los niños con cierta regularidad, y que comprende cuatro fases.

Explicaremos en qué consisten estas fases a partir de la siguiente actividad:

- ✓ Forme en presencia del niño una fila de ocho fichas grises colocándolas una a continuación de otra con cierta separación.
- ✓ Luego, pida al niño que forme delante de esta fila, otra fila con tantas fichas blancas como grises.
- ✓ Si lo hace con éxito separe un poco la última ficha y pregunte al niño si hay más fichas grises o más fichas blancas.

A partir de las respuestas del niño se podrá identificar en cuál de las siguientes fases se encuentra.

- ✓ **Primera fase: Ausencia de correspondencia término a término** (4 - 5 años aproximadamente) Al pedirle que forme otra fila de fichas blancas: Toma en cuenta la disposición de las fichas y no la cantidad. No usa correspondencia término a término.
- ✓ **Segunda fase: Correspondencia término a término sin conservación** (5 - 6 años aproximadamente) Tiene éxito al formar otra fila de fichas blancas, pues: Usa correspondencia término a término y coloca la misma cantidad. Sin embargo: Si se separa un

poco la última ficha, cree que ya no hay la misma cantidad de fichas grises que blancas ya que se rompió la equivalencia visual.

- ✓ **Tercera fase: Conservación no duradera** (7 años aproximadamente) Conserva la cantidad pero no es estable. Su respuesta dependerá de: Si aplica la correspondencia término a término y Si se basa en su percepción visual.
- ✓ **Cuarta fase: Conservación estable** (A partir de 7 años aproximadamente) Conserva la cantidad a pesar de las modificaciones en la disposición de las fichas. El niño distingue el "separar" del "añadir" y puede argumentar su conclusión a partir de alguna de las siguientes ideas: No se añade ni se quita fi chas (identidad), basta con regresar la última ficha blanca a su posición inicial para tener la misma situación inicial (pensamiento reversible), la fila de fichas blancas es más extensa porque algunas fichas están más separadas (compensación).

2.2.1.2.1.6 La inclusión de clases y la reversibilidad del pensamiento.

La inclusión de clase consiste en establecer la correspondencia entre una subclase y la clase que la contiene. Las habilidades relacionadas con la clasificación, vista anteriormente, son importantes para identificar esta correspondencia.

En una situación el niño no puede atender al todo y a las partes simultáneamente. Cuando el niño fija su atención en una de las partes, el todo deja de existir y ya no puede pensar en este todo.

Para pensar en el todo y en las partes de manera simultánea el niño tiene que realizar dos acciones opuestas al mismo tiempo, lo cual corresponde a un pensamiento reversible, que consiste en «*pensar* *en dos direcciones: por ejemplo, comprender que la suma y la resta son dos operaciones inversas que dependen de la reversibilidad, este pensamiento descentralizado y reversible explica las habilidades para conservar, clasificar, ordenar y comprender los conceptos matemáticos*» (Hernández & Soriano, 1997, p.19). Cuando el niño escucha alguna de las partes, no debe perder de vista el todo. La reversibilidad consiste en realizar mentalmente dos acciones opuestas de manera simultánea, lo cual es una condición necesaria para la inclusión de clases.

La inclusión de clases y el pensamiento reversible son características que logra el pensamiento infantil hacia los siete u ocho años. Sin embargo, esto no significa que niños menores de ocho años no puedan abordar situaciones relacionadas al uso del todo y las partes. Por el contrario, estas situaciones relacionadas a hechos cotidianos favorecerán el progreso de la inclusión de clases en el niño.

Para trabajar la inclusión de clases y la reversibilidad, se recomienda diseñar actividades que promuevan simultáneamente acciones opuestas: juntar-separar, agregar-quitar. Los conocimientos previos de los niños pueden ayudarlos a abordar satisfactoriamente estas acciones.

2.2.1.2.2 El significado del número.

Según Piaget & Inhelder (2007) «*la construcción de los números enteros se efectúa, en el niño, en estrecha ligazón con la de las seriaciones y de las inclusiones de clases.*» (p. 106).

Tal como lo explica Dienes Zoltan & Golding E. (1970), sobre número:

«… los números no tienen una existencia concreta como los objetos que vemos a nuestro alrededor. Los números son propiedades, como el color, la forma, las dimensiones, etc. No existe ningún objeto que se llame "un grande", pero hay objetos grandes. El tamaño es una propiedad sin existencia concreta. Lo mismo pasa con el color; no se puede decir: "aquí tienes un azul", a menos que hablemos de una cosa determinada; pro hay objetos azules. Las dimensiones, los colores, son propiedades o atributos, que se refieren a unos objetos individualizados. El número es una propiedad que se refiere a colecciones, a conjuntos de objetos. Ningún objetos puede tener la propiedad "dos"; pero un conjunto de objetos puede tener la propiedad de dos…» (p. 15)

En ese sentido las funciones esenciales del número son según Chamorro, Belmonte Gómez, Llinares, Ruiz Higueras, & Vecino Rubio (2003, pág. 107):

- ✓ **Medir una colección:** asignar un número natural a una colección.
- ✓ **Producir una colección:** operación inversa a la anterior.
- ✓ **Ordenar una colección:** asignar una determinada posición a los elementos de una colección.

2.2.1.2.2.1 Como nominal.

El número es utilizado para simbolizar o denotar algo, o como una etiqueta para identificar objetos. El valor numérico es irrelevante y no indica cantidad, rango o cualquier otra medida. Este uno es el primer acercamiento del niño al número.

2.2.1.2.2.2 Como cardinal.

El número se usa para conocer la cantidad de objetos en un conjunto. Nos permite contestar a la pregunta: "¿Cuántos hay?". Es así como lo explica Castro (2008): «*Se utiliza el significado cardinal del número natural para designar el "tamaño" de un conjunto.*» *(p. 124)*

2.2.1.2.2.3 Como ordinal.

El número hace referencia a un elemento dentro de una colección ordenada. Este uso del número nos permite responder a la pregunta: “¿Qué posición ocupa?”

> **«Cuando un conjunto de objetos puede ser ordenados linealmente de tal manera que podemos asociar el número 1 con el primer elemento, el número 2 al siguiente, y así sucesivamente hasta acabar los elementos, es posible contestar a preguntas tales como ¿Qué posición ocupa?, referida a uno de los elementos de la serie, o ¿Cuál de ellos?. Este es el uso ordinal del número, que se refiere a la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y totalmente ordenado en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial. El uso ordinal del número depende del orden establecido.» (Castro, 2008, p. 126)**

2.2.1.2.2.4 Como medida.

Cuando se mide un objeto o un evento empleando una cantidad de medida, se utiliza los números para expresar el resultado de la medición. En ese sentido Castro (2008) nos explica que:

> ***«Cuando se mide un objeto o un evento empleando una unidad de medida, se utilizan los números naturales para expresar el resultado de la medición en los casos en que la unidad de medida esté contenida un número exacto de veces en la cantidad que se mide. Esto ocurre en la medida de magnitudes continuas como la longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, tiempo, etc. y nos permite responder a la pregunta de cuantas unidades hay.» (p. 125)***

2.2.1.2.3 Construcción del sistema de numeración decimal.

El sistema de numeración decimal se ha construido a la largo de cientos de años, lo que da cuenta de su complejidad. En ese sentido castro (2008), afirma que:

> ***«El sistema de numeración decimal es un conjunto finito de signos, reglas y convenios que permiten representar la serie infinita de los números naturales. El uso cotidiano y automatizado que tenemos de representar números en el sistema de numeración decimal puede ocultar las dificultades por las que atravesó históricamente para alcanzar la situación actual y la que puede suponer su aprendizaje por parte de los niños.» (p. 138)***

Por otro lado Lerner & Patricia (1994) manifiestan que:

> «*… la numeración escrita existe no sólo dentro de la escuela sino también fuera de ella, los niños tienen oportunidad de elaborar conocimientos acerca de este sistema de representación desde mucho antes de ingresar en primer grado. Producto cultural, objeto de uso social cotidiano, el sistema de numeración se ofrece a la indagación infantil desde las páginas de los libros, la lista de precios, los calendarios, las reglas, los talonarios de la panadería, las direcciones de las casas.*» *(p. 97)*

Por lo que en cierta medida, el niño debe realizar este proceso al reconstruirlo individualmente. Por ello, es necesario considerar que, para los niños de seis o siete años, la comprensión de este sistema podría ser una tarea compleja. Aun así, es importante que, en los primeros grados, el niño pueda comprender el Sistema de Numeración decimal para interpretar cantidades, operar con ellas y resolver problemas.

La comprensión del Sistema de Numeración Decimal se inicia con la comprensión del número en términos de unidades solamente lo cual implica comprenderlo en una relación de inclusión jerárquica.

2.2.1.2.3.1 La inclusión jerárquica:

Nos permite establecer relaciones inclusivas entre clases y subclases. En cuanto al número, la inclusión jerárquica permite el reconocimiento de que uno está contenido en dos, que dos está contenido en tres, que tres está contenido en cuatro, y así sucesivamente. Asimismo permite reconocer que cuatro contienen a tres, que tres contiene a dos, que dos contienen a uno.

2.2.1.2.3.2 La construcción de la decena:

Algunas personas consideran de manera errónea que una decena es solo una colección de diez elementos. Para que diez unidades constituyan una decena es necesario que se configure en la mente de quien lo interprete una unidad nueva y diferente a las unidades que la conforman.

Un primer acercamiento a la noción de decena es la posibilidad de comprender y descomponer 10 unidades de todas las formas posibles. Este proceso puede iniciarse con situaciones concretas para luego pasar a representar en sus diversas formas.

De esta manera, resultaría clara la simbolización de estas composiciones y descomposiciones; por ejemplo componer 10: 4+5=10 o 1+9=10, etc. de igual manera descomponer 10: 10=4+6 o 10=7+3, etc.

Esta composición y descomposición de 10 implica cierto nivel de desarrollo de la reversibilidad. El niño puede componer y descomponer el 10 de variadas maneras y siempre entenderlo en término de unidades. Sin embargo es necesario que dé un paso más: que comprenda este grupo de 10 como una nueva unidad denominada decena5.

Por otra parte, el niño debe establecer también la inclusión jerárquica entre decenas sin perder la inclusión jerárquica entre unidades.

2.2.1.2.3.3 El valor de posición.

Otro desafío que el niño debe superar el desarrollo del Sistema de Numeración Decimal es la comprensión del valor de comprensión; es decir, el valor que tiene una cifra de acuerdo a su posición en el número.

Es por eso que es útil utilizar la tabla de valor de posición tal como lo expresa Enrique Castro (2008):

> «***La tabla de valor de posición es útil para ayudar a los niños a entender la escritura posicional de los números. Admite algunas variantes pero el modelo básico consiste en una franja horizontal dividida en casillas que representa de derecha a izquierda los distintos valores en orden crecientes: unidades, decenas, centenas, etc.*» *(p. 143-144)***

Esta comprensión sigue un proceso progresivo en el que se pueden identificar las siguientes etapas:

- ✓ **Etapa I:** El niño comprende que los numerales7 pueden representar cantidades de objetos. Pero, entiende los números de dos cifras como algo "indisoluble", es decir que no se puede separar en las cifras que lo conforman. El niño en esta etapa no comprende que cada cifra es parte del número.
- ✓ **Etapa II:** El niño comprende que los números de dos cifras representan un total de objetos (cardinal) y que estas cifras conforman el número. Sin embargo, atribuyen a cada cifra un valor, independientemente de su posición en el número. En esta etapa, comprende que cada cifra es parte del número, aunque no distingue el valor según la posición que tiene.
- ✓ **Etapa III:** El niño comprende que cada una de las cifras que conforman un número representa una cantidad cuyo valor depende de su posición. En esta etapa, se puede identificar, a su vez, tres fases expuesta por Resnick (1983) que fue citado por Castro (2008, pág. 155):

- **Fase 1**: Reconoce únicamente la descomposición usual de las cantidades en unidades y decenas. Por ejemplo, 24 es igual a 2 decenas y 4 unidades
- **Fase 2:** Reconoce variadas descomposiciones de las cantidades. Por ejemplo, 24 es igual a 1 decena y 14 unidades.
- **Fase 3:** Usa la comprensión del Sistema de Numeración Decimal para justificar los algoritmos de las operaciones.

Estas fases no son excluyentes; es decir, las habilidades de un niño para justificar los algoritmos de la suma o resta con canje pueden corresponder a la fase 3; mientras que sus habilidades para componer y descomponer los números de manera simbólica pueden corresponder a la fase 2.

Para afianzar la comprensión del valor de posición en la etapa III, se sugiere descomponer y componer un número en sus variadas formas.

2.2.1.2.4 Las nociones aditivas.

Tipos de problemas aditivos que puede resolver los niños: Los niños desde muy pequeños empiezan a realizar razonamientos respecto de situaciones que implican cantidades.

Estos razonamientos, que se inician antes de llegar a la escuela en sus interacciones con el entorno, constituyen la base para la resolución de los problemas aditivos. Entre estos razonamientos se pueden mencionar:

- ✓ **Razonamiento de comparación:** permite hacer juicios de cantidad sin precisión numérica (más pequeño que, más grande qué)
- ✓ **Razonamiento de incremento-decremento:** permite identificar un cambio en una cantidad cuando se añade o se quita.
- ✓ **Razonamiento de parte y el todo:** permiten entender que es más fácil trabajar con una totalidad si se la divide en partes.

Es así que, desde muy pequeños, los niños pueden resolver problemas asociadas a los significados de añadir, quitar, juntar, repartir, aún sin saber sumar ni restar, solamente basados en deducciones sencillas y utilizando como recurso sencillo el conteo y sus principios.

Para que los niños puedan consolidar la noción aditiva y sus habilidades en la resolución de problemas, cuando ingresan a la escuela, es necesario que resuelvan situaciones de su vida cotidiana asociada a acciones de agregar, quitar, juntar, separar, comparar e igualar, que en la didáctica de la matemática se organizan como problemas aritméticos de enunciados verbales (PAEV por sus siglas). Los PAEV se traducen en problemas de Combinación, cambio o transformación, comparación e igualación, los cuales

2.2.1.2.5 Concepto de las operaciones de adición y sustracción.

Las matemáticas escolares de la educación básica primaria ponen en contacto a los niños, desde que inician su vinculación a la escuela, con actividades aritméticas que requieren el uso de números, operaciones y problemas.

A. Estructura aditiva en el currículo

Los escolares entran en contacto con situaciones aditivas a través de su entorno, antes de iniciar su período escolar en Educación Primaria. El currículo para este nivel educativo recomienda que en la enseñanza se utilicen situaciones familiares en las que la adición y la sustracción estén involucradas, así como diferentes formas de representar y modelizar las operaciones.

La secuencia numérica está relacionada con la estructura aditiva, pues el paso de un número a otro en la secuencia se obtiene sumando una unidad para alcanzar el número siguiente. La identificación de regularidades y relaciones- numéricas en el sistema decimal de numeración permite una primera aproximación a las .propiedades de las operaciones de adición y sustracción. Las técnicas de conteo, hacia delante y hacia atrás, de uno en uno, de dos en dos, etc., son estrategias básicas para iniciarse en los algoritmos de cálculo. Resolver problemas sencillos eligiendo la operación y utilizando un algoritmo válido es también objetivo de esta etapa educativa. Entre las estrategias de cálculo los documentos curriculares señalan la necesidad de aplicar los algoritmos básicos para obtener los resultados de las operaciones aditivas, desarrollar estrategias de cálculo mental y técnicas de cálculo aproximado y el uso de la calculadora.

Las expectativas de aprendizaje del escolar en Educación Primaria hacen que el futuro maestro tenga que profundizar sobre los elementos que configuran la estructura aditiva. Es necesario que el futuro maestro conozca el significado de las operaciones con números naturales basadas en el sistema de numeración decimal, así como los contextos y situaciones con los que la adición y la sustracción están asociadas; que defina y relacione los conceptos de adición y sustracción; que reconozca, identifique y enuncie diferentes tipos de problemas que se puedan plantear mediante las operaciones aditivas; que represente y resuelva problemas en esta estructura mediante diferentes modelos, y que sepa justificar los algoritmos tradicionales de la adición y la sustracción.

Por lo que la descripción que hacen Carpenter y Moser citado por Castro Martinez, Rico Romero, & Castro Martinez (1996) es un resumen adecuado sobre el aprendizaje que deben realizar los niños sobre la estructura aditiva:

> «***el concepto de estructura aditiva, del cual la adición y la sustracción son sus ejemplo más elementales, subyace en una gran parte de la matemática y se desarrolla sobre un extenso periodo de tiempo. La transición desde los recuentos informales y el modelado de estrategias que los niños realizan al margen de su instrucción formal, hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la adición y sustracción, es una etapa crítica en el aprendizaje de las matemáticas en los niños, y aún más, algunas de las dificultades posteriores en matemáticas pueden señalarse en la instrucción inicial de la suma y resta***» ***(p.139)***

B. Significado y representación de la adición y de la sustracción.

Las representaciones muestran diferentes significados de las dos operaciones aritméticas consideradas. En este apartado presentamos los significados y las representaciones de la adición y de la sustracción.

Una búsqueda en diversos diccionarios y enciclopedias permite encontrar diferentes términos relacionados con la estructura aditiva. Acumular, ampliar, añadir, aumentar, dar, deducir, disminuir, disponer, imponer, ingresar, meter, poner, quitar, recibir, recoger, reducir, regalar, restar, reiterar, reunir, sacar, sumar y sustraer son algunos de ellos. No es posible discernir cuáles de estos términos están asociados a la adición y cuáles a la sustracción. Así, por ejemplo:

- Quitaron primero cuatro cuadrados y luego yo quité otros 3 se expresa simbólicamente por: 4 + 3.
- Tenía 5 mensajes y quité 3 de ellos, se expresan simbólicamente por. 5 – 3.

Por lo que Bermejo (2004) explica que: *«Existen dos concepciones diferentes de la suma y resta: unitaria y binaria. Aunque desde ambas se llega a resultados idénticos, no obstante, las situaciones son diferentes (…)» (p. 53). Por lo que «Las diferencias entre ambas concepciones son claras, ya que en la primera hay una acción que modifica el primer conjunto mediante el segundo conjunto, mientras que en la segunda no hay acción en el planteamiento de ambos conjuntos. En el primer caso se habla de una situación dinámica y en el segundo de una situación estática.»*(p. 55)

1. **Significado de la adición.**

Existen dos significados diferentes de la adición: unitaria y binaria.

En la ***concepción unitaria*** de la adición *«hay una cantidad inicial que experimenta un cambio al añadirle una segunda cantidad. El resultado es el incremento de la segunda* *cantidad sobre la primera.»* (Segovia & Rico, 2011, pág. 79). Por ejemplo: Manolo tiene tres lápices y Rosa le da dos.

En la **concepción binaria** de la adición *«hay dos cantidades que tienen asignado el mismo papel. Se realiza una unión o combinación de las dos cantidades que permite llegar al resultado.»* (Segovia & Rico, 2011, pág. 79). Por ejemplo: María tiene tres soles en su mano derecha y dos en su mano izquierda.

2. Significado de la sustracción.

Existen dos significados diferentes de la sustracción.

En la **concepción unitaria** de la sustracción *«hay una cantidad inicial que sufre un cambio al quitarle una segunda cantidad. El resultado es la disminución de la segunda cantidad sobre la primera.»* (Segovia & Rico, 2011, pág. 79). Por ejemplo: Manolo tiene tres lápices y pierde uno.

En la **concepción binaria** de la sustracción «hay dos cantidades que tienen asignado el mismo papel. Se valora lo que hay en el todo y en una de las partes, lo cual permite conocer lo que hay en el complemento.» (Segovia & Rico, 2011, pág. 79). Por ejemplo: María tiene 4 nuevos soles en total, 3 de ellos en su mano derecha.

3. Qué es sumar.

La suma es tal como lo señala Segovia Alex & Rico Romero (2011): «*La suma de dos números naturales a y b se* *define por a+ b=card (A∪B), donde a = card(A) y b=card (B), con los conjuntos A Y B disjuntos.*» (p. 81)

4. Qué es restar

La suma es tal como lo señala Segovia Alex & Rico Romero (2011): «*Sea dos números a y b, como a ≥ b, se define su diferencia, c = a – b, como aquel número que sumado con b da como resultado a.*» *(p. 81)*

En sentidos las suma y la resta es necesario su aprendizaje, por lo que Parra & Saiz (2009) expresa que:

> **«A lo largo del Primer Ciclo, así como en el inicio del Segundo Ciclo de la escuela primaria, es necesario asegurar que los alumnos trabajen enfrentando problemas de suma y resta correspondientes a distintos significados: agregar, avanzar, juntar, quitar, comparar, retroceder, etc., y también que aprendan a usar estas operaciones para conocer lo que cambió, lo que se tenía, lo que resulta después de varios cambios sucesivos, apropiándose del carácter de operaciones inversas (la suma deshace lo que la resta hace y viceversa).» (p. 53)**

C. Algoritmo de cálculo de la adición y sustracción.

Es un término que en matemáticas es tal mal definido y sin embargo con tantas definiciones. Etimológicamente algoritmo es:

> «***La latinización del nombre del matemático persa Al Khwarizmi, autor, allá por el año 830 d. de C., de un libro titulado en su versión latina «Algoritmi de numero indorum» reelaborado como «Liber algorismi de practica arithmetica» por Juan de Sevilla en el siglo XII (Rey Pastor y Babini, 1984, pág. 159), considerado como la mayor contribución a la divulgación en occidente de los métodos y numerales, guarismos (perversión de Khwarizmi), del sistema numérico indico, llamado indo-arábigo. La corrupción del título de otro de sus libros «Hisab al-jabr w'al-muqabala» es el origen de otra palabra de uso corriente en la actualidad: Algebra (al-jabr).***» (Gómez Alonso, 1998, pág. 103)

Sin embargo en la actualidad la definición de algoritmo, se expresada tal como lo plantea el matemático COLERUS, E., (1959) citado por Gómez Alonso (1998) en la que plantea que:

«***La palabra algoritmo significa tanto procedimiento escrito de cálculo basado en una determinada escritura de signos, dentro de un sistema armónico que ejecuta automáticamente una parte del trabajo mental que nos hace accesibles regiones que nuestra imaginación no podría jamás fácilmente alcanzar, o por lo menos, en que podría extraviarse.*** » ***(p. 103)***

Es cotidiano ver el error que cometemos al definir el algoritmo, tal como lo afirma Pearla Nesher (1986), citado por Gómez Alonso (1998), en la que expresa:

«Es un error creer que un algoritmo necesariamente describe una operación aritmética. Hoy en día, con el extendido desarrollo y uso de los ordenadores, la importancia de los algoritmos va más allá del dominio de las propias matemáticas. Instrucciones para cómo manejar una lavadora, o como prepara un pastel pueden servir, también, como ejemplos de algoritmos.»

Gardner, Martin (1984). Citado por Gómez Alonso (1998), define como algo irónico al algoritmo como:

«un procedimiento para realizar un problema, por lo común a base de repetir pasos enormemente aburridos a menos que un ordenador los realice por usted. Aplicamos algoritmos al multiplicar dos números grandes, al hacer las cuentas de la casa, al lavar los platos o cortar el césped.» (p. 103)

Técnicamente Bouvier & George (1984) en su libro, diccionario de la Matemática expresa que:

«Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos.
Por lo tanto, un algoritmo no resuelve solamente un problema único sino toda una clase de problemas que no difieren más que por los datos, pero que están gobernados por las mismas prescripciones.» (p. 68)

Es así como nos expresa Gregorio Guirles (2004) en su artículo, el cálculo en el primer ciclo de primaria, resulta evidente que, desde el principio, el trabajo de cálculo (en cualquiera de sus modalidades), debe estar ligado a la resolución de problemas, pues no dejan de ser herramientas que adquieren su sentido y dimensión real cuando sirven para ello (verdadero sentido de saber operar). En torno al trabajo del algoritmo de la suma y la resta (cálculos con lápiz y papel). Solamente deberemos proceder al aprendizaje de los algoritmos de sumas y restas cuando los alumnos/as hayan comprendido lo que significa sumar y restar, y cuando tengan un buen dominio numérico mental: descomposiciones de números de diferentes maneras, cierto dominio de las tablas de sumar y restar, sentido numérico y flexibilidad mental en los cálculos (dominio de diferentes estrategias).

El aprendizaje de los algoritmos de sumar y restar debe estar basado en la comprensión. Por tanto, debe ser un camino de aprendizaje en el que se utilicen diferentes estrategias mentales y escritas de resolución, y en el que los alumnos y alumnas tengan la oportunidad de investigar y construir diferentes maneras (algoritmos) de realizar sumas y restas, antes de llegar a los algoritmos académicos, que son la última etapa de ese recorrido por diferentes estrategias.

En el nivel de resolución algorítmica, es conveniente trabajar primero el algoritmo de la suma y después el de la resta. Las estrategias y algoritmos aprendidos para la suma tendrán una transferencia positiva para utilizar diferentes estrategias y algoritmos para restar.

Desgraciadamente, no podemos decir que esto se desarrolle hoy así. Hoy siguen siendo vigentes los reproches de Baroody (1988):

«Se exige que los niños memoricen datos, definiciones, procedimientos de cálculo, técnicas de medición, etc. Cuando los recursos son limitados y las clases grandes, la enseñanza y la práctica repetitiva de datos y técnicas son más manejables que el fomento del conocimiento conceptual y la aptitud para el razonamiento. Por ejemplo, enseñar paso a paso el algoritmo para la sustracción de números de varias cifras con acarreos resulta más fácil que construir la red de relaciones que constituye el conocimiento de los órdenes de unidades. Más aún, el conocimiento de datos y técnicas es más fácil de observar y comprobar que el conocimiento conceptual o la capacidad de razonamiento. Como el cultivo y la evaluación de la comprensión matemática, el razonamiento y la resolución de problemas son difíciles, la educación masiva se centra en la enseñanza y la evaluación de datos y técnicas matemáticas.» (p. 55)

1. Algoritmo de cálculo de la adición.

Nos explica Castro (2008) que *«Para lograr una correcta comprensión del algoritmo de la suma en el nivel simbólico es necesario, como mínimo, tener un conocimiento de la estructura del sistema de numeración decimal y de cómo se cuentan los objetos. Más tarde, facilitará mucho las cosas el conocimiento de las sumas básicas, la tabla de sumar y las propiedades conmutativa y asociativa.» (p. 233)*

La suma de dos números, por ejemplo 2.453 y 6.241, se puede modelizar imaginando que corresponden a dos montones de caramelos, uno de los cuales tiene 3 caramelos sueltos, 5 bolsas de diez caramelos cada una, 4 cajas de diez bolsas cada una y 2 paquetes de diez cajas cada uno; en el otro hay 1 caramelo, 4 bolsas, 2 cajas y 6 paquetes, y que, por alguna razón, pretendemos juntarlos en un montón único y conocer cuántos caramelos hay en él; la forma más sencilla de hacerlo desde el punto de vista práctico es contar cuántos caramelos sueltos, bolsas, cajas y paquetes hay en total y eso puede hacerse de diversas formas y sin que se requiera una colocación especial de las cantidades; incluso el resultado podríamos darlo sin seguir un orden predeterminado:

- Caramelos sueltos, bolsas, cajas, paquetes...
- Bolsas, caramelos sueltos, cajas, paquetes...
- Cajas...

El uso del sistema de numeración decimal evita tener que citar continuamente el tipo de envase de que se trata; para ello es necesario aceptar el mismo código que se utilizó al escribir las cantidades que representaban a cada uno de los montones de caramelos (caramelos sueltos a la derecha, bolsas a su izquierda.).

Para facilitar la búsqueda de las unidades de un determinado orden, en cada uno de los sumandos, es deseable que éstas estén colocadas en sitios cercanos. Una forma de hacerlo es respetando los principios del sistema de numeración, colocando las cantidades una debajo de otra y justificadas a la derecha (las unidades de bajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas...) y, para evitar errores, es bueno que las cifras que se van obteniendo tengan una proximidad visual con las cifras que las originaron esto hace que el resultado se escriba también debajo de los sumandos de forma que en cada columna se pueda encontrar las unidades de un mismo orden tanto de cada uno de los sumandos como del resultado, es decir;

$$\begin{array}{r} 2\,453 + \\ \underline{6\,241} \\ 8\,694 \end{array}$$

Si alguna de las sumas parciales es igual o superior a 10, se aplica la regla del sistema de numeración decimal “cada diez unidades de un determinado orden constituyen una unidad del orden inmediato superior”, esto hace que unidades del orden que se suman sólo queden las que sobran de 10, en caso de ser 14 se dice que se ponen 4, y las diez restantes han formado una nueva unidad de orden inmediato superior y se une a las correspondientes de ese orden en los sumandos. Se dice habitualmente “me llevo una” aunque, quizá, fuera más correcto decir “se forma una”. Esa unidad que se forma se puede retener en la memoria, o puede hacerse una marca en la columna correspondiente de la izquierda y esa marca, que en principio puede ser cualquiera, parece adecuado que sea el número de unidades que se han formado. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 \\
3\,592 & + \\
\underline{5\,165} & \\
8\,757 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & 1\;2 \\
 & 6\;\;478 \\
 & 1\;\;038 \\
+ & \underline{2\;\;337} \\
 & 9\;\;873
\end{array}
$$

2. Algoritmo de cálculo la sustracción.

Como ocurre con el algoritmo de la suma, para lograr una correcta comprensión de este algoritmo es necesario, como mínimo, un conocimiento de la estructura del sistema de numeración decimal y una cierta habilidad en el conteo. Más tarde, facilitará mucho las cosas el conocimiento de las sumas básicas, la tabla de sumar, el dominio del contar descendente y del doble conteo, simultáneo, ascendente y descendente.

Para restar, por ejemplo 5.693 y 3.542, se puede considerar que estos números corresponden a un montón de caramelos distribuidos así: 3 caramelos sueltos, 9 bolsas de diez caramelos cada una, 6 cajas de diez bolsas cada una, etc. Y que de ese montón se quieren quitar 2 caramelos, 4 bolsas, 5 cajas, etc. Para saber cuántos caramelos quedan, la forma más sencilla de hacerlo, desde el punto de vista práctico, es

El sistema de numeración decimal evita tener que citar continuamente el tipo de envase de que se trata, para ello es necesario aceptar el mismo código que se utilizó a la hora de escribir las cantidades que representaban a cada uno de los montones de caramelos (caramelos sueltos a la derecha, bolsas a su izquierda...). En este sentido se pueden disponer los números y el resultado de cualquiera de las siguientes maneras:

a) 5.693 - 3.542 = 2.151

b) 5.693

3.542 = 2.151

c) 5 693 -
<u>3 342</u>
2 151

Para facilitar la búsqueda de las unidades de un determinado orden, en cada uno de los sumandos, es deseable que estén colocadas en sitios cercanos y una forma de hacerlo, como ya se dijo en la suma, es respetando los principios del sistema de numeración, colocando las cantidades una debajo de otra y justificadas a la derecha (las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas...) es bueno que las cifras que se van obteniendo tenga una proximidad visual con las cifras que las originaron, esto hace que el resultado se escriba también debajo de las citadas cantidades y de forma que en cada columna podamos encontrar las unidades de un mismo orden tanto del minuendo como del sustraendo como del resultado, ejemplo:

En los algoritmos de las restas presentadas hasta ahora los números que han aparecido en el minuendo tienen sus cifras mayores que las correspondientes del sustraendo y no ofrecen mucha dificultad, la acción física asociada a estas diferencias consiste en tener objetos y tomar algunos de ellos. Las estrategias numéricas a emplear son distintas, según el tamaño de los números o las preferencias de quien realiza los cálculos, por ejemplo, 7 — 3 es 4 porque:

Estrategia a) Si a 7 le quito 3 me quedan 4.

Estrategia b) De 3 hasta 7 van.

Estrategia c) 4 + 3 es 7.

El algoritmo se complica cuando algún dígito del minuendo es menor que el correspondiente del sustraendo. Para resolver esta situación es imprescindible conocer que la regla de formación de una unidad de un determinado orden, a partir de diez unidades del orden inmediato inferior, es reversible en el sentido de que pueden obtenerse diez unidades de un determinado orden a partir, por “rotura”, de una unidad del orden inmediato superior; esto, en el símil que estamos utilizando de los caramelos, es evidente, pues tan cierto es que cuando tengo diez caramelos sueltos los puedo meter en una bolsa como que si rompo una bolsa obtengo diez caramelos sueltos. Este hecho es suficiente para resolver numerosas cuentas de restar llevándose y su dificultad es mínima, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 8\ 629 \\ \underline{5\ 278} \\ 1 \end{array}$$

En el minuendo hay más unidades de primer orden que en el substraendo, no hay problema y 9 - 8 es 1.

En el minuendo hay menos unidades de segundo orden que en el sustraendo pero se puede obtener unidades extras de segundo orden a partir de una de las seis unidades de tercer orden y, entonces, el minuendo habrá que reescribirlo de esta otra manera:

$$\begin{array}{r} \mathbf{8\ 5_{12}9} \\ \underline{\mathbf{5\ 278}} \\ \mathbf{1} \end{array}$$

Ya hay en el minuendo más unidades de segundo orden que en el sustraendo 5 12 — 7 es 5.

En el minuendo hay más unidades de tercer orden que en el sustraendo y lo mismo sucede con las unidades de cuarto orden, como 5 - 2 es 3 y 8 — 5 es 3 se concluye la operación con el resultado de 3.351.

$$\begin{array}{r} \mathbf{8\ 029} \\ \underline{\mathbf{-\ 5\ 278}} \\ \mathbf{?1} \end{array}$$

Esto ha sido posible porque en el minuendo había varias unidades de las que era necesario descomponer, en este caso había 6 unidades de tercer orden, pero si el dígito correspondiente a las unidades de tercer orden en el minuendo es cero como en el caso, actúa de la siguiente forma.

Toma una unidad de las de cuarto orden que serán diez de las de tercero y se continúa de manera análoga al caso anterior.

Esta manera de restar es llamada coloquialmente “pedir prestado”. Otra forma de hacer es la que se conoce como “pedir y pagar”; consiste en que cuando se necesiten unidades de un determinado orden en el minuendo porque tenga menos que el sus- trayendo, se suma diez a las que se tienen y, para que el resultado de la resta no cambie, se le suma la misma cantidad al sustraendo lo que equivale a sumar una unidad al orden inmediato superior. Esta estrategia de realizar el algoritmo se basa en la propiedad de la diferencia que dice “Si se suma o se resta un mismo número al minuendo y sustraendo de una diferencia, ésta no cambia”. Aparece, como una forma de nombrar el hecho del incremento del sustraendo, la expresión “me llevo una”. Las estrategias de “pedir prestado” y “pedir y pagar”, en este algoritmo son las más utilizadas en el ámbito escolar.

2.2.1.2.6 La resolución de problemas.

a. Concepto:

Polya citado por Garcia Cruz (2014) expresa que: «*Tener un problema significa buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata*.»

Otra definición parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik, (1980) citado por Garcia Cruz (2014) en la que expresa que «un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma».

Según Garcia Cruz (2014) de ambas definiciones anteriores un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1) Aceptación: El individuo o grupo debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
2) Bloqueo: Los intentos iníciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
3) Exploración: El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Según EL ministerio de educación: resolver problemas implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir una estrategia para encontrar una solución. Para ello se requiere de conocimientos previos y capacidades. A través de ello muchas veces se construyen nuevos conocimientos matemáticos. A través de la resolución de problemas, se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos autónomos, críticos además adquieren formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares que les sirvan fuera de la clase.

El concepto que plantea De Guzmán Ozámiz (2014) es sobre los **verdaderos problemas** en matemática; «*es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra situación.*»

Schoenfeld (1996) entiende que para cualquier alumno, «*un problema matemático es una tarea: a) en la cual el alumno está interesado e involucrado y para la cual desea obtener una resolución; y b) para la cual el alumno no dispone de un medio matemático accesible para lograr esa solución.» (p. 148)*

De los conceptos antes mencionado podemos definir al **problema como una** situación nueva o diferente de lo ya aprendido que requiere utilizar de modo estratégico técnicas ya conocidas y toma de decisiones; supone para el alumno una demanda cognitiva y motivacional. Requiere un proceso de reflexión o toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir; esta última característica es la que diferencia un *problema* de un *ejercicio.* Éstos se basan en el uso de destrezas o técnicas sobre aprendido, convertido en rutinas automatizadas como consecuencia de una práctica continuada. En los ejercicios no es necesario llevar a cabo una programación, un plan: los procedimientos a seguir pueden surgir en forma automática debido a repeticiones anteriores.

b. Diferencia entre ejercicio y problema:

El cuadro que viene a continuación recoge de una manera más gráfica y comparada las principales diferencias que existen entre estos dos tipos de actividades:

Tabla 3: Características de ejercicios y problemas.

CARACTERÍSTICAS DE LOS EJERCICIOS	CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS
Se ve claramente qué hay que hacer.	Suponen un reto.
La finalidad es la aplicación mecánica de algoritmos.	La finalidad es ahondar en los conocimientos y experiencias que se poseen, para rescatar aquellos que son útiles para llegar a la solución esperada.
Se resuelven en un tiempo relativamente corto.	Requieren más tiempo para su resolución.
No se establecen lazos especiales entre el ejercicio y la persona que lo resuelve.	La persona que se implica en la resolución lo hace emocionalmente. El bloqueo inicial, debido a que la situación le desconcierta, dará paso a la voluntariedad y perseverancia por encontrar la solución y, por último, al grado de satisfacción una vez que esta se ha conseguido
Generalmente tienen una sola solución.	Pueden tener una o más soluciones y las vías para llegar a ellas pueden ser variadas.
Son muy numerosos en los libros de texto.	Suelen ser escasos en los libros de texto.

c. Fases del proceso de resolución de problemas

Existen muchos enfoques en la resolución de problemas dado el gran número de autores que han realizado estudios e investigaciones en este tema. La preocupación por conseguir buenos resolutores ha llevado a determinar diferentes fases en el proceso de resolución. Pero como lo afirma Dienes Zoltan & Golding E., (1970)

> **«… no existe una forma única para resolver un problema. A veces un niño sugiere una camino para tratar de resolver un problema que no es el mismo que el maestro habría elegido y que hasta puede parecerle erróneo a éste. El mejor método pedagógico, en este caso, es que el maestro evite decirle al muchacho. "No, no es así. Hazlo de esta otra forma" sino, más bien, que una sus esfuerzos a los del muchacho para ver lo que puede conseguir con sus sugerencias. De ello puede derivarse una discusión, un pequeño descubrimiento realizado en común, juzgando por sus méritos el método propuesto por el alumno: si ha sido bueno, y el niño ha demostrado su capacidad de llegar hasta el fin, puede incluso convencer al propio maestro. En caso contrario, si el niño continua titubeando y se da cuenta de que su idea no le lleva a nada práctico, el maestro siempre estará a tiempo de hacerle comprender que sería preferible abordar el problema desde otro punto de vista.»**

Polya en su libro Cómo plantear y resolver problemas (1989, págs. 28-38), estableció cuatro etapas del proceso de resolución de problemas, son las siguientes:

- **1ª fase. Comprensión del problema**: Implica entender tanto el texto como la situación que nos presenta el problema, diferenciar los distintos tipos de información que nos ofrece el enunciado y comprender qué debe hacerse con la información que nos es aportada, etc.

  Podríamos considerar el texto de los enunciados matemáticos como una tipología particular en la que se expresa la situación a resolver pero no el modo de llevarla a cabo. Su descubrimiento forma parte del trabajo del resolutor, el cual debe decodificar el mensaje contenido en el enunciado y trasladarlo a un lenguaje matemático que le permita avanzar en el proceso de resolución. De aquí se deduce que las dificultades que pueden aparecer en la comprensión del enunciado de un problema son diferentes de las que surgen en la comprensión de un texto de otra índole.

- **2ª fase. Concepción de un plan**: Es la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevarán a ella. Es necesario abordar cuestiones como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.

Es muy importante enunciar la planificación por escrito, de forma clara, simplificada y secuenciada. Servirá, además de para controlar el proceso de resolución por parte del alumno, para que el profesor conozca el pensamiento matemático desarrollado durante la ejecución de la tarea.

En esta fase puede ser útil el uso de esquemas que ayuden a clarificar la situación a resolver, así como el proceso a seguir. Del mismo modo puede ser práctico recordar si se han abordado con anterioridad problemas similares y qué metodología se siguió.

- **3ª fase. Ejecución del plan:** Consiste en la puesta en práctica de cada uno de los pasos diseñados en la planificación.

  Es necesaria una comunicación y una justificación de las acciones seguidas: *primero calculo*…, *después*…, *por último*… hasta llegar a la solución. Esta fase concluye con una expresión clara y contextualizada de la respuesta obtenida.

- **4ª fase. Visión retrospectiva**: Un problema no termina cuando se ha hallado la solución. La finalidad de la resolución de problemas es aprender durante el desarrollo del proceso, y este termina cuando el resolutor siente que ya no puede aprender más de esa situación.

  Desde este punto de vista, es conveniente realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución. Es preciso:

  ✓ Contrastar el resultado obtenido para saber si efectivamente da una respuesta válida a la situación planteada.

  ✓ Reflexionar sobre si se podía haber llegado a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.

  ✓ Decir si durante el proceso se han producido bloqueos y cómo se ha logrado avanzar a partir de ellos.

  ✓ Pensar si el camino que se ha seguido en la resolución podría hacerse extensible a otras situaciones.

2.2.2 Método Singapur.

2.2.2.1 Historia del método Singapur

Gran parte de la situación actual de Singapur se debe a su sistema educativo, que ha pasado en muy pocos años de ser un país con un gran nivel de analfabetismo a ocupar los primeros puestos en las pruebas internacionales. El secreto es tan simple como invertir gran cantidad del capital humano en una potente mejora constante de la educación.

Uno de los primeros pasos que dieron el cuanto a educación fue establecer el bilingüismo, hasta el punto de estudiar el inglés como primer idioma y su lengua de origen (mandarín, tamil o malayo) como segundo.

El sistema educativo se basa en una búsqueda constante de calidad: «Nos hemos estado moviendo en los últimos años hacia un sistema educativo que es más flexible y diversa. El objetivo es proporcionar a los estudiantes con mayores opciones para satisfacer sus diferentes intereses y formas de aprendizaje.», como aparece en la página del Ministerio de Educación de Singapur (2007). A medida que los estudiantes avanzan se ofrecen respuestas a cada uno en función de sus resultados, accediendo así a un tipo de enseñanza u otro.

El paso de primaria a secundaria se regula a través de un examen cuyos resultados determinan la línea por la que seguirán los estudios, en este caso: Express (el más alto), Normal Academic o Normal Technical. Es decir, con 12 años, ya están introducidos en un sistema elitista, pero no sectario, ya que con esfuerzo un alumno puede pasar posteriormente de un Normal a un Express durante los 4 años que dura el proceso.

El sistema es similar a los 16 y a los 18 años, donde los mejores alumnos son los que acceden a la mejor enseñanza, en este caso las universidades públicas, mientras que los que obtengan peores notas sólo podrán acceder a la universidad privada o a universidades extranjeras. Dejando claro, que la enseñanza de calidad es la escuela pública fomentada por el Gobierno.

Otro de los puntos fuertes de la Educación en Singapur es la consideración del docente. Éste es la base del sistema educativo, y de alguna forma el responsable del futuro de la nación.

Como explica Lee, director del Instituto Nacional de Educación en Singapur, recogido por Cordano (2012):

> **«Todo pasa por quienes enseñan. En Singapur se recluta a un tercio de los mejores estudiantes para que se vuelvan profesores. Esto tiene que ver con la imagen que existe de la docencia como profesión: una carrera muy positiva y con buen ambiente de trabajo.»**

Por tanto ni la vocación, ni la dedicación, ni la preparación de los profesores es cuestionable, ya que son los mejores estudiantes los que pueden acceder a ser docentes, muy lejos de lo que ocurre en la mayoría de los países. Además, en Singapur un alto porcentaje de los profesores vuelven a la universidad para perfeccionarse posteriormente.

Con esta base de preparación y dedicación docente general, y enfocada al ámbito matemático particular, comienza a fraguarse el Método Singapur en Matemáticas.

El gran impulsor de este método es Yeap Ban Har, además de ser el formador mundial de profesores de matemáticas del Método Singapur. En una de sus conferencias en Santiago de Chile, Yeap Ban Har citado por Morales Espinoza (2013) se expresó sobre el Método Singapur:

«Antiguamente, con la manera tradicional, aprender las matemáticas era mucho de memoria y procedimientos, mientras que el Método Singapur facilita su aprendizaje a través de la visualización, generalización y el sentido del número. Es decir, si antes se focalizaba en el cálculo matemático, ahora es en la resolución de problemas y el pensamiento adecuado. (…) El método obedece a un currículum que se enfoca en habilidades y resolución de problemas matemáticos, porque se trata de promover el pensamiento adecuado.»

La creación de este método, se basó en lo mejor de varias metodologías y profesionales del ámbito educativo. Una mezcla que consiguió un método enfocado a la resolución de problemas y no a la tortura de memorizar constantemente y que obliga a los niños a visualizar, pensar y razonar antes de comenzar el proceso y las operaciones numéricas. Se puede hablar de tres pensadores que tienen especial influencia en el Método Singapur:

2.2.2.2 Teorías que sustentan el método Singapur.

2.2.2.2.1 El currículo en espiral y los modelos de aprendizaje de Jerome Bruner.

2.2.2.2.1.1 El currículo en espiral.

Como una alternativa a la noción de mover a los estudiantes en modo de filas cerradas a través de jerarquías lineales de objetivos de aprendizaje, Bruner recomendó el *currículo en espiral,* en el que los estudiantes son devueltos a los mismos temas generales de manera periódica, pero son alentados a abordar estos temas en niveles de conocimiento, representación y análisis diferentes. Cada vez que la "espiral" regresa al tema, los estudiantes ampliarán y profundizarán su conocimiento acerca de éste y por consiguiente serán capaces y estarán motivados para explorarlo en un nivel más profundo. Por ejemplo, la capacidad para reconocer y clasificar diferentes animales podría ser un objetivo inicial apropiado. Luego, los estudiantes podrían aprender clasificaciones para animales y las semejanzas y diferencias entre tipos de animales. Más adelante podrían aprender acerca de los hábitats naturales y la conducta de varios animales y, todavía más adelante, podrían estudiar anatomía o fisiología animal.

Aunque Bruner reconoce el valor de organizar el contenido que se va a enseñar, señala que a menudo no hay una forma única mejor para estructurarlo y argumenta que existen límites a lo que puede lograrse al imponer una estructura de manera externa.

Cree que los aprendices retendrán más si se les permite organizar el material de acuerdo con sus propios intereses. A diferencia de los conductistas, quienes enfatizan la secuenciación lineal de los programas de aprendizaje como una manera de fomentar el progreso rápido con errores mínimos, Bruner tiene poco interés en minimizar los errores. Cree que seguir callejones sin salida y cometer errores son partes naturales del aprendizaje, al menos si los estudiantes son enseñados con métodos que enfatizan el desarrollo de entendimientos profundos en lugar de la rapidez para cubrir el material.

Además, ve los errores como útiles para mantener el interés y estimular las hipótesis, si no se hace que los estudiantes se sientan avergonzados por cometer errores. Es así como Bruner (2009) expresa que:

> «***… Hace mucho tiempo, propuse el concepto de un ≪curriculum en espiral≫, la idea de que al ensenar una materia se empiece con una explicación ≪intuitiva≫ que este claramente en el marco de alcance del estudiante y luego se vuelva a una explicación más formal o mejor estructurada, hasta que el aprendiz haya dominado el tema o la materia en todo su poder generativo, con tantos reciclajes más como sea necesario…*** » ***(p: 138)***

Bruner citado por Good & Brophy (1995) expresa que «*cualquier materia puede ser enseñada de manera efectiva en forma honesta desde el punto de vista intelectual a cualquier niño en cualquier etapa del desarrollo*.» (p. 126)

Ésta no es una declaración de que cualquiera pueda aprender cualquier cosa; nótese el calificativo «en forma honesta desde el punto de vista intelectual». Sin embargo, al menos algunos aspectos de cualquier materia pueden ser presentados de modo que sean fieles al espíritu de la disciplina de la que se extrajo la información (es decir, precisos, organizados alrededor de conceptos importantes y completos en algún sentido, aun cuando un especialista en la materia podría verlos tan sólo como parte de un panorama mucho más amplio) y significativos (es decir, los aprendices pueden relacionarlos con su conocimiento existente).

2.2.2.2.1.2 Modelos de representación del aprendizaje.

Es conocido como el enfoque CPA (Concreto-Pictórico-Abstracto), asociado a los tres elementos básicos de representación que representa el método Singapur:

- Concreta.
- Gráfica.
- Simbólica.

La idea se basa de los modos de representación de Bruner (1984) en la que expresa que: «*Estos tres modos son, como se dijo, la representación enactiva, la representación icónica y la representación simbólica: conocer algo por medio de la acción, a* *través de un dibujo o una imagen y mediante formas simbólicas como el lenguaje.*» *(p. 122)*

Es este el modelo que usan con mayor frecuencia los niños pequeños. A decir verdad, es prácticamente la única forma en que un niño puede aprender en el estadio senso-motor. No obstante, también los adultos suelen usar este modelo cuando intentan aprender tareas psicomotoras complejas u otros procesos complejos. No cabe duda de que el arte del ballet, el dominio de los procedimientos parlamentarios o la práctica en la dirección de un coro se facilitarán si se hace lo mismo que otras personas que se dedican a estas actividades. Los profesores pueden inducir a los estudiantes a usar este modelo de aprendizaje proporcionándoles demostraciones y ofreciéndoles materiales pertinentes, así como actividades de representación de roles, modelos y ejemplos de conductas.

a) En el **modelo enactivo** de aprendizaje se aprende haciendo cosas, actuando, imitando y manipulando objetos. En palabra de Bruner (1999):

> «**El primer modo, el enactivo, es crucial para guiar la actividad y en particular lo que llamamos la actividad hábil. Más en general, es este modo el que impone estructuras medios-fines o instrumentales al mundo. Si lo tuviera que renombrar ahora, lo llamaría el modo procedimental.**» (p. 173)

Es este el modelo que usan con mayor frecuencia los niños pequeños. A decir verdad, es prácticamente la única forma en que un niño puede aprender en el estadio senso-motor. No obstante, también los adultos suelen usar este modelo cuando intentan aprender tareas psicomotoras complejas u otros procesos complejos. No cabe duda de que el arte del ballet, el dominio de los procedimientos parlamentarios o la práctica en la dirección de un coro se facilitarán si se hace lo mismo que otras personas que se dedican a estas actividades. Los profesores pueden inducir a los estudiantes a usar este modelo de aprendizaje proporcionándoles demostraciones y ofreciéndoles materiales pertinentes*, así como actividades de representación de roles, modelos y ejemplos de conductas.*

b) ***El modelo icónico*** *de aprendizaje implica el uso de imágenes o dibujos. Adquiere una importancia creciente a medida que el niño crece y se le insta a aprender conceptos y principios no demostrables fácilmente. Así como se expresa Bruner* (1999)*:*

> **«Ya que las imágenes no sólo capturan la particularidad de los acontecimientos y los objetos, también dan a luz a y sirven como prototipos para clases de acontecimientos, y luego aportan límites frente a los cuales se pueden comparar casos que sean candidatos a miembros de esas clases. Y así, en edad muy temprana, antes de que el pensamiento llegue a hacerse operacional en el sentido de Ginebra, nuestro poder para considerar el mundo en términos de imágenes típicas y similitudes nos ofrece una especie de estructura preconceptual a través de la cual podemos operar en el mundo.» (p. 174)**

Así, por ejemplo, los conocimientos sobre países extranjeros, las vidas de personajes famosos y la literatura dramática no se aprenden normalmente por medio del modelo enactivo. Los profesores pueden lograr que se adquieran estos contenidos educativos proporcionando a los estudiantes dibujos y diagramas relacionados con el tema y ayudándoles a crear imágenes adecuadas. La representación icónica es especialmente útil para los niños en el estadio preoperatorio y en el de las operaciones concretas. Es asimismo de gran utilidad para el adulto que estudia habilidades o conceptos complejos. Requiere, por lo general, menos tiempo que el modelo enactivo.

Al tratar de las ayudas a la enseñanza, Bruner recomienda el uso de diapositivas, de la televisión, de películas y de otros materiales visuales. Estos medios pueden aportar experiencias sustitutivas e imágenes que sirven para enriquecer y complementar las experiencias del estudiante.

c) ***El modelo simbólico*** *de aprendizaje es el que hace uso de la palabra escrita y hablada. El lenguaje, que es el principal sistema simbólico que utiliza el adulto en sus procesos de aprendizaje, aumenta la eficacia con que se adquieren y almacenan los conocimientos y con que se comunican las ideas. Por tan evidentes razones, es el modelo de aprendizaje más generalizado. Resulta más útil y eficaz a medida que el niño pasa del estadio de las operaciones concretas al estadio de las operaciones formales*

En que los niños suelen comprender de manera natural los conceptos por medio de objetos físicos, es decir concretos. A partir de ahí pueden generar imágenes (pictórico) y finalmente lo abstracto, mediante símbolos.

Los alumnos aprenden un concepto nuevo utilizando otros anteriores, posteriormente se usan representaciones en forma pictórica hasta llegar a la representación abstracta, mediante símbolos.

Desde este punto de vista Bruner (1984) sostiene que:

> **«si la educación no consiste en inculcar habilidades y fomentar la representación de la propia experiencia y del conocimiento buscando el equilibrio entre la riqueza de lo particular y la economía de lo general, entonces no sé en qué consiste.» (p. 124)**

2.2.2.2.1.3 El aprendizaje por descubrimiento.

Según Bruner los estudiantes trabajan por su cuenta para descubrir principios básicos. La idea fundamental en el enfoque del aprendizaje visto por Bruner es que el aprendizaje es un "proceso activo".

El aprendizaje por descubrimiento es un proceso educativo de investigación participativa, resolución de problemas y actividades a través de los cuales se construye el conocimiento integrado, no fragmentado y partiendo de la realidad.

La integración posibilita desarrollar habilidades funcionales en la vida cotidiana, permite interrogantes, preguntarse, analizar y buscar respuestas a los interrogantes o a los conflictos existenciales no analizados en los libros, que son sin embargo percibidos en la realidad como problema que necesita ser tomado en cuenta, buscarle explicaciones y soluciones posibles.

Los principales argumentos enunciados por Bruner a favor del aprendizaje por descubrimiento fueron los siguientes. En primer lugar el descubrimiento estimulaba un modo de aprender las matemáticas al operar con esta materia y animaba el desarrollo de una concepción de las matemáticas más como proceso que como un producto acabado. En segundo lugar, se consideraba al descubrimiento como intrínsecamente gratificante para los alumnos, de modo que los profesores que utilizasen métodos de descubrimiento deberían sentir una escasa necesidad de emplear formas extrínsecas de premio. Estas dos afirmaciones tienen gran peso.

- **El descubrimiento en acción**

    Una estrategia inductiva requiere del pensamiento inductivo por parte de los estudiantes, sugiere que los maestros pueden fomentar este tipo de pensamiento, alentando a los estudiantes a hacer especulaciones basadas en evidencias incompletas y luego confirmarlas o desecharlas con una investigación sistemática. La investigación podría resultarles mucho más interesante que lo usual, ya que son sus propias especulaciones las que están a juicio, desafortunadamente, las prácticas educativas con frecuencia desalientan el pensamiento intuitivo al rechazar las especulaciones equivocadas y recompensar las respuestas seguras pero nada creativas.

    En el aprendizaje por descubrimiento, el maestro organiza la clase de manera que los estudiantes aprendan a través de su participación activa, se hace una distinción entre el aprendizaje por descubrimiento, donde los estudiantes trabajan en buena medida por su parte y el descubrimiento guiado en el que el maestro proporciona su dirección. En la mayoría de las situaciones, es preferible usar el descubrimiento guiado, se les presenta a los estudiantes preguntas intrigantes, situaciones ambiguas o problemas interesantes, en lugar de explicar cómo resolver el problema, el maestro proporciona los materiales apropiados, alienta a los estudiantes para que hagan observaciones, elaboren hipótesis y comprueben los resultados.

Para resolver problemas, los estudiantes deben emplear tanto el pensamiento intuitivo como el analítico. El maestro guía el descubrimiento con preguntas dirigidas, proporciona retroalimentación acerca de la dirección que toman las actividades. La retroalimentación debe ser dada en el momento óptimo, cuando los estudiantes pueden considerarla para revisar su abordaje o como un estímulo para continuar en la dirección que han escogido.

- **Condiciones del Aprendizaje por Descubrimiento**

Las condiciones que se deben presentar para que se produzca un aprendizaje por descubrimiento son:

El ámbito de búsqueda debe ser restringido, ya que así el individuo se dirige directamente al objetivo que se planteó en un principio. Los objetivos y los medios estarán bastante especificados y serán atrayentes, ya que así el individuo se incentivara a realizar este tipo de aprendizaje. Se debe contar con los conocimientos previos de los individuos para poder así guiarlos adecuadamente, ya que si se le presenta un objetivo a un individuo del cual éste no tiene la base, no va a poder llegar a su fin.

Los individuos deben estar familiarizados con los procedimientos de observación, búsqueda, control y medición de variables, o sea, tiene el individuo que tener conocimiento de las herramientas que se utilizan en el proceso de descubrimiento para así poder realizarlo.

Por último, los individuos deben percibir que la tarea tiene sentido y merece la pena, esto lo incentivará a realizar el descubrimiento, que llevará a que se produzca el aprendizaje.

- **Principios del Aprendizaje por Descubrimiento:**

Todo el conocimiento real es aprendido por uno mismo, es decir, que el individuo adquiere conocimiento cuando lo descubre por el mismo o por su propio discernimiento.

El significado es producto exclusivo del descubrimiento creativo y no verbal, es decir, que el significado que es la relación e incorporación de forma inmediata de la información a su estructura cognitiva tiene que ser a través del descubrimiento directo y no verbal, ya que los verbalismos son vacíos.

El conocimiento verbal es la clave de la transferencia, esto es, que la etapa sub.-verbal, la información que es entendida no está con claridad y precisión, pero cuando el producto de este se combina o refina con la expresión verbal adquiere poder de transferencia.

El método del descubrimiento es el principal para transmitir el contenido de la materia, vale decir, que las técnicas de aprendizaje por descubrimiento pueden utilizarse en la primera etapa escolar (para mayor comprensión verbal) para entender mejor lo que se explica pero en las etapas posteriores no es factible por el tiempo que este lleva, en forma contraria se ha dicho que el aprendizaje por recepción verbal es el método más eficaz para transmitir la materia.

La capacidad para resolver problemas es la meta principal de la educación, es decir, la capacidad de resolver problemas es la finalidad educativa legítima, para esto es muy razonable utilizar métodos científicos de investigación.

El entrenamiento en la heurística del descubrimiento es más importante que la enseñanza de la materia de estudio, o sea, la enseñanza de materia no produce un mejoramiento en la educación, por lo cual el descubrimiento sería más importante, aunque en forma contraria, se ha dicho que el aprendizaje por descubrimiento tampoco es importante en la educación.

Cada niño debiera ser un pensador creativo y crítico, es decir, se puede mejorar y obtener estudiantes pensadores, creativos y críticos mejorando el sistema de educación y así obtendríamos alumnos capaces de dominar el ámbito intelectual así como un incremento del entendimiento de las materias de sus estudios.

La enseñanza expositiva es autoritaria, vale decir, que este tipo de enseñanza si se les obliga explicita o tácitamente a aceptarlas como dogmas es autoritario, pero si no cumple estos requisitos no se puede decir que es autoritaria ya que la idea en si es explicar ideas a otros individuos sin que se transformes en dogmas.

El descubrimiento organiza de manera eficaz lo aprendido para emplearlo ulteriormente, esto es, ejecuta una acción basada en los conocimientos cuando está estructurada, simplificada y programada para luego incluir varios ejemplares del mismo principio en un orden de dificultad.

El descubrimiento es el generador único de motivación y confianza en sí mismo, es decir, que la exposición diestra de ideas puede ser también la estimulación intelectual y la motivación hacia la investigación genuina aunque no en el mismo grado que el descubrimiento.

El descubrimiento es una fuente primaria de motivación intrínseca, o sea, que el individuo sin estimulación intrínseca adquiere la necesidad de ganar símbolos (elevadas calificaciones y la aprobación del profesor) como también la gloria y el prestigio asociados con el descubrimiento independiente de nuestra cultura.

El descubrimiento asegura la conservación del recuerdo, esto es, que a través de este tipo de aprendizaje es más probable de que el individuo conserve la información.

2.2.2.2.2 El principio de variabilidad matemática y perceptiva de Dienes Zoltan.

En relación con el Método Singapur, uno de los puntos comunes es la creencia de que las estructuras matemáticas se pueden enseñar desde edades tempranas mediante metodologías dinámicas y manipulativas.

Además introduce el concepto de Variabilidad matemática y perceptual, que propone la capacidad de presentar las ideas y conceptos matemáticos desde distintas áreas y niveles, poniendo de manifiesto todas las variables de un concepto matemático, para poder verlo desde varias perspectivas.

Es decir, para que se puedan observar las diferencias individuales en la formación de conceptos matemáticos, se presentarán diversas formas de representar estos, así los alumnos irán adquiriendo el sentido matemático de abstracción.

- ✓ **Principio de Variabilidad Matemática:** Un concepto matemático contiene cierto número de variables y de la constancia de la relación entre estas surge el concepto. La aplicación de este principio asegura una generalización eficiente. tal como lo afirma Núñez Espallargas & Font Moll, (1995): «*Debe variarse la estructura matemática a partir de la cual el nuevo concepto o proceso se desarrolla para permitir que se distingan claramente todas las características matemáticas implicadas*» *(p. 296)*
- ✓ **Principio de Variabilidad Perceptiva:** Establece que para abstraer efectivamente una estructura matemática debemos encontrarla en una cantidad de estructuras diferentes para percibir sus propiedades puramente estructurales. De ese modo se llega a prescindir de las cualidades accidentales para abstraer lo esencial, tal como lo afirma Macnab (1992) citado por Núñez Espallargas & Font Moll, (1995): «*debe variarse suficientemente el marco de experiencia a partir del cual se desarrollan ideas y procesos al objeto de prevenir su fijación en un conjunto o conjuntos particulares de experiencias, esto es, de propiciar la abstracción*.» *(p. 296)*

2.2.2.2.3 La comprensión instrumental y relacional de Richard Skemp.

Richard Skemp, se refiere a dos conceptos de gran influencia en el desarrollo del Método Singapur.

La *Comprensión Instrumental*, que es la forma de comprender por primera vez un concepto independientemente de las razones matemáticas, sólo el concepto en sí. **Y la *Comprensión Relacional*,** no es más que relacionar conceptos instrumentales ya aceptados como matemáticos, de manera que si previamente no se comprende de manera segura el concepto inicial, no podremos definir las relaciones y dependencias entre ellos.

Diferenciamos la comprensión relacional como el «saber qué» y la comprensión instrumental como el «saber hacer». Richard Skemp (psicólogo y matemático), señala que estos dos tipos de comprensión no siempre van unidos, con consecuencias para el aprendizaje comprensivo de la matemática. Por ejemplo: *Cuando un niño aplica el algoritmo de la suma con agrupamiento, sin saber el porqué del proceso seguido.*

Proporciona así, una manera de pensar respecto a qué constituye la comprensión en las Matemáticas.

Skemp (1999) distingue entre la capacidad para realizar una operación matemática (por ejemplo, una división larga) y la capacidad para ser capaz de explicar el procedimiento que se ha de desarrollar, siendo lo primero una comprensión instrumental (o comprensión procesal u operativa) y lo segundo una comprensión relacional (comprensión conceptual).

Otro caso, cuando los alumnos hallan el mínimo común múltiplo en un conjunto de ejercicios pero luego no saben cómo aplicar en su vida diaria.

Para estos estudiantes las matemáticas acaban consistiendo en la repetición mecánica de definiciones, demostraciones y fórmulas o aplicación eficaz de los algoritmos pero desprovista de su significado referencial al no comprender qué están haciendo.

Es importante favorecer la comprensión relacional puesto que una comprensión del sentido, el significado, las relaciones y utilidad de los contenidos matemáticos que se aprenden, permite a los estudiantes adaptar su conocimiento a nuevas tareas y situaciones. Skemp (1999) dice:

> **«al saber no sólo que método (o procedimiento) funciona sino también por qué, el niño puede adaptar los métodos a los nuevos problemas, mientras que si sólo tiene comprensión instrumental necesita aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas» (p. 197)**

El currículo de Matemáticas de Singapur propone que la concepción instrumental vaya acompañada de la comprensión relacional. No tiene sentido aprender con procedimiento u operación sin tener una comprensión conceptual, tal como lo expresa el Ministerio de Educación de Singapur. «Aunque los alumnos deberían lograr la competencia en las diversas habilidades matemáticas, sobre-enfatizar las habilidades de procedimiento u operación sin comprender los principios matemáticos subyacentes, es algo que se debería evitar».Ministry of Education of Singapore (2007)

2.2.2.3 Pilares básicos del método Singapur.

Estructura que se explica en la página web del Ministerio de Singapur (2007) en la que desarrolla los cinco pilares básicos de la misma, expuestos a continuación.

- **CONCEPTOS:** Los contenidos matemáticos cubren conceptos numéricos, algebraicos, geométricos, estadísticos, de probabilidades, y analíticos. Los estudiantes deben desarrollar y explorar en profundidad las ideas matemáticas y ver las matemáticas de manera integrada, no como partes separadas del conocimiento.

  Se les debe entregar una variedad de experiencias de aprendizaje para ayudarlos a desarrollar un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos, y para que le encuentren sentido a las variadas ideas matemáticas, así como sus conexiones y aplicaciones, con el fin de participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas y para sentir más confianza para explorar y aplicar las matemáticas.

  Esto incluye el uso de manipulativos (materiales concretos), trabajo práctico, y ayudas tecnológicas, tal y como recomienda el Ministerio de Educación de Singapur.

- **HABILIDADES:** Las habilidades matemáticas incluyen habilidades de procedimientos para el cálculo numérico, la manipulación algebraica, la visualización espacial, el análisis de datos, la medición, uso de herramientas matemáticas y estimación.

  El desarrollo del dominio de las habilidades en los estudiantes es esencial para el aprendizaje y aplicación de las matemáticas. Aunque los estudiantes deben volverse competentes en las diversas habilidades matemáticas, se debe evitar enfatizar demasiado las habilidades de procedimiento sin entender los principios matemáticos subyacentes.

El dominio de las habilidades incluye la habilidad para manejar la tecnología cuando sea necesario para la exploración y resolución de problemas.

Es importante incorporar el uso de habilidades de pensamiento y heurística en el proceso del desarrollo del dominio de las habilidades.

La educación matemática en Singapur da importancia a la adquisición y aplicación de conceptos y habilidades matemáticas. Están cuidadosamente planificadas y establecidas explícitamente como contenido matemático requerido por los estudiantes de cada nivel, de manera que estén listos para el nivel siguiente de aprendizaje.

El contenido es profundizado progresivamente mediante un enfoque en espiral. Hay resultados de aprendizaje deseables y competencias específicas que los estudiantes deben lograr en varias etapas de la enseñanza escolar.

Se han realizado algunos cambios en los componentes de los Conceptos y Habilidades de la Estructura Matemática desde su introducción en 1990.

Durante la revisión del currículo en 2003, la Estructura Matemática se extendió a la enseñanza secundaria superior y a los niveles avanzados.

Se incluyeron los conceptos “probabilística” y “analítico” para reflejar la importancia de las matemáticas al tratar con situaciones que involucran incertidumbre y cambio. Bajo el componente de las habilidades, se le dio el debido énfasis a las habilidades de "Visualización espacial" y la "Medición".

Esto señala la importancia de entregar experiencias de aprendizaje práctico y oportunidades para explorar la geometría en la vida real.

- ✓ **PROCESO:** Los procesos matemáticos se refieren a las habilidades de conocimiento (o habilidades de proceso) involucradas en el proceso de adquisición y aplicación del conocimiento matemático, incluyendo razonamiento, comunicación y conexiones, habilidades de pensamiento y heurística, y aplicación y modelado.

Dentro de los procesos implicados, se encuentran tres fundamentales: Razonamiento, comunicación y conexiones

- El razonamiento matemático se refiere a la habilidad de analizar situaciones matemáticas y construir argumentos lógicos. Es un hábito mental que puede desarrollarse a través de las aplicaciones de las matemáticas en diferentes contextos.
- La comunicación se refiere a la habilidad de usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas y argumentos en forma precisa, concisa y lógica. Ayuda a los estudiantes a desarrollar su propio entendimiento de las matemáticas y a agudizar su pensamiento matemático.
- Las conexiones se refieren a la habilidad de ver y crear vínculos entre las ideas matemáticas, entre las matemáticas y otros temas, y entre las matemáticas y la vida diaria. Esto ayuda a los estudiantes a encontrarle sentido a lo que aprenden en las matemáticas.

El razonamiento matemático, la comunicación y las conexiones deben dominar todos los niveles del aprendizaje de las matemáticas, desde la enseñanza primaria hasta los niveles avanzados.

Habilidades de pensamiento y heurística

Los estudiantes deben usar variadas habilidades de pensamiento y heurística que los ayuden a resolver problemas matemáticos.

Las habilidades de pensamiento son habilidades que pueden usarse en un proceso de pensamiento, como clasificar, comparar, hacer secuencias, analizar las partes y el entero, identificar patrones y relaciones, inducción, deducción, generalización, verificación y visualización espacial.

La Heurística es lo que los estudiantes pueden hacer para acercarse a un problema cuando la solución del problema no es obvia.

Algunos ejemplos de heurística se mencionan a continuación en cuatro categorías de acuerdo a la manera en que se usan.

- Hacer una representación, por ejemplo dibujar un diagrama, hacer una lista, usar ecuaciones;
- Hacer una estimación calculada, por ejemplo adivinar y verificar, buscar patrones, hacer suposiciones;
- Pasar por el proceso, por ejemplo representarlo, trabajar hacia atrás, antes y después;
- Cambiar el problema, por ejemplo repetir el problema, simplificar el problema, resolver parte del problema.}

Aplicaciones y modelado

Las aplicaciones y el modelado juegan un rol importante en el desarrollo del entendimiento matemático y las competencias.

Los estudiantes deben aplicar las habilidades para resolver problemas y habilidades de razonamiento para enfrentar una variedad de problemas, incluyendo problemas de final abierto y problemas de la vida real.

El modelado matemático es el proceso de formular y mejorar modelos matemáticos para representar y resolver problemas del mundo real.

Mediante éste, los alumnos son capaces de aprender a usar diferentes formas de representar los datos, a seleccionar el método matemático más indicado y aplicarlo, y además a utilizar las posibles herramientas necesarias para resolver problemas cotidianos.

La oportunidad de lidiar con datos empíricos y usar herramientas matemáticas para el análisis de datos debe ser parte del aprendizaje en todos los niveles.

Aunque la adquisición y aplicación de los conceptos matemáticos y las habilidades siguen siendo los objetivos principales de la educación matemática, los procesos matemáticos permiten a los estudiantes desarrollar habilidades de pensamiento y resolución de problemas.

- ✓ **METACOGNICIÓN:** La Metacognición, o “pensar acerca de pensar” se refiere a la conciencia, y la habilidad de controlar los procesos de nuestro pensamiento, en particular la selección y uso de las estrategias para resolver problemas. Incluye el seguimiento del propio pensamiento, y la autorregulación del aprendizaje, o como lo señala Flavell (1996)

> **«*refiere al conocimiento que uno tiene sobre los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionando con ellos…La metacognición se refiere, entre otras cosas a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetivos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de una meta u objetivo concreto*» (p. 26)**

La disposición de la experiencia meta cognitiva es necesaria para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de resolución de problemas.

Las siguientes estrategias pueden usarse para desarrollar la conciencia metacognitiva de los estudiantes y para enriquecer su experiencia metacognitiva:

- Exponer a los estudiantes a las habilidades generales de resolución de problemas, habilidades de pensamiento y heurística, y como estas habilidades pueden aplicarse para resolver problemas;
- Alentar a los estudiantes a pensar en voz alta las estrategias y métodos que usan para resolver problemas particulares;
- Entregar a los estudiantes problemas que requieren planificación (antes de resolverlos) y evaluación (después de resolverlos);
- Alentar a los estudiantes a buscar maneras alternativas para resolver el mismo problema y verificar si las respuestas son apropiadas y razonables;
- Permitir a los estudiantes discutir cómo resolver un problema particular y explicar los diferentes métodos que pueden usar para resolver el problema.

La metacognición valora dos aspectos:

El aspecto del monitoreo (monitoreo del propio pensamiento) que requiere que los estudiantes conozcan las estrategias meta cognitivas, y cuándo y cómo usarlas. El aspecto de control (“Auto-regulación del aprendizaje”) requiere que los estudiantes mantengan un registro de cómo están las cosas y hacer cambios cuando es necesario.

La introducción de la “auto-regulación del aprendizaje” es para realzar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes.

✓ **ACTITUDES:** Las Actitudes se refieren a los aspectos afectivos del aprendizaje de matemáticas como:

- Creencias acerca de las matemáticas y su utilidad;
- Interés y placer de aprender matemáticas;
- Apreciación de la belleza y poder de las matemáticas;
- Confianza en el uso de las matemáticas; y
- Perseverancia para resolver un problema.

Las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas están determinadas por sus experiencias.

Hacer que el aprendizaje de las matemáticas sea divertido, significativo y relevante conlleva un largo camino para inculcar actitudes positivas hacia el tema.

Se debe poner atención y cuidado al diseño de actividades de aprendizaje para crear la confianza y desarrollar el aprecio por el tema.

La “perseverancia” se agregó en vista de los problemas emergentes que no eran rutinarios y problemas de final abierto que requieren que los estudiantes investiguen y resuelvan usando un amplio rango de heurísticas.

Los estudiantes perseverantes no se rendirán fácilmente cuando se encuentren con dificultades para resolver un problema.

Más adelante se amplió el rango de dimensiones afectivas para incluir las “creencias”.

Las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y su utilidad pueden influenciar sus actitudes en el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas.

Esta dimensión es deseable para el alumno centrado en el estudio donde es alentado a tomar más responsabilidades para su propio aprendizaje.

2.2.2.4 Metodología del método Singapur.

El éxito del método Singapur se basa en dos ideas principales, que se consiguen a través de unos conceptos y una estructura que describen su metodología.

Por un lado, enfocar el aprendizaje en la resolución de problemas, al margen de fórmulas, teoría, memorización, etc. Siguiendo unos pasos determinados que marca el método, y por otro, que todo conocimiento esté basado en uno anterior, pasando de lo concreto a lo abstracto, y asegurando la claridad de los mismos a lo largo del currículo. Se busca así la manera natural del aprendizaje de los alumnos, haciendo énfasis en la parte visual y manipulativa tal y como ocurre en el cerebro.

Los principios metodológicos del Método Singapur son tres ejes principales que estructuran su didáctica:

- ✓ **Concreto:** Se realiza un primer acercamiento a los conceptos matemáticos mediante actividades de tipo manipulativo y asociadas a la vida cotidiana.
- ✓ **Pictórico:** Los alumnos pueden dibujar conceptos matemáticos, así como cantidades y relaciones entre éstos. A partir de ahí las pueden introducir en los problemas relacionándolas entre sí y comparando.
- ✓ **Abstracto:** Aplicación de símbolos y algoritmos matemáticos adquiridos que son capaces de identificar.

Se basa en que los niños suelen comprender de manera natural los conceptos por medio de objetos físicamente, objetos concretos. A partir de ahí van progresando a dibujar imágenes (pictórico) y finalmente lo abstracto, mediante símbolos.

«*Se trata de empezar siempre por una actividad concreta, luego, de consultar los textos donde hay abundante material pictórico y, recién al final, enseñar los símbolos involucrados.*», tal y como explica Ban Har (2012)

Los alumnos aprenden un concepto nuevo utilizando materiales concretos de manera manipulativa. Más adelante, trabajan con dibujos y diagramas y finalmente son capaces de aprender la representación de abstracta, mediante símbolos.

De esta forma, se aprende el significado de lo que están haciendo, no se centran en los cálculos.

2.3 Bases epistémicas.

2.3.1 Epistemología del aprendizaje.

El problema epistemológico fundamental del aprendizaje se centra en la duda de algunos teóricos de la enseñanza de las ciencias, acerca de si el objetivo de la enseñanza debe ser el cambio conceptual o no. Al respecto, Postner propuso acudir a la filosofía de la ciencia contemporánea. La tesis principal consiste en que el cambio conceptual en los estudiantes durante el proceso del aprendizaje instruccional sigue las líneas que han fijado algunas filosofías de la ciencia. Al evocar el lenguaje de la filosofía sobre las teorías científicas se supone que hay analogías relevantes con los procesos que se podrían describir con el lenguaje de un tipo de teoría de aprendizaje de los sistemas conceptuales. Según Postner, el punto de vista asumido es que la investigación científica involucra ciertos compromisos que la organizan, sean los "*paradigmas"* propuestos por Kuhn (1972) o los "*núcleos duros*" de los programas de investigación de Lakatos.

> **«Durante el siglo XX surgieron dos corrientes del pensamiento que influyeron directamente sobre la Psicología del Aprendizaje. Según Kuhn "estos movimientos científicos constituirían dos revoluciones paradigmáticas, seguidas de su correspondiente período de ciencia normal. Dichas revoluciones estarían dadas por el Conductismo y por la Psicología Cognitiva.» (p.72)**

Para Kuhn, una *revolución científica* corresponde al abandono de un paradigma y a la adopción de otro nuevo, no por parte de un científico aislado sino por parte de la comunidad científica en su totalidad. Los paradigmas entrañan un determinado marco conceptual a través del cual se ve el mundo y se describe, y un determinado conjunto de técnicas experimentales y teóricas para hacer que el paradigma se compagine con la naturaleza. Por lo tanto, la ciencia debe contener dentro de sí la manera de pasar de un paradigma a otro mejor. Esta es la función que cumplen las revoluciones científicas.

Para Kuhn los paradigmas desempeñan un papel importante porque tienen una influencia persuasiva sobre la ciencia haciendo que unos sean reemplazados por otros ocasionando las revoluciones científicas cuyo papel fundamental es hacer que la ciencia avance.

En oposición a los planteamientos de Popper, Khun (1972), no cree que la experimentación sea la causa fundamental del progreso científico. Tampoco es la fuerza de los datos lo que hace que un paradigma sea sustituido por otro, ya que los paradigmas son en sí mismos inconmensurables; si no que influyen criterios externos de tipo generacional o social. Pero Kuhn sí coincide con Lakatos en algunos planteamientos para que el conocimiento pueda ser aceptado como conocimiento científico, como: la exigencia de concepciones filosóficas para que se resista a las críticas basadas en la historia de la ciencia solamente, también coinciden los dos en la necesidad de los paradigmas para explicar el problema de la ciencia y aunque Lakatos los denomina “programas de investigación,” los dos aceptan que son los datos los que actúan como árbitros de cambio en las teorías científicas. Pero también tienen diferencias significativas como el énfasis que hace Kuhn en los factores sociales que intervienen en el aprendizaje, mientras que Lakatos desarrolla su idea de ciencia en un intento por mejorar el falsacionismo Popperiano y por superar las objeciones hechas a éste. Para Lakatos, la característica fundamental de la construcción de una teoría científica está dada por las hipótesis centrales y por los supuestos subyacentes, las condiciones iniciales y los enunciados observacionales. Él denomina todo este conjunto, el cinturón protector. Para que un programa de investigación pueda ser valorado como científico en primer lugar debe poseer un alto grado de coherencia interna y en segundo lugar debe de conducir al descubrimiento de nuevos fenómenos.

Ante la diversidad de filosofías de las ciencias, es conveniente tener una actitud crítica y cuidadosa a la hora de acogerse a una de ellas para comprender la sustentación conceptual de las ciencias. Las versiones contemporáneas de la filosofía de la ciencia son críticas ante la visión "**positivista de la ciencia",** se considera como tal a la parte del conocimiento que significa un descubrimiento a través del método experimental. Sin embargo, el gran aporte de Kuhn y de Toulmin, consiste en plantear que la ciencia obedece más a conjuntos cambiantes de conceptos, (paradigmas) que guían los propios métodos de investigación. Por tanto la enseñanza de la ciencia debe estar orientada al aprendizaje de conceptos. Ausubel, interpreta exactamente esta posición cuando afirma que los paradigmas ayudan a los científicos a dar nuevos significados a los datos o a buscar nueva información para resolver los problemas.

El plantea la idea de los "conceptos inclusores" en la estructura cognitiva de los aprendices los cuales facilitan el aprendizaje significativo y por ello incrementa la resolución positiva de los problemas.3 Esta otra forma de entender la ciencia adquiere un sentido más dinámico y participativo. La ciencia deja de ser un misterio para convertirse en algo cercano y accesible.

2.4 Definiciones conceptuales.

1. **Algoritmo:** Conjunto de operaciones lógico-matemático que aplicados en un orden determinado y de acuerdo con un conjunto de reglas operativas permiten resolver un problema o ejercicio.
2. **Aprendizaje:** Proceso mediante el cual se adquiere una determinada habilidad, se asimila una información o se adopta una nueva estrategia de conocimiento de acción.
3. **Aprendizaje por descubrimiento**: Aquel que se basa en la adquisición de conceptos sin la presentación de información sistematizada sobre ello, y que consiste en una búsqueda activa que lleva al sujeto a explorar su entorno.
4. **Aritmética:** Rama de la matemática que estudia los números y el cálculo numérico.
5. **Asimilación:** proceso que consiste en que el alumno comprenda aquello que aprende y sea capaz de incorporar estos nuevos
6. **Operación:** Conjunto de reglas que permiten, partiendo de una o varias cantidades o expresiones, llamados datos, obtener otras cantidades o expresiones llamadas resultados.

CAPITULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Tipo de investigación.

El tipo de investigación es cuantitativa; se trata de una investigación de tipo explicativo-experimental.

La investigación planteada también puede concebirse como tipo de tecnologías sociales, tal como lo señala PISCOYA (1995), con dos grupos: uno de control y otro experimental medidos antes y después, en el proceso del desarrollo del aprendizaje de la matemática

3.2 Diseño de la investigación.

3.2.1 Diseño de la investigación.

El diseño que adoptará en esta investigación es el diseño cuasi experimental: Diseño de dos grupos aleatorizados pre y post test, o diseño con grupo control pre y post test (Sanchez Carlessi, 1998, pág. 101)

El diagrama que corresponde a este diseño es el siguiente:

GE:	O_1	**X**	O_2
GC:	0_3	**-**	0_4

DONDE:

GE : Grupo experimental
GC : Grupo control
O_1 y O_3 : El pre test
X : Tratamiento (Método Singapur)
O_2 y O_4 : Post test

3.3 Población y muestra.

Para la presente investigación, la población y la muestra serán los mismos, por el motivo de que en el Colegio Nacional de Aplicación solo hay un salón de segundo grado de primaria de 25 niños(as).

El Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, es un centro de laboratorio pedagógico donde los alumnos de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán, de la Facultad de Ciencias de la Educación realizan sus prácticas, los alumnos de segundo grado que estudian en este colegio se encuentran en niveles socio – económico: alto, medio y bajo y para poder estudiar en este colegio se requiere aprobar un examen de selección, en el grado que se va a realizar la investigación los alumnos tienen 7 años de edad de acuerdo a la nómina de matrícula.

La población muestral será distribuido de la siguiente manera:

- 12 alumnos serán el grupo experimental

- 12 alumnos serán el grupo control

Para le elección del grupo experimental se utilizara la muestra probabilística, utilizando la técnica del muestreo simple, en la que se eligió proporcionalmente por sexo, además, se excluyó a un niño al azar con la finalidad de tener igual cantidad de sujetos en ambos grupos, tal como se detalla la distribución de los alumnos en la siguiente tabla:

Tabla 4: distribución de la muestra de los alumnos del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación por sexo.

ALUMNOS DEL SEXTO GRADO	TOTAL DE LA POBLACION MUESTRAL	TOTAL DE ALUMNOS POR GRUPO	
		GRUPO EXPERIMETAL	GRUPO CONTROL
Varones	15	7	7
mujeres	10	5	5
Total		12	12

FUENTE: Acta de evaluación del educando del 2014 del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL
ELABORACIÓN: Tesista

3.4 Instrumentos de recolección de datos.

a) **Pruebas Educativas.-** El diseño de estas pruebas constituyen la herramienta fundamental para el éxito en la obtención de datos y la comprobación de la hipótesis.

Tal es así, que el presente trabajo de investigación, se utilizó la Prueba de Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) elaborada por el Ministerio de Educación a través de la Unidad de medición de la calidad. Que es una evaluación a gran escala que cada año aplica el Ministerio de Educación para medir los aprendizajes de los estudiantes de segundo grado de primaria. Los objetivos de la ECE son los siguientes: es evaluar los logros de aprendizaje alcanzados por los estudiantes de segundo grado de primaria en Matemática (en relación con la comprensión del número, que es la base de los demás aprendizajes en esta área). Comparar en el tiempo los resultados de los estudiantes, de manera que podamos saber si están mejorando o no. Dicha prueba contiene 20 preguntas que se administra en dos días. Para su calificación se presenta en tres niveles: inicio, proceso y satisfactorio. Estos niveles de logro son inclusivos, es decir lograr el Nivel Satisfactorio implica haber logrado ya el Nivel En Proceso. Según sus respuestas en la prueba, a cada estudiante se le asigna una medida, utilizando un modelo de análisis conocido como "Modelo de Rasch". A mayor medida, mayor habilidad del estudiante. Esta medida determina en qué nivel de logro se encuentra.

3.5 Técnicas de recojo, procesamiento y presentación de datos.

3.5.1 Técnicas de recojo de datos.

- **Observación**
- **La entrevista**
- **Pruebas para el pre y post test.**
- **Fuentes documentales:** se utilizó las siguientes fichas:
  - ✓ fichas bibliográficas: Se usó para anotar los datos referidos a los libros que se emplearan durante el proceso de investigación.
  - ✓ ficha textual o de transcripción: Se usó para transcribir conceptos de importancia para la investigación.
  - ✓ fichas de comentario y/o ideas personales: Se utilizó para anotar dudas, comentarios, refutaciones, incertidumbres, comprobaciones durante el proceso de la investigación.

3.5.2 Técnicas de procesamiento de datos.

a) **La Revisión y Consistencia de la Información.-** Este paso consistió básicamente en depurar la información revisando los datos contenidos en los instrumentos de trabajo de campo, con el propósito de ajustar los llamados datos primarios (juicio de expertos).

b) **Clasificación de la Información.-** Se llevó a cabo con la finalidad de agrupar datos mediante la distribución de frecuencias de las variables independiente y dependiente.

c) **La Codificación y Tabulación.-** La codificación es la etapa en la que se formará un cuerpo o grupo de símbolos o valores; de tal manera que los datos fueron tabulados, generalmente se efectúa con números o letras. La tabulación manual se realizó ubicando cada uno de las variables en los grupos establecidos en la clasificación de datos, o sea en la distribución de frecuencias. También se utilizará la tabulación mecánica, aplicando programas o paquetes estadísticos de sistema computarizado.

d) **Estadística Inferencial para cada variable**: Se aplicó la prueba de hipótesis denominada "t" de Student usando la distribución normal, debido a que el tamaño de la muestra en los grupos experimental y de control son menos de 32 niños y niñas.

Las medidas de tendencia central (mediana y media), las medidas de variabilidad (la desviación estándar y la varianza)

3.5.3 Técnicas de presentación de datos.

a) **La Redacción Científica.-** Se llevó a cabo siguiendo las pautas que se fundamenta con el cumplimiento del reglamento de grados y títulos de la Escuela de Post Grado de la Universidad Nacional "Hermilio Valdizán" de Huánuco. Es decir, cumpliendo con un diseño o esquema del informe, y para la redacción se ha tenido en cuenta: el problema estudiado, los objetivos, el marco teórico, la metodología, técnicas a utilizar, el trabajo de campo, análisis de los resultados, discusión, conclusiones y recomendaciones propuestas.

b) **Sistema Computarizado.-** Asimismo, el informe se realizó utilizando distintos procesadores de textos, paquetes y programas, insertando gráficos y textos de un archivo a otro. Algunos de estos programas son: Word, Excel (hoja de cálculo y gráficos) y SPSS (análisis estadístico y gráfico)

c) **Cuadros Estadísticos Bidimensionales.-** Con la finalidad de presentar datos ordenados y así facilitar su lectura y análisis, se construyó cuadros estadísticos de tipo bidimensional, es decir, de doble entrada porque en dichos cuadros se distingue las dos variables de la investigación.

d) **La campana de Gauss y otros gráficos que nos facilitó la estadística descriptiva e inferencial.**

CAPITULO IV

RESULTADOS

4.1 Selección y validación de los instrumentos.

En este apartado desarrollaremos las técnicas, y el análisis de la validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación.

4.1.1 Los instrumentos de investigación.

Los instrumentos de evaluación empleados en la ECE son pruebas de rendimiento. En este caso, se trata de pruebas de lápiz y papel que se aplican siguiendo un procedimiento estandarizado, tanto en el control de los tiempos como en la secuencia y la forma en que se realizan las indicaciones, los procedimientos y las explicaciones para su aplicación. Estas pruebas recogen información sobre el nivel de logro de los estudiantes en relación con las capacidades y desempeños evaluados.

Las pruebas de rendimiento de la ECE están conformadas por ítems o preguntas de selección múltiple con única respuesta, para cuya resolución el estudiante deberá seleccionar la mejor alternativa o la respuesta correcta de entre tres alternativas.

Los ítems de la Examen de Evaluación Censal (ECE) La prueba contiene preguntas de distinta complejidad (según el tipo de proceso cognitivo que le demanda al estudiante para resolverla), algunas de carácter rutinario, como las aplicaciones de algoritmos desconectados (operaciones típicas, sin contexto) o el reconocimiento de descomposiciones estándar de números en el sistema decimal. En cambio, otras preguntas requieren cierto grado de reflexión, profundidad y originalidad de pensamiento, como descomposiciones no convencionales de números y resolución de problemas con discriminación e integración de información desde diversos contextos.

La prueba de Matemática de la ECE es elaborada en concordancia con el Diseño Curricular Nacional (2009). Se tomaron en cuenta la competencia y las capacidades requeridas para el final del tercer ciclo en el organizador de *Número, Relaciones y Operaciones*, en el cual se señala la siguiente competencia:

> «***Resuelve problemas de situaciones cotidianas en las que identifica relaciones numéricas realizando con autonomía y confianza operaciones de adición y sustracción con números de hasta tres cifras***» ***(p. 189).***

El modelo de evaluación del área de Matemática para la ECE considera tres dimensiones, las cuales permiten medir el nivel de logro de los estudiantes en el área. Estas dimensiones son: capacidades, contenidos y situaciones matemáticas. Es decir, cada pregunta de la prueba permite que el estudiante ponga en juego capacidades matemáticas a través de un contenido y en una determinada situación.

El instrumento utilizado fue:

- ✓ Pretest y postest: Examen de Evaluación Censal del área de matemática aplicado en el 2011. Con dos cuadernillos (ver Anexo 2 y 3).

4.1.2 Validez y confiabilidad del instrumento de investigación

La prueba Evaluación Censal de Estudiantes del área de matemática (dos cuadernillos) fue elaborado por Unidad de Medición del Ministerio de Educación del Perú y tiene concordancia el sistema de variables Aprendizaje de las matemáticas. De tal manera que el trabajo de investigación y Test, ambos son similares en contenidos, grados de complejidad y apuntaron a los mismos objetivos.

Esta prueba de Evaluación Censal de Estudiantes del área de matemática antes de su aplicación fueron validadas mediante la modalidad de Prueba Piloto, tal como se puede apreciar en la Tabla Nº 22: Validación de la Prueba Piloto.

Tabla 5: Validación de la Prueba Piloto.

N°	PUNTAJES DE PRUEBA PILOTO	
	TEST	R-TEST
	fi	fi
1.	60	62
2.	20	22
3.	62	61
4.	8	9
5.	7	6
6.	27	26
7.	6	8
8.	26	26
9.	9	10
10.	6	6
11.	24	24
12.	9	11
13.	21	23
14.	25	24
15.	7	8
16.	3	3
17.	8	9
18.	6	6
19.	22	22
20.	8	7
21.	64	64
22.	7	8
23.	9	8
R=0,998		

La Prueba Piloto se aplicó en el mes noviembre del año 2013, a los estudiantes segundo grado de Educación Primaria del 2013, del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL de la Universidad Nacional Hermilio Vadizan.

El primer y segundo cuadernillo aplicó el 5 y 6 de noviembre y la misma prueba se les volvió a suministrar el 27 y 28 de noviembre; es decir, luego de tres semanas, y continuando el desarrollo de sus actividades lectivas, pero sin haber aplicado el método Singapur. Por ello, podemos observar las calificaciones relativamente bajas. Los expertos a esta técnica de validación la denominan TEST y RETEST.

Para la validación de la prueba se aplicó la correlación de Pearson obteniéndose una respuesta muy significativa cuyo coeficiente r es igual a 0.998. Lo que significa una alta correlación de la prueba suministrada.

La prueba también, fue sometida a la validación a través de juicio de expertos. Por los especialistas del Ministerio de Educación a través de la Unidad de la Medición de la Calidad Educativa.

Confiabilidad de los Instrumentos

Para determinar el grado de confiabilidad de los instrumentos de investigación en las diversas competencias de aprendizaje, se seleccionó una prueba piloto de 23 niños y niñas.

Para determinar el grado de confiabilidad de los instrumentos de medición se utilizó el coeficiente de consistencia interna de Kuder – Richardson (KR-20) y el coeficiente Alfa de Cronbach, determinándose que los instrumentos tienen una confiabilidad alta para realizar una medición objetiva en la investigación.

Coeficiente Kuder – Richardson (KR

$$r = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i\left(1 - p_i\right)}{S^2}\right]$$

Donde K : Cantidad de ítems de instrumentos .

S^2: Varianza de las puntuaciones obtenidas .

P: proporción de examinados que responden adecuadamente a cada ítem.

q: proporción de examinados que responden en forma errada u omite en cada ítem.

Coeficiente Alfa de Cronbach:

$$\alpha = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_X^2}\right]$$

Tabla 6: Prueba de confiabilidad y validez del instrumento, mediante el coeficiente de Kuder Richardson y alfa de Cronbach.

Prueba de la Evaluación Censal del Estudiantes de segundo grado en el área de Matemática	Kuder Richardson KR-20	
	0.997	
	Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach tipificados
	0.971	0.969

Por otro lado, según la Unidad de la Medición de la Calidad del Ministerio de Educación, la Prueba de la Evaluación Censal de Estudiantes del año 2011 del área de Matemática del segundo grado de primaria, obtuvo para dicha prueba, una confiabilidad de 0,89, que significa que tiene una confiabilidad alta, este resultado fue publicado en la página web de la Unidad de la Medición de la Calidad en el año 2011, con el título Informes ECE 2011.Concluyendo que el instrumento es confiable por tener un coeficiente promedio mayor al 80%.

4.2 Presentación de resultados.

En la presente investigación se procedió a codificar y generar una base de datos haciendo uso del paquete estadístico SPSS, a fin de dar consistencia a la información levantada en la aplicación de los instrumentos de investigación.

En un segundo lugar se procedió a utilizar el análisis descriptivo con el fin de describir y caracterizar cada una de las variables haciendo uso de medidas de tendencia central (media, media y moda) y medidas de dispersión (varianza, desviación estándar), así como un análisis frecuencial y gráficos de barras.

Para determinar el efecto del Método Singapur entre el grupo control y el grupo experimental, y probar las hipótesis planteadas, se utilizó la prueba T-Student al 95%de confianza, que "*Es una prueba estadística para evaluar hipótesis acerca de la diferencia de medias entre las variables cuantitativas*" (Hernández, R., 2003).

4.2.1 Análisis de datos del grupo control

Tabla 7: Resultado del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática.

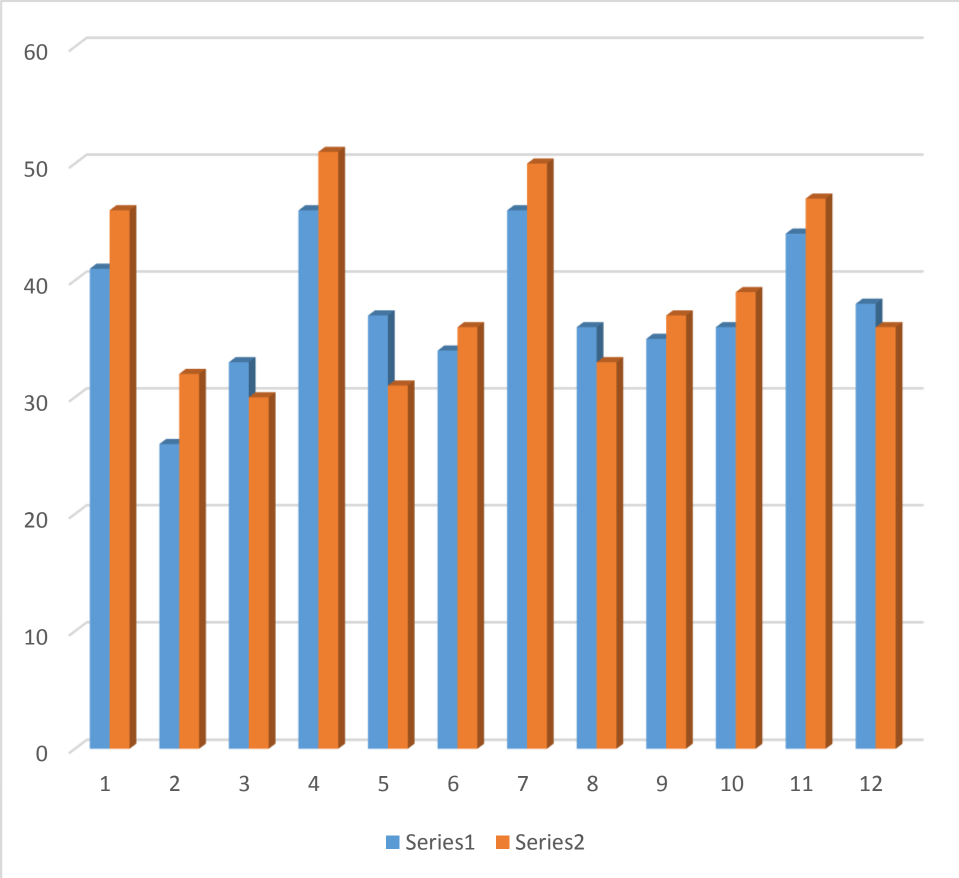
N°	APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA DEL GRUPO CONTROL	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	fi
1.	41	46
2.	26	32
3.	33	30
4.	46	51
5.	37	31
6.	34	36
7.	46	50
8.	36	33
9.	35	37
10.	36	39
11.	44	47
12.	38	36
SUMATORIA	452	468
PROMEDIO	37.7	39

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Investigador

INTERPRETACIÓN:

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (39) tiene baja diferencia con respecto al Pre Test (37.7), observando como diferencia de promedio 1.3; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo control, no difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que dada la baja diferencia obedece a sus estudios de las actividades académicas normales y no por efectos del Método Singapur, por lo que el aprendizaje de la matemática no fue significativo en referencia a los promedios.

Gráfico 1: Resultado del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática.



INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi la mayoría tuvieron cambios leves en su desempeño, especialmente se puede evidenciar en el sujeto 2 quien evidencia un ligero cambio en su desempeño en comparación de los otros; esto se debe a las actividades desarrollas en el aula especialmente en el área de matemáticas. Por otro lado se puede evidenciar que hay 4 sujetos que disminuyeron es su desempeño; entonces, podemos concluir que los sujetos del Grupo control no sufrieron cambios en el aprendizaje de la matemática, producto de la no aplicación del Método Singapur.

Tabla 8: Resultado del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número.

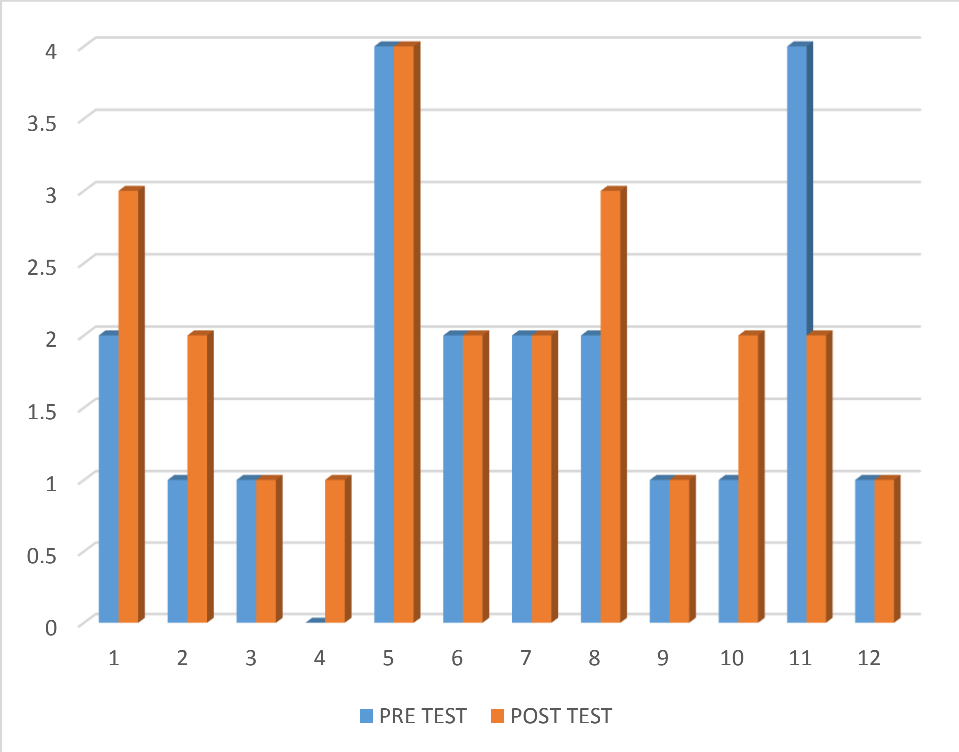
N°	COMPRENSIÓN Y USO CON DISTINTO SIGNIFICADO DEL NÚMERO.	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	fi
1.	2	3
2.	1	2
3.	1	1
4.	0	1
5.	4	4
6.	2	2
7.	2	2
8.	2	3
9.	1	1
10.	1	2
11.	4	2
12.	1	1
SUMATORIA	21	24
PROMEDIO	1.75	2

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Investigador

INTERPRETACIÓN:

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (2) tiene poca diferencia con respecto al Pre Test (1.75), observando como diferencia de promedio 0,25; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo control, no difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que la poca diferencia obedece a sus estudios sus actividades académicas normales y no por efectos del Método Singapur; por lo que el aprendizaje de la matemáticas en la dimensión comprensión y uso del número no es significativa en referencia a los promedios.

Gráfico 2: Resultado por sujeto del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número.



INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi la mitad de los sujetos tuvieron cambio leves en su desempeño, especialmente se puede evidenciar en los sujeto 1, 2, 4, 8 y 10 en la que evidencia un ligero cambio en su desempeño en comparación de los otros; esto se debe a las actividades desarrollas en el aula especialmente en el área de matemáticas. Por otro lado se puede evidenciar que la mitad de los sujetos no han sufrido cambio alguno, tal como se muestra en el gráfico, entonces, podemos concluir que los sujetos del Grupo control no sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso con distinto significado del número, producto de la no aplicación del Método Singapur.

Tabla 9: Resultado del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal.

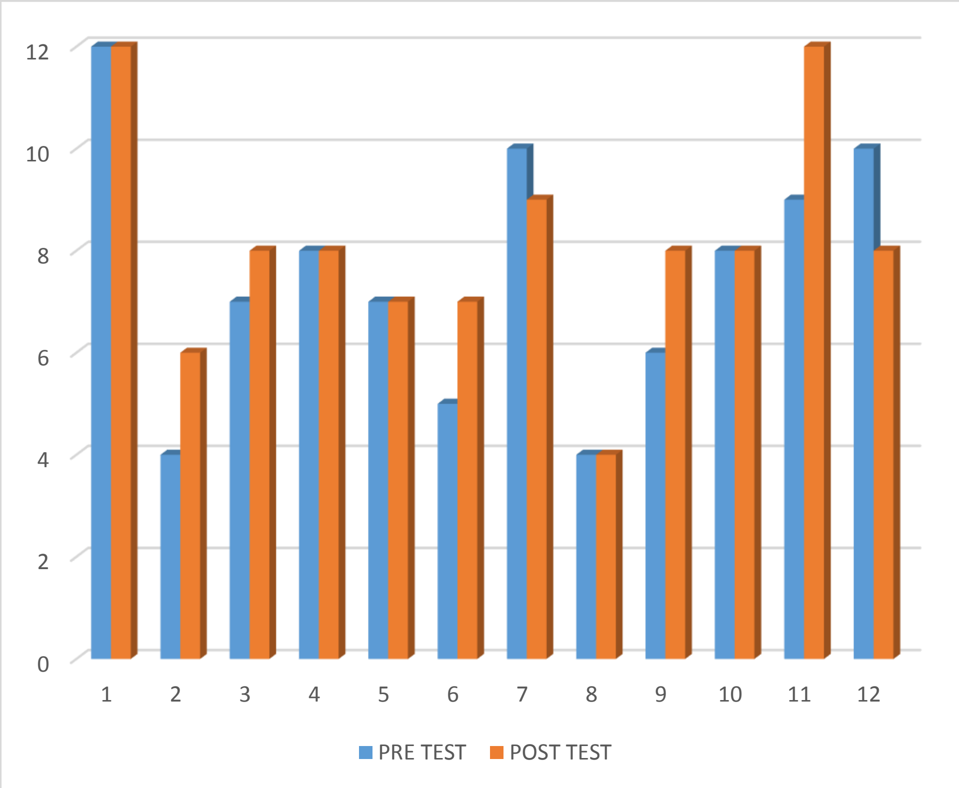
N°	COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL.	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	Fi
1.	12	12
2.	4	6
3.	7	8
4.	8	8
5.	7	7
6.	5	7
7.	10	9
8.	4	4
9.	6	8
10.	8	8
11.	9	12
12.	10	8
SUMATORIA	90	97
PROMEDIO	7.5	8.08

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Investigador

INTERPRETACIÓN

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (7.5) tiene baja diferencia con respecto al Pre Test (8.08), observando como diferencia de promedio 0.58; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo control, no difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que la baja diferencia obedece a sus estudios de sus actividades académicas normales y no por efectos del Método Singapur; por lo que el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal no es significativa en referencia a los promedios.

Gráfico 3: Resultado por sujetos del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal.



INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); pocos obtuvieron cambio en su desempeño, especialmente se puede evidenciar que el sujetos 11 evidencia un ligero cambio en su desempeño en comparación de los otros; esto se debe a las actividades desarrollas en el aula especialmente en el área de matemáticas. Por otro lado se puede evidenciar que hay sujetos que no han sufrido cambio alguno, tal como se muestra en el gráfico con los sujetos 1, 4, 5, 8 y 10'; entonces, podemos concluir que los sujetos del Grupo control no sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal, producto de la no aplicación del Método Singapur.

Tabla 10: Resultado del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas.

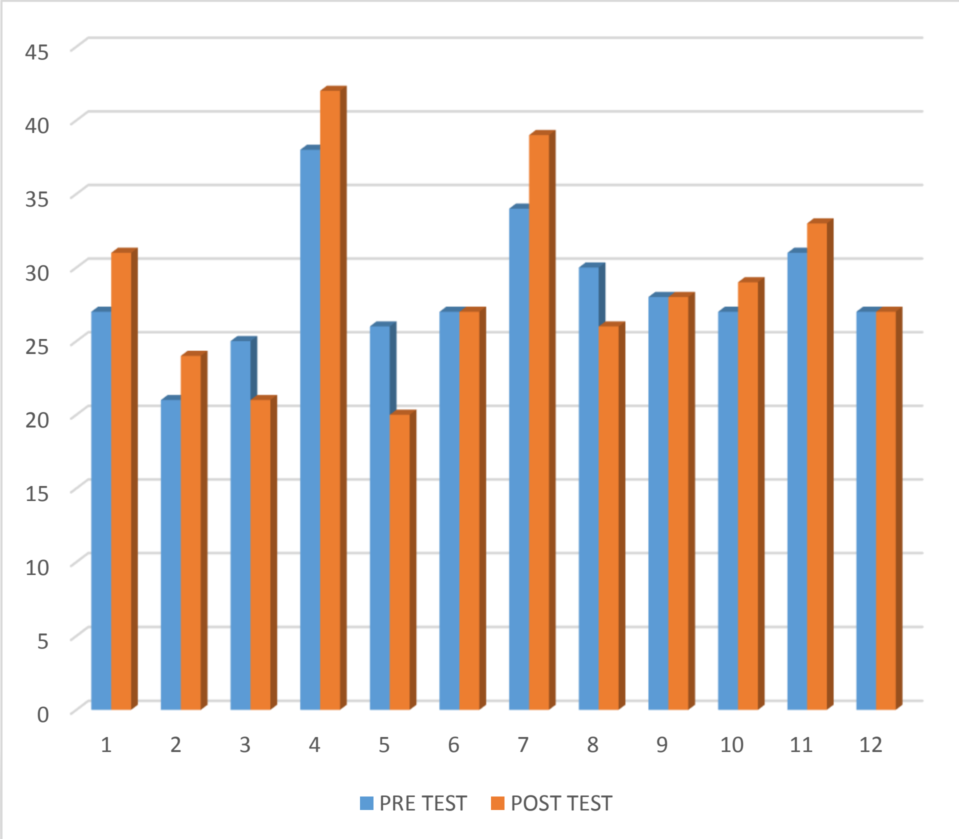
N°	NOCIONES ADITIVAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	fi
1.	27	31
2.	21	24
3.	25	21
4.	38	42
5.	26	20
6.	27	27
7.	34	39
8.	30	26
9.	28	28
10.	27	29
11.	31	33
12.	27	27
SUMATORIA	341	347
PROMEDIO	28.42	28.90

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Investigador

INTERPRETACIÓN

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (28.42) tiene poca diferencia con respecto al Pre Test (20.90), observando como diferencia de promedio 0,48; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo control, no difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que la baja diferencia generada obedece a sus estudios de sus actividades académicas normales y no por efectos del Método Singapur; por lo que el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas. no es significativa en referencia a los promedios.

Gráfico 4: Resultado por sujeto del pre y post test del grupo control sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas.



INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi la mayoría de los sujetos tuvieron cambio leves en su desempeño, especialmente se puede evidenciar que el sujeto 7 evidencia un ligero cambio en su desempeño en comparación de los otros; esto se debe a las actividades desarrollas en el aula especialmente en el área de matemáticas. Por otro lado se puede evidenciar que hay sujetos que no han sufrido cambio alguno, tal como se muestra en el gráfico con los sujetos 6, 9 y 12; entonces, podemos concluir que los sujetos del Grupo control no sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas, producto de la no aplicación del Método Singapur.

4.2.2 Análisis de datos del grupo experimental.

Tabla 11: Resultado del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática.

N°	APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA DEL GRUPO EXPERIMENTAL.	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	fi
1.	37	59
2.	33	62
3.	40	56
4.	36	58
5.	31	58
6.	33	59
7.	38	52
8.	41	58
9.	36	57
10.	38	63
11.	46	64
12.	36	58
SUMATORIA	445	704
PROMEDIO	37.08	58.67

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Propia

INTERPRETACIÓN:

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (58.67) es mayor que el Pre Test (37.08), observando como diferencia de promedio 21.59; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo experimental, difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que dada la diferencia obedece a efectos del Método Singapur por lo que los niños desarrollaron óptimamente su aprendizaje de la matemática en referencia a los promedios.

Gráfico 5: Resultado por sujeto del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática.

INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi todos los individuos han mejorado en su desempeño, especialmente se puede evidenciar que el sujeto 2 en su desempeño incremento notablemente su desempeño en comparación de los otros individuos, entonces podemos concluir que los sujetos del Grupo Experimental sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática, producto de la efectividad del Método Singapur.

Tabla 12: Resultado del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número.

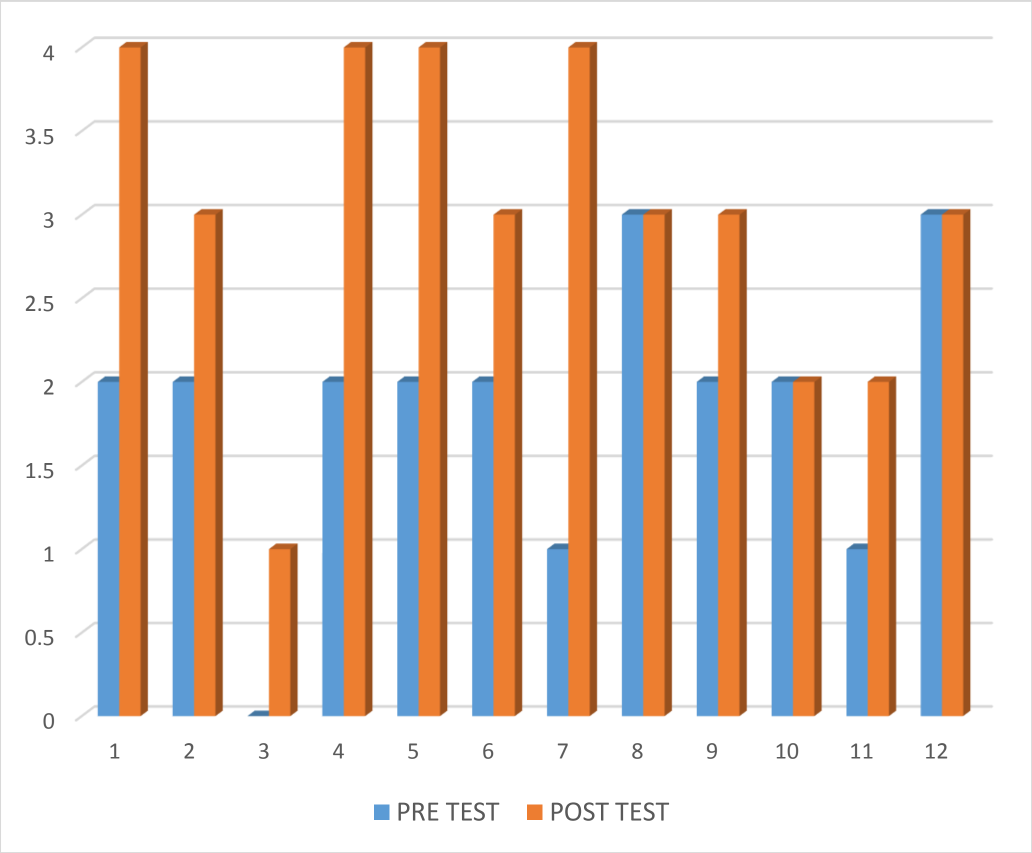
N°	COMPRENSIÓN Y USO CON DISTINTO SIGNIFICADO DEL NÚMERO.	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	fi
1.	2	4
2.	2	3
3.	0	1
4.	2	4
5.	2	4
6.	2	3
7.	1	4
8.	3	3
9.	2	3
10.	2	2
11.	1	2
12.	3	3
SUMATORIA	22	36
PROMEDIO	1.83	3

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Investigador

INTERPRETACIÓN:

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (3) es mayor que el Pre Test (1.83), observando como diferencia de promedio 1.17; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo experimental, difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que dada la diferencia obedece a efectos del Método Singapur por lo que los niños desarrollaron óptimamente su aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número con referencia a los promedios-

Gráfico 6: Resultado por sujetos del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número.



INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi todos los individuos han mejorado en su desempeño, especialmente se puede evidenciar que el sujeto 7 en su desempeño incrementó notablemente su aprendizaje en comparación de los otros, entonces podemos concluir que los sujetos del Grupo Experimental sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso con distinto significado del número, producto de la efectividad del Método Singapur.

Tabla 13: Resultado del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal.

N°	COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL.	
	PRE TEST	POST TEST
	Fi	Fi
1.	7	13
2.	8	11
3.	9	13
4.	6	12
5.	8	14
6.	6	12
7.	7	13
8.	7	14
9.	8	14
10.	9	13
11.	7	14
12.	7	13
SUMATORIA	89	156
PROMEDIO	7.42	13

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Investigador

INTERPRETACIÓN:

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (13) es mayor que el Pre Test (7.42), observando como diferencia de promedio 5.58; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo experimental, difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que dada la diferencia obedece a efectos del Método Singapur por lo que los niños desarrollaron óptimamente su aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal con referencia a los promedios.

Gráfico 7: Resultado del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal.

INTERPRETACIÓN:

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi todos los individuos han mejorado en su desempeño, especialmente se puede evidenciar que los sujetos 8 y 11 en su desempeño incrementaron notablemente en comparación de los otros, entonces podemos concluir que los sujetos del Grupo Experimental sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal, producto de la efectividad del Método Singapur.

Tabla 14: Resultado del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas.

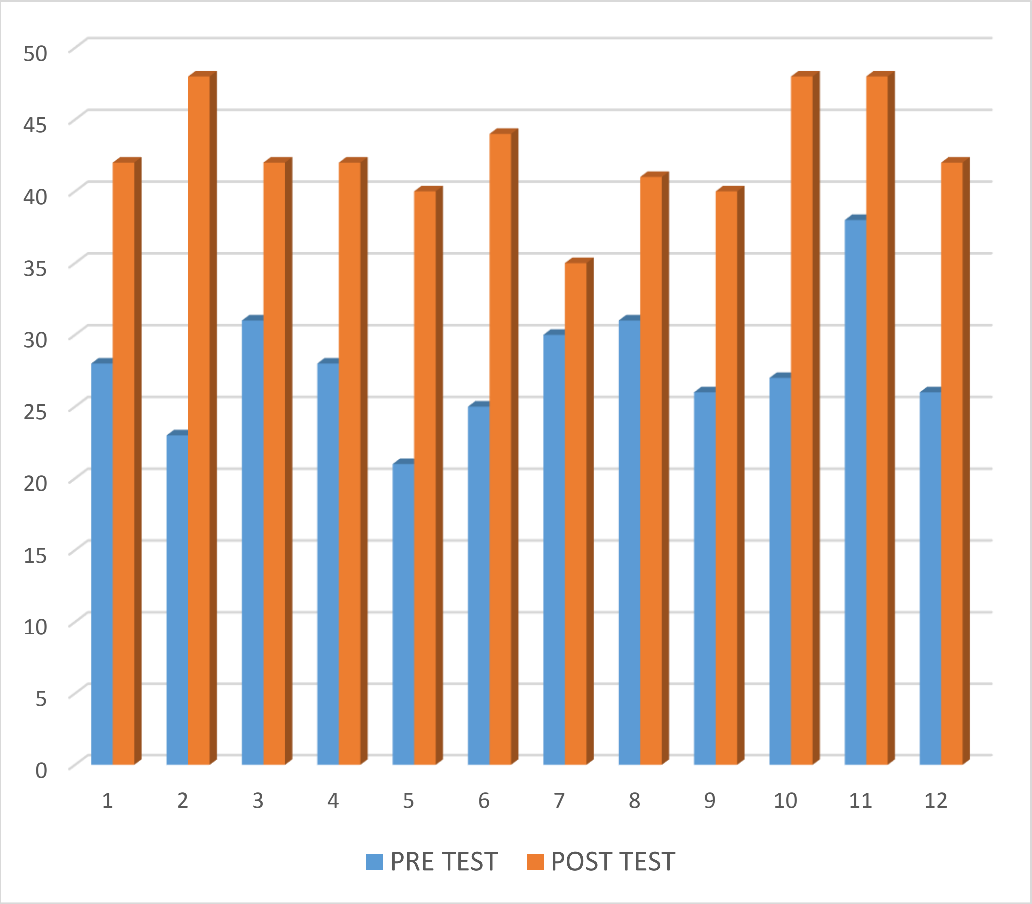
N°	NOCIONES ADITIVAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.	
	PRE TEST	POST TEST
	fi	fi
1.	28	42
2.	23	48
3.	31	42
4.	28	42
5.	21	40
6.	25	44
7.	30	35
8.	31	41
9.	26	40
10.	27	48
11.	38	48
12.	26	42
SUMATORIA	334	512
PROMEDIO	27.83	42.67

FUENTES: Pre y post test
ELABORACIÓN: Propia

INTERPRETACIÓN:

Se observa que el promedio aritmético del Post Test (42.67) es mayor que el Pre Test (27.83), observando como diferencia de promedio 14.84; lo que significa que los resultados del Post Test de los niños en el grupo experimental, difieren significativamente con respecto al Pre Test. Asumiendo que dada la diferencia obedece a efectos del Método Singapur por lo que los niños desarrollaron óptimamente su aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas con referencia a los promedios.

Gráfico 8: Resultado por sujeto del pre y post test del grupo experimental sobre el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas.



INTERPRETACIÓN

Se observa en el gráfico, que del total de sujetos (12); casi todos los individuos han mejorado en su desempeño, especialmente se puede evidenciar que el sujeto 10 en su desempeño incremento notablemente en comparación de los otros, entonces podemos concluir que los sujetos del Grupo Experimental sufrieron cambios notables en el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas, producto de la efectividad del Método Singapur.

4.3 Contrastación y prueba de las hipótesis.

4.3.1 Contrastación y prueba de la hipótesis Específica.

a) Hipótesis especifica 1: Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

Prueba de hipótesis

1. **Redactamos la Hipótesis estadística:**

   H_1 = **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

   H_0 =. **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

2. **Determinar alfa (α)**

   Alfa = 5% = 0,05

3. **Seleccionamos la prueba estadística**

   La variable fija es de dos grupos; por lo tanto es un estudio transversal de muestras independientes, porque estamos evaluando y comparando dos grupos en un mismo momento; las calificaciones del aprendizaje de la matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número del post test del grupo experimental y control; la variable aleatoria es numérica por lo que utilizaremos una prueba paramétrica, específicamente utilizaremos la T de Student para muestra independientes.

4. **Realizamos la lectura de P-valor**

- ✓ **Normalidad:** se debe corroborar que la **variable aleatoria** en **ambos grupos** se distribuye normalmente. Para ello se utilizó la prueba de Shapiro Wilk, porque el tamaño de la muestra es < 50 sujetos. El criterio para determinar si la Variable aleatoria se distribuye normalmente es:
  - **a. P-valor =>** α Aceptar la Ho = los datos provienen de una distribución normal.
  - **b. P-valor <** α Aceptar la H1 = los datos **NO** provienen de una distribución normal.

Tabla 15: Pruebas de normalidad

COMPRENSIÓN DEL NÚMERO Y USO CON DISTINTO SIGNIFICADO	GRUPOS	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	**gl**	**Sig.**	**Estadístico**	**gl**	**Sig.**
	GRUPO CONTROL	0.250	12	0.037	0.862	12	0.051
	GRUPO EXPERIMENTAL	0.250	12	0.037	0.862	12	0.051

a. Corrección de significación de Lilliefors

Se utiliza y se compara el nivel de significación (Sig.) de la Tabla 15 en ambos grupos

P-Valor (grupo control) = 0.051 **>** α = 0.050

P-Valor (grupo experimental) = 0.051 **>** α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.051) de ambos grupos es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor =>** α Aceptamos la Ho, en tal sentido, **la variable puntaje del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número en ambos grupos se comporta normalmente.**

Gráfico 9: Q-Q Normalidad del aprendizaje de la matemática en la dimensión del comprensión y uso del número para el grupo control.

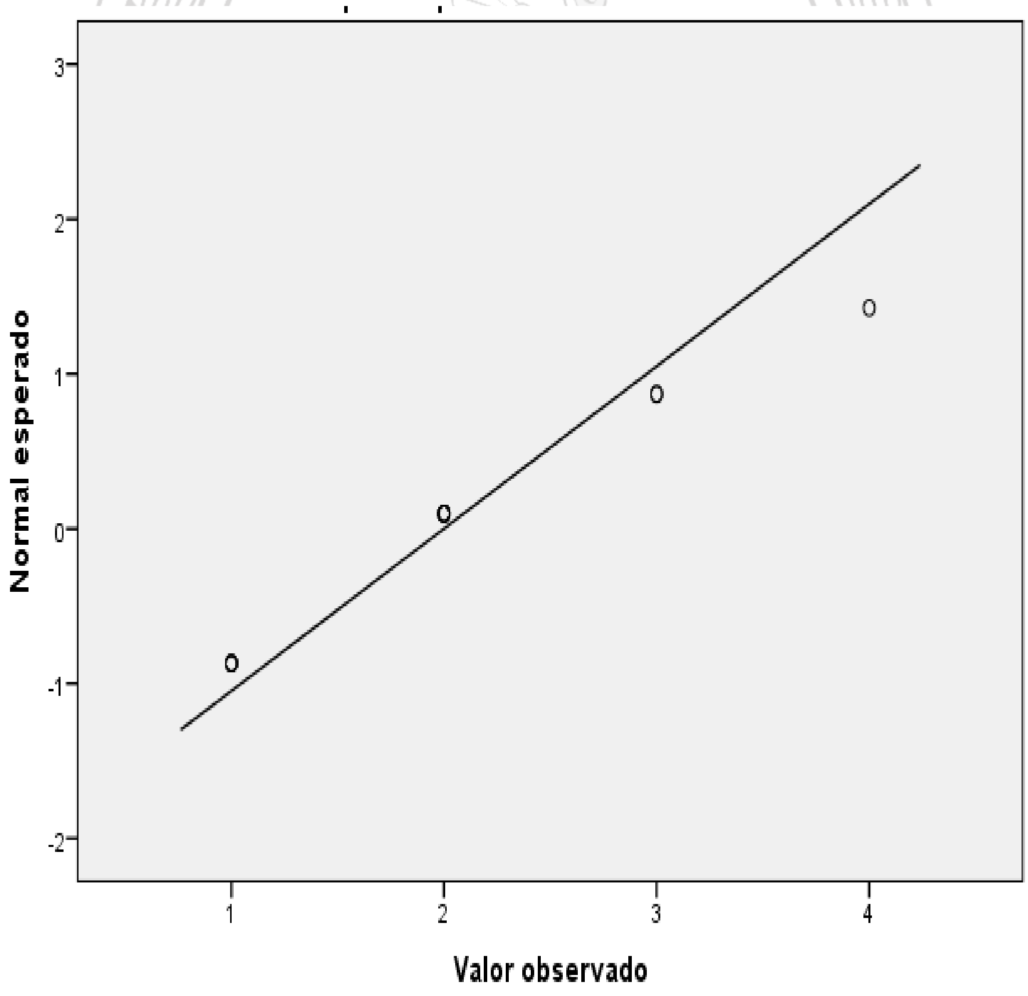


Gráfico 10: Q-Q Normalidad del aprendizaje de la matemática en la dimensión de la comprensión y uso del número para el grupo experimental.

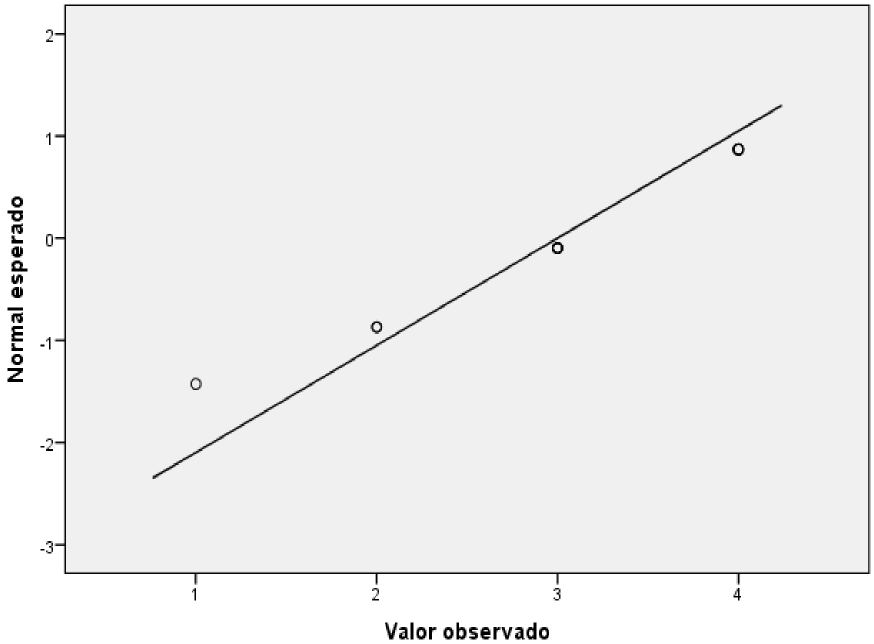
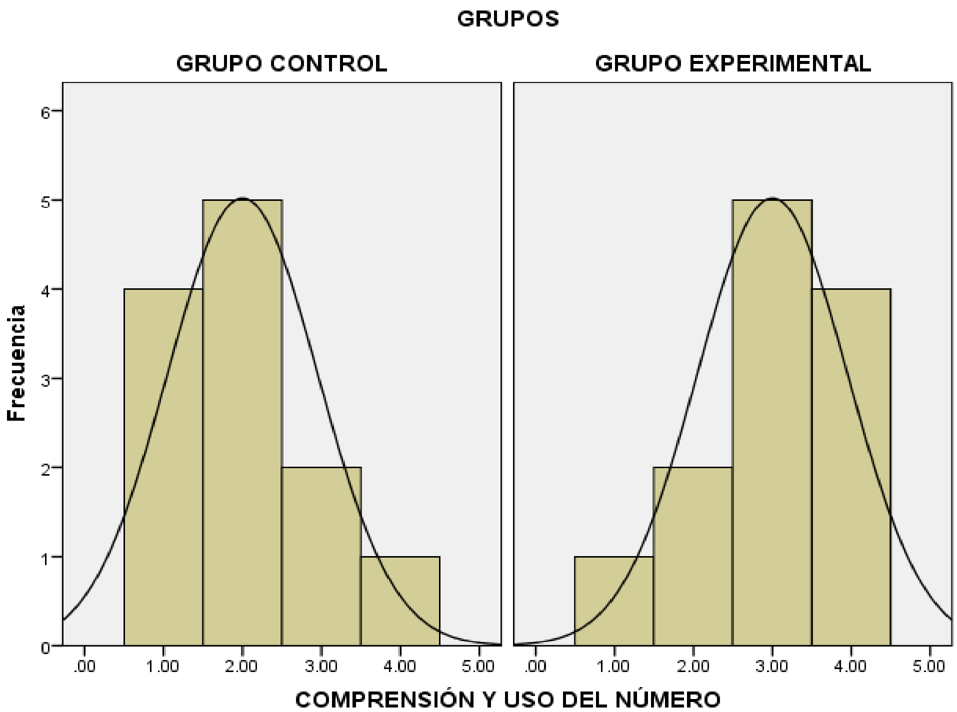


Gráfico 11: Histograma y curva de distribución del aprendizaje de la matemática en la dimensión de la comprensión y uso del número del grupo control y experimental.



INTERPRETACIÓN:

Los gráficos anteriores, nos muestra que los datos del grupo control y experimental siguen una distribución normal.

- ✓ **Igualdad de Varianza:** (prueba de Levene). Se debe corroborar la igualdad de varianza
  - **a. P-valor =>** α Aceptar la Ho = las **varianzas** son **iguales**
  - **b. P-valor <** α Aceptar la H1 = existe **diferencia** significativa entre las **varianzas**

Tabla 16: Prueba de Levene de calidad de varianzas de la variable aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número.

		Prueba de Levene de calidad de varianzas	
		F	Sig.
COMPRENSIÓN Y USO DEL NÚMERO	Se asumen varianzas iguales	.000	1.000
	No se asumen varianzas iguales		

De la Tabla 16**: Prueba de Levene de calidad de varianzas de la variable aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número.**

Se extrae el nivel de significancia de la prueba de Levene, para comparar las varianzas, de acuerdo al cuadro se compara P-valor y α.

P-Valor = 1.0000 > α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (1.000) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor >** α Aceptamos la Ho, en tal sentido, **Las varianzas del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número de ambos grupos son iguales.**

- ✓ **Calculamos P-valor:** Como el resultado nos dice que las varianzas son iguales, usamos la primera fila de la tabla siguiente generado por el programa estadístico SPSS**.**

Tabla 17: Prueba T-Student para igualdad de medias de la hipótesis específica 1 del grupo control y experimental.

		prueba t para la igualdad de medias						
		T	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
							Inferior	Superior
COMPRENSIÓN Y USO DEL NÚMERO	Se asumen varianzas iguales	-2.569	22	0.018	-1.00000	.38925	-1.80725	-.19275
	No se asumen varianzas iguales	-2.569	22.000	0.018	-1.00000	0.38925	-1.80725	-.19275

P-valor: 0.018

5. **Realizamos la Prueba de T de Student**

Como se cumple los tres supuestos (normalidad, igualdad de varianza y P-valor) se puede calcular la T de Student para nuestra independientes en el programa SPSS

Decisión estadística:

Criterios de decidir

- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor ≤ α, se rechaza la Hipótesis nula (H_0), por lo que se acepta la Hipótesis alternativa (H_1)

- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor > α, no se rechaza la Hipótesis nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis nula (H_0)

P-Valor = 0.018 < α = 0.050

Interpretación: como P-valor (0.018) es menor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis estadística alternativa (H_1) en la que nos dice que existe una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test; en conclusión aceptamos la Hipostasis especifica 1 de nuestro trabajo de investigación en la que nos expresa: ***"Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014."***

b) **Hipótesis especifica 2:** Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

Prueba de hipótesis

1. **Redactamos la Hipótesis estadística:**

H_1 = **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

H_0 =. **No Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

2. **Determinar alfa (α)**

Alfa = 5% = 0,05

3. **Seleccionamos la prueba estadística**

La variable fija es de dos grupos; por lo tanto es un estudio transversal de muestras independientes, porque estamos evaluando y comparando dos grupos en un mismo momento; las calificaciones del aprendizaje de la matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal del post test del grupo experimental y control; la variable aleatoria es numérica por lo que utilizaremos una prueba paramétrica, específicamente utilizaremos la T de Student para muestra independientes.

4. **Realizamos la lectura de P-valor**

- ✓ **Normalidad:** se debe corroborar que la **variable aleatoria** en **ambos grupos** se distribuye normalmente. Para ello se utilizó la prueba de Shapiro Wilk, porque el tamaño de la muestra es < 50 sujetos. El criterio para determinar si la Variable aleatoria se distribuye normalmente es:

a. **P-valor =>** α Aceptar la Ho = los datos provienen de una distribución normal.

b. **P-valor <** α Aceptar la H_1 = los datos **NO** provienen de una distribución normal.

Tabla 18: Pruebas de normalidad

APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN DE COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	GRUPOS	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
	GRUPO CONTROL	0.265	12	0.020	0.893	12	0.129
	GRUPO EXPERIMENTAL	0.250	12	0.037	0.862	12	0.051

a. Corrección de significación de Lilliefors

Se utiliza y se compara el nivel de significación (Sig.) de la tabla anterior en ambos grupos

P-Valor (grupo control) = 0.129 **>** α = 0.050

P-Valor (grupo experimental) = 0.051 **>** α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.129) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) para el grupo control y P-valor (0.051) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) para el grupo experimental, se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor =>** α Aceptamos la Ho, en tal sentido, **la variable puntaje del aprendizaje de la matemática en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal en ambos grupos se comporta normalmente.**

Gráfico 12: Q-Q Normal del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal para el grupo control.

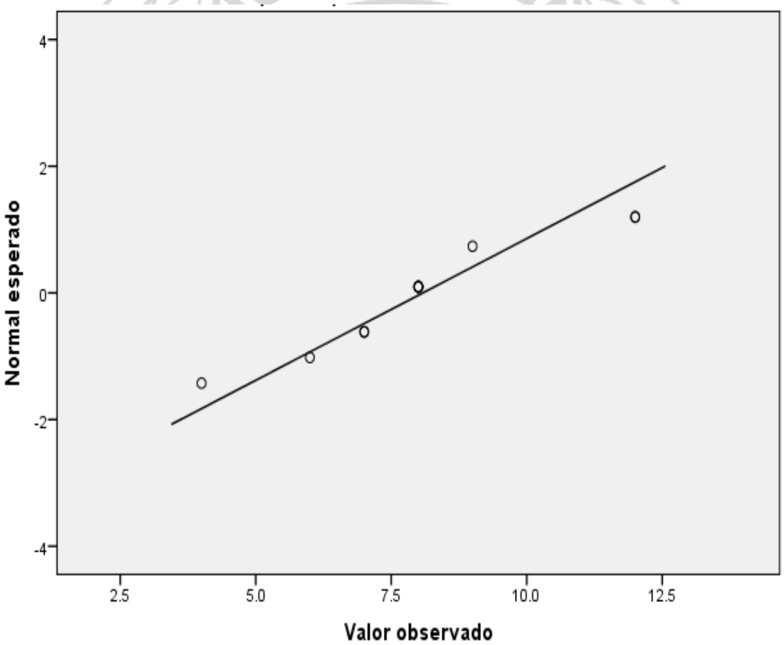


Gráfico 13: Normalidad del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal para el grupo experimental.

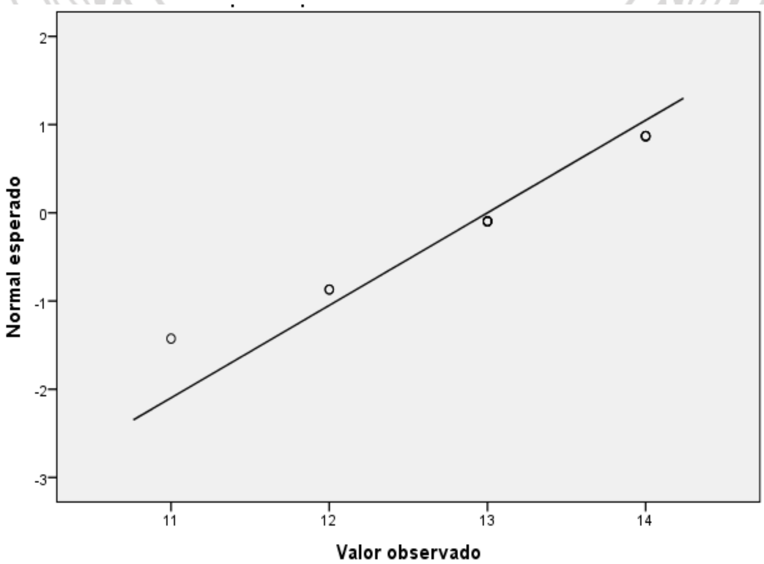
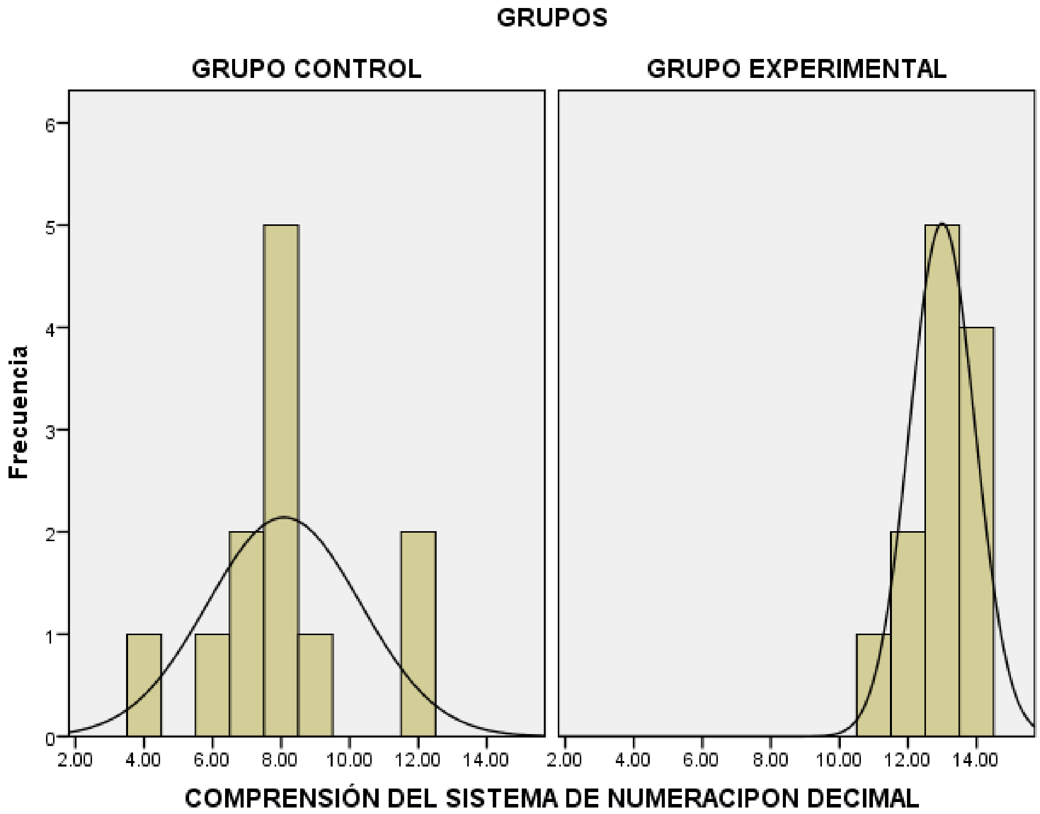


Gráfico 14: Histograma y curva de distribución del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal para el grupo control y experimental.



INTERPRETACIÓN:

Los gráficos anteriores, nos muestra que los datos del grupo control y experimental siguen una distribución normal

- ✓ **<u>Igualdad de Varianza</u>:** (prueba de Levene). Se debe corroborar la igualdad de varianza

  c. **P-valor =>** α Aceptar la Ho = las **varianzas** son **iguales**

  d. **P-valor <** α Aceptar la H1 = existe **diferencia** significativa entre las **varianzas**

Tabla 19: Prueba de Levene de calidad de varianzas de la variable aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal.

		Prueba de Levene de calidad de varianzas	
		F	**Sig.**
APRENDIZAJE DELA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	**Se asumen varianzas iguales**	**2.429**	**0.133**
	No se asumen varianzas iguales		

De la tabla anterior se extrae el nivel de significancia de la Prueba de Levene, para comparar la varianzas, de acuerdo al cuadro se compara P-valor y α.

P-Valor = 0.133 > α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.133) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor >** α, Aceptamos la Ho, en tal sentido, **Las varianzas del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal de ambos grupos son iguales.**

- ✓ **Calculamos P-valor:** Como el resultado nos dice que las varianzas son iguales, usamos la primera fila de la tabla siguiente generado por el programa estadístico SPSS**.**

Tabla 20: Prueba T-Student para igualdad de medias de la hipótesis específica 2 del grupo control y experimental.

		prueba t para la igualdad de medias						
		t	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
							Inferior	Superior
APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	Se asumen varianzas iguales	-7.011	22	.000	-4.91667	.70128	-6.37103	-3.46230
	No se asumen varianzas iguales	-7.011	14.877	.000	-4.91667	.70128	-6.41248	-3.42085

P-valor: 0.000

5. **Realizamos la Prueba de T de Student**

Como se cumple los tres supuestos (normalidad, igualdad de varianza y P-valor) se puede calcular la T de Student para nuestra independientes en el programa estadístico SPSS.

Decisión estadística:

Criterios de decidir

- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor ≤ α, se rechaza la Hipótesis nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis alternativa (H_1)
- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor > α, no se rechaza la Hipótesis nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis nula (H_0)

P-Valor = 0.000 < α = 0.050

Interpretación:

como P-valor (0.000) es menor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis estadística alternativa (H_1) en la que nos dice que existe una diferencia significativa entre la media de calificaciones del aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión del sistema de numeración decimal del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test; en conclusión aceptamos la Hipostasis especifica 1 de nuestro trabajo de investigación en la que nos expresa: ***"Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014."***

c) **Hipótesis especifica 3:** Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

Prueba de hipótesis

1. **Redactamos la Hipótesis estadística:**

H_1 = **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

H_0 =. **No Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

2. **Determinar alfa (α)**

Alfa = 5% = 0,05

3. **Seleccionamos la prueba estadística**

La variable fija es de dos grupos; por lo tanto es un estudio transversal de muestras independientes, porque estamos evaluando y comparando dos grupos en un mismo momento; las calificaciones del aprendizaje de la matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal del post test del grupo experimental y control; la variable aleatoria es numérica por lo que utilizaremos una prueba paramétrica, específicamente utilizaremos la T de Student para muestra independientes.

4. **Realizamos la lectura de P-valor**

- ✓ **Normalidad:** se debe corroborar que la **variable aleatoria** en **ambos grupos** se distribuye normalmente. Para ello se utilizó la prueba de Shapiro Wilk, porque el tamaño de la muestra es < 50 sujetos. El criterio para determinar si la Variable aleatoria se distribuye normalmente es:

  c. **P-valor =>** α Aceptar la Ho = los datos provienen de una distribución normal.

d. **P-valor <** α Aceptar la H_1 = los datos **NO** provienen de una distribución normal.

Tabla 21: Pruebas de normalidad

APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN DE NOCIONES ADITIVAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	GRUPOS	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
	GRUPO CONTROL	.162	12	.200*	.938	12	.472
	GRUPO EXPERIMENTAL	.235	12	.066	.894	12	.131

a. Corrección de significación de Lilliefors

Se utiliza y se compara el nivel de significación (Sig.) de la tabla anterior en ambos grupos

P-Valor (grupo control) = 0.472 **>** α = 0.050

P-Valor (grupo experimental) = 0.131 **>** α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.472) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) para el grupo control y P-valor (0.131) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) para el grupo experimental, se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor =>** α Aceptamos la Ho, en tal sentido, **la variable puntaje del aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas en ambos grupos se comporta normalmente.**

Gráfico 15: Q-Q Normalidad del aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas para el grupo control.

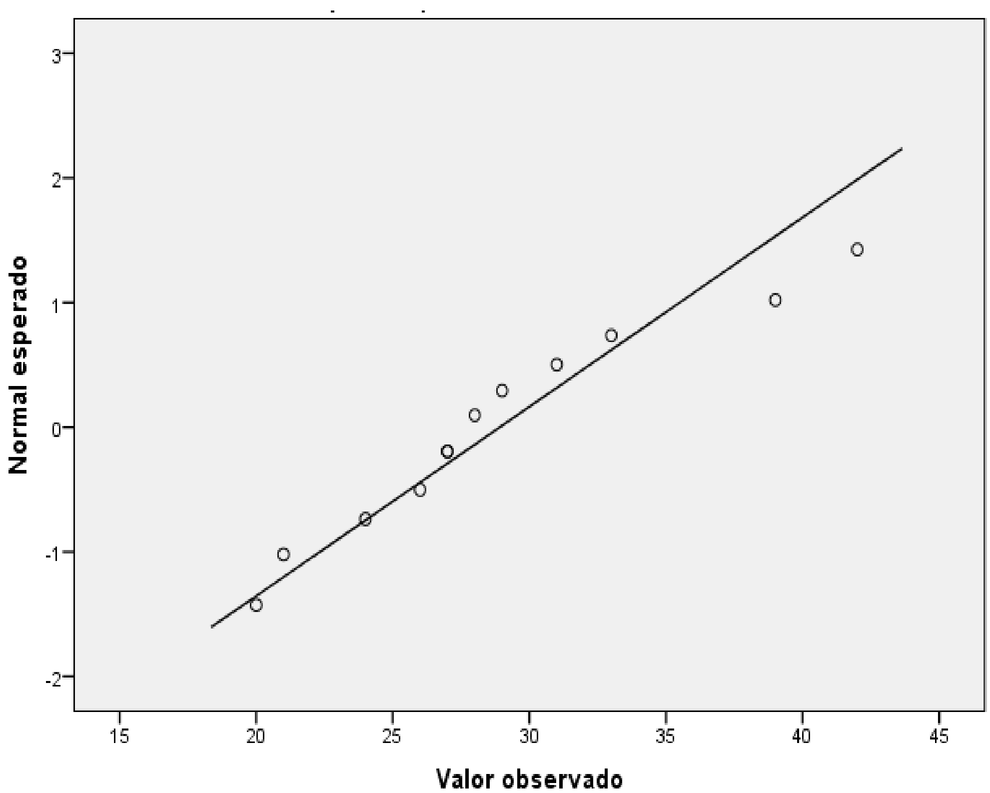


Gráfico 16: Q-Q Normal del aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas para el grupo experimental.

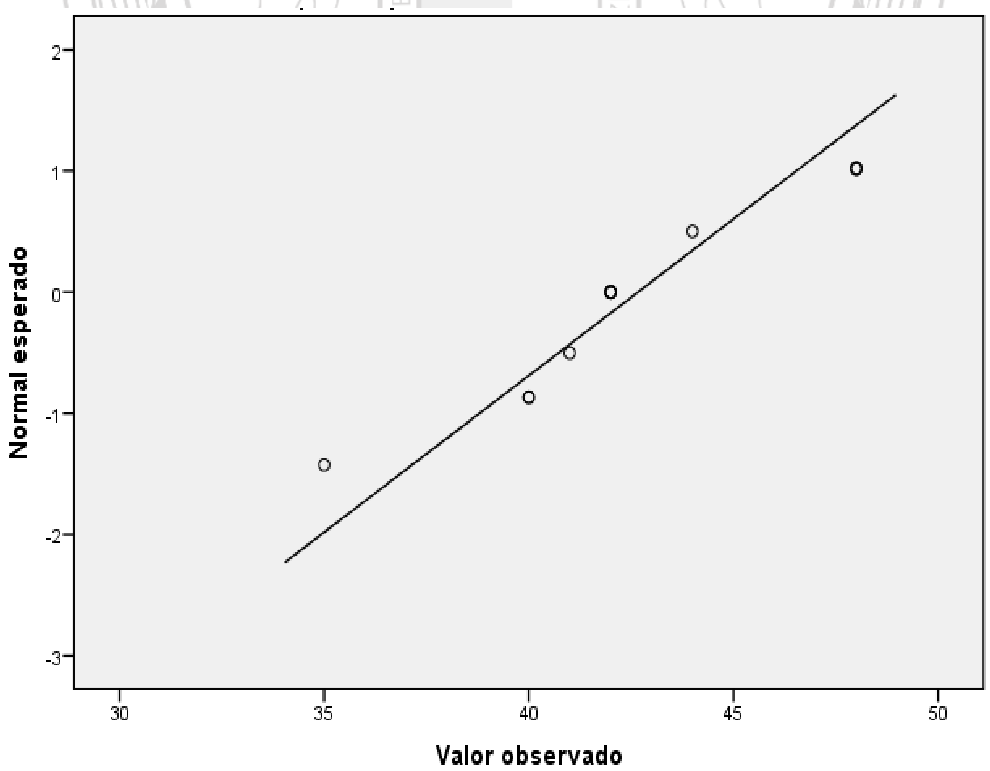
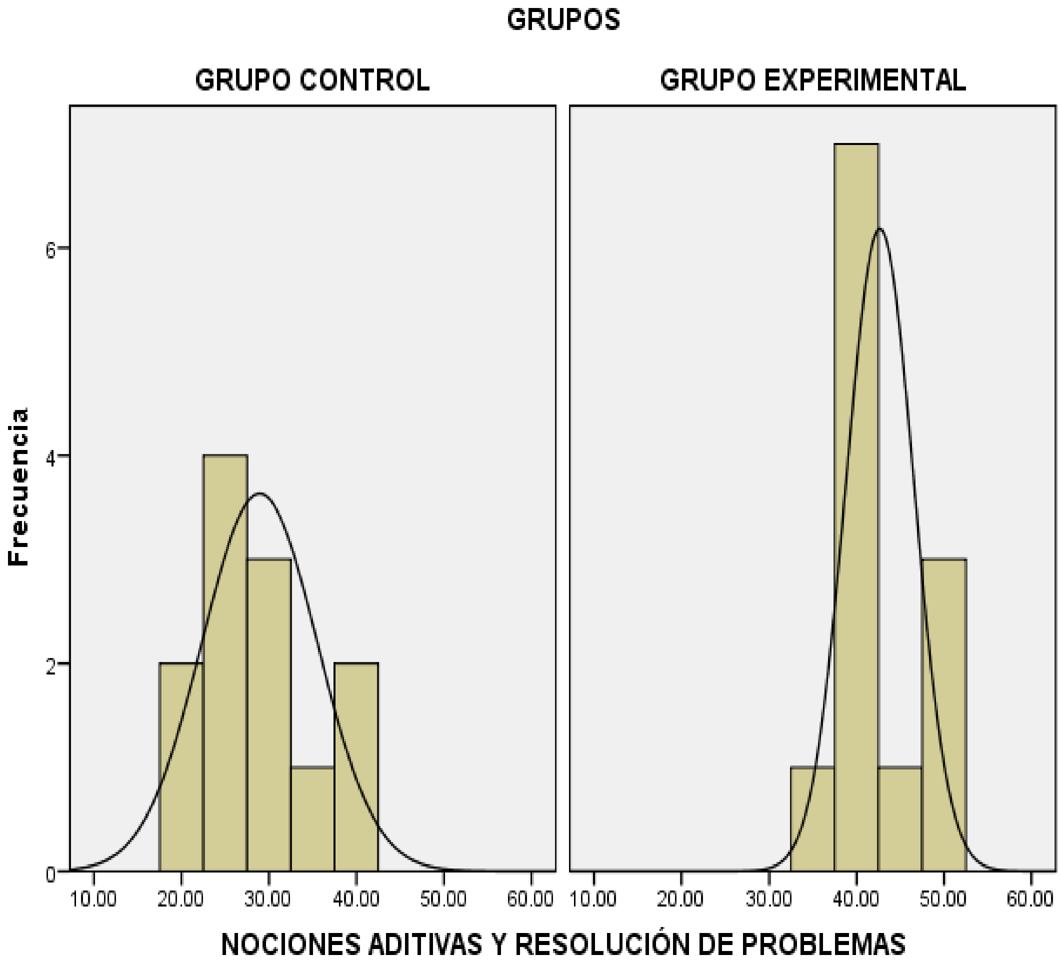


Gráfico 17: Histograma y curva de distribución del aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas para el grupo control y experimental.



INTERPRETACIÓN:

Los gráficos anteriores, nos muestra que los datos del grupo control y experimental siguen una distribución normal

- ✓ **<u>Igualdad de Varianza</u>:** (prueba de Levene). Se debe corroborar la igualdad de varianza

  e. P-valor => α Aceptar la Ho = las **varianzas** son **iguales**

  f. P-valor < α Aceptar la H_1 = existe **diferencia** significativa entre las **varianzas.**

Tabla 22: Prueba de Levene de calidad de varianzas de la variable aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas.

		Prueba de Levene de calidad de varianzas	
		F	**Sig.**
APRENDIZAJE DELA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN DE NOCIONES ADITIVAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.	**Se asumen varianzas iguales**	2.116	0.160
	No se asumen varianzas iguales		

De la **Tabla** 22 se extrae el nivel de significancia de la Prueba de Levene, para comparar la varianzas, de acuerdo al cuadro se compara P-valor y α.

P-Valor = 0.160 > α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.160) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor >** α, Aceptamos la Ho, en tal sentido, **Las varianzas del aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas de ambos grupos son iguales.**

- ✓ **Calculamos P-valor:** Como el resultado nos dice que las varianzas son iguales, usamos la primera fila de la tabla siguiente generado por el programa estadístico SPSS**.**

Tabla 23: Prueba T-Student para igualdad de medias de la hipótesis específica 3 del grupo control y experimental.

		prueba t para la igualdad de medias						
		t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
							Inferior	Superior
APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	Se asumen varianzas iguales	-6.237	22	.000	-13.75000	2.20465	-18.32216	-9.17784
	No se asumen varianzas iguales	-6.237	17.787	.000	-13.75000	2.20465	-18.38578	-9.11422

P-valor: 0.000

5. **Realizamos la Prueba de T de Student**

Como se cumple los tres supuestos (normalidad, igualdad de varianza y P-valor) se puede calcular la T de Student para nuestra independientes en el programa estadístico SPSS.

Decisión estadística:

Criterios de decidir

- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor ≤ α, se rechaza la Hipótesis nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis alternativa (H_1)
- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor > α, no se rechaza la Hipótesis nula (H_o), por lo que se acepta la Hipótesis nula (H_0)

P-Valor = 0.000 < α = 0.050

Interpretación

como P-valor (0.000) es menor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística nula (H_0), por lo que se acepta la Hipótesis estadística alternativa (H_1) en la que nos dice que existe una diferencia significativa entre la media de calificaciones del aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test; en conclusión aceptamos la Hipótesis especifica 3 de nuestro trabajo de investigación en la que nos expresa: ***"Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014."***

4.3.2 Contrastación y prueba de las hipótesis General.

Hipótesis General: Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.

Prueba de hipótesis

1. **Redactamos la Hipótesis estadística:**

   H_1 = **Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

H_0 =. **No Existe** una diferencia significativa entre la media de calificaciones aprendizaje de las matemáticas de problemas del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test.

2. **Determinar alfa (α)**

   Alfa = 5% = 0,05

3. **Seleccionamos la prueba estadística**

   La variable fija es de dos grupos; por lo tanto es un estudio transversal de muestras independientes, porque estamos evaluando y comparando dos grupos en un mismo momento; las calificaciones del aprendizaje de la matemáticas del post test del grupo experimental y control; la variable aleatoria es numérica por lo que utilizaremos una prueba paramétrica, específicamente utilizaremos la T de Student para muestra independientes.

4. **Realizamos la lectura de P-valor**

   ✓ **Normalidad:** se debe corroborar que la **variable aleatoria** en **ambos grupos** se distribuye normalmente. Para ello se utilizó la prueba de Shapiro Wilk, porque el tamaño de la muestra es < 50 sujetos. El criterio para determinar si la Variable aleatoria se distribuye normalmente es:

   a. **P-valor =>** α Aceptar la Ho = los datos provienen de una distribución normal.

   b. **P-valor <** α Aceptar la H_1 = los datos **NO** provienen de una distribución normal.

Tabla 24: Pruebas de normalidad

	GRUPOS	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	**gl**	**Sig.**	**Estadístico**	**gl**	**Sig.**
APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA	**GRUPO CONTROL**	0.188	12	0.200	0.892	12	0.125
	GRUPO EXPERIMENTAL	0.209	12	0.156	0.929	12	0.370

a. Corrección de significación de Lilliefors

Se utiliza y se compara el nivel de significación (Sig.) de la tabla anterior en ambos grupos

P-Valor (grupo control) = 0.125 **>** α = 0.050

P-Valor (grupo experimental) = 0.370 **>** α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.125) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) para el grupo control y P-valor (0.370) es mayor que el nivel de significancia (α = 0.050) para el grupo experimental, se rechaza la Hipótesis estadística alternativa (H_1), por lo que se acepta la Hipótesis estadística nula (Ho) en la que nos dice: si **P-valor =>** α Aceptamos la Ho, en tal sentido, **la variable puntaje del aprendizaje de la matemática en ambos grupos se comporta normalmente.**

GRAFICO N°

Gráfico 18: Q-Q Normal del aprendizaje de la matemática el grupo control.

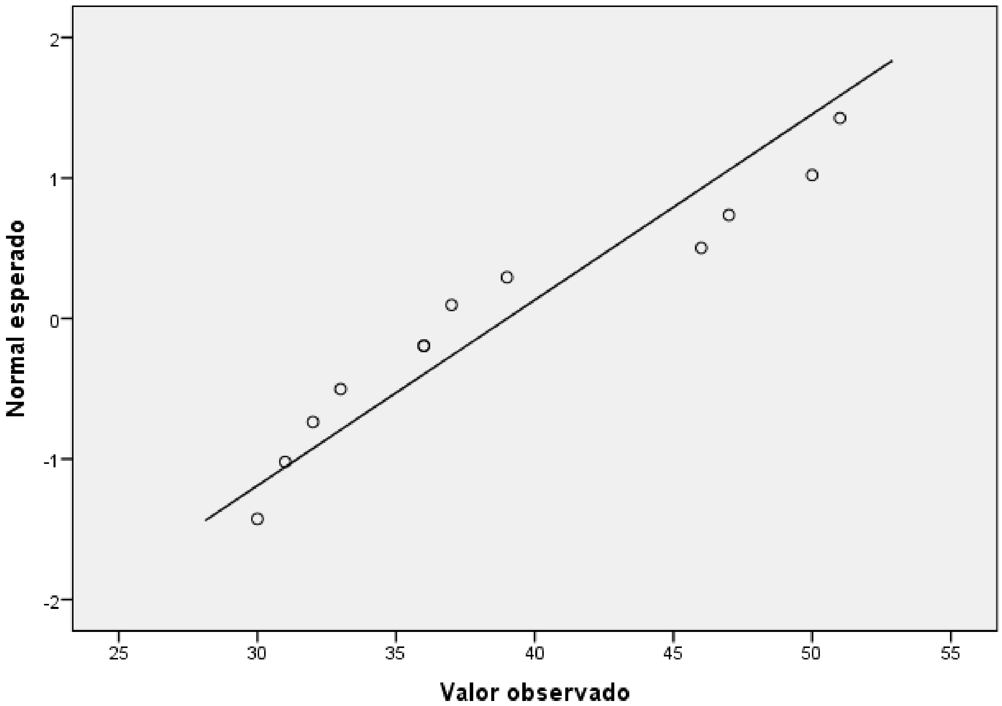


Gráfico 19: Q-Q Normal del aprendizaje de la matemática para el grupo experimental.

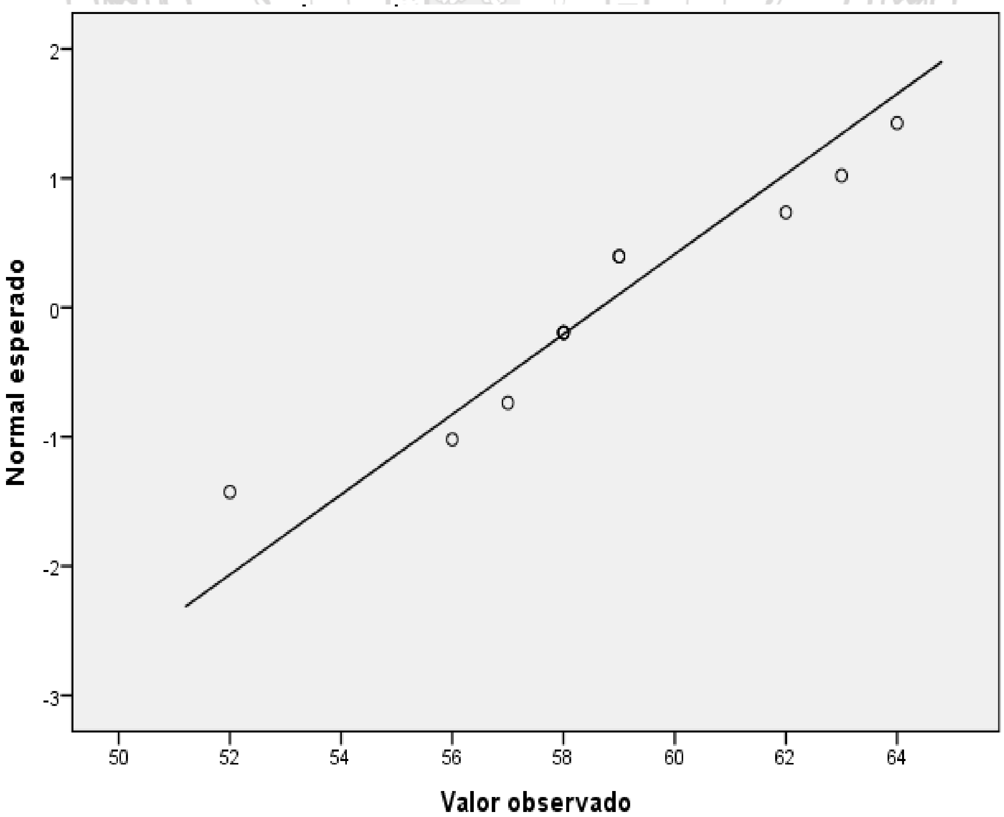
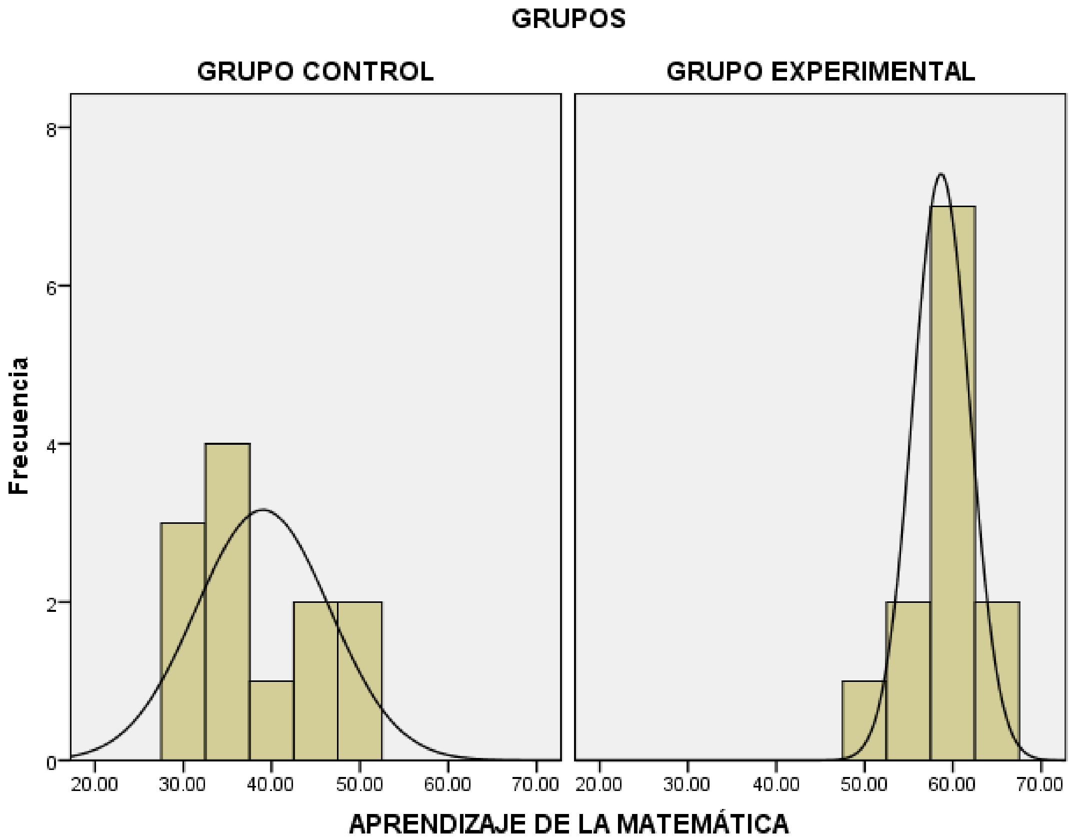


Gráfico 20: Histograma y curva de distribución del aprendizaje de la matemática para el grupo control y experimental.



INTERPRETACIÓN:

Los gráficos anteriores, nos muestra que los datos del grupo control y experimental siguen una distribución normal.

- ✓ **<u>Igualdad de Varianza</u>:** (prueba de Levene). Se debe corroborar la igualdad de varianza

  g. **P-valor =>** α Aceptar la Ho = las **varianzas** son **iguales**

  h. **P-valor <** α Aceptar la H_1 = existe **diferencia** significativa entre las **varianzas**

Tabla 25: Prueba de Levene de calidad de varianzas de la variable aprendizaje de la matemática.

		Prueba de Levene de calidad de varianzas	
		F	**Sig.**
APRENDIZAJE DELA MATEMÁTICA EN LA	**Se asumen varianzas iguales**	10.797	0.003
	No se asumen varianzas iguales		

De la tabla anterior se extrae el nivel de significancia de la Prueba de Levene, para comparar la varianzas, de acuerdo al cuadro se compara P-valor y α.

P-Valor = 0.003 < α = 0.050

INTERPRETACIÓN:

Como P-valor (0.003) es menor que el nivel de significancia (α = 0.050) se rechaza la Hipótesis estadística nula (H_0), por lo que se acepta la Hipótesis estadística alternativa nula (H_1) en la que nos dice: si **P-valor <** α, Aceptamos la H_1, en tal sentido, **Las varianzas del aprendizaje de la matemática de ambos grupos** existe **diferencia** significativa entre las **varianzas, es decir no son iguales.**

- ✓ **Calculamos P-valor:** Como el resultado nos dice que las varianzas no son iguales, usamos la segunda fila de la tabla siguiente generado por el programa estadístico SPSS**.**

Tabla 26: Prueba T-Student para igualdad de medias de la hipótesis general del grupo control y experimental..

		prueba t para la igualdad de medias						
		t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
							Inferior	Superior
APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA DIMENSIÓN COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	Se asumen varianzas iguales	-8.280	22	0.000	-19.66667	2.37517	-24.59246	-14.74087
	No se asumen varianzas iguales	-8.280	14.876	0.000	-19.66667	2.37517	-24.73290	-14.60044

P-valor: 0.000

5. **Realizamos la Prueba de T de Student**

Como se cumple los dos supuestos (normalidad y P-valor) se puede calcular la T de Student para nuestras independientes con varianzas desiguales en el programa estadístico SPSS.

Decisión estadística:

Criterios de decidir

- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor ≤ α, se rechaza la Hipótesis nula (H_0), por lo que se acepta la Hipótesis alternativa (H_1)
- ✓ Si la probabilidad obtenida P-valor > α, no se rechaza la Hipótesis nula (H_0), por lo que se acepta la Hipótesis nula (H_0)

P-Valor = 0.000 < α = 0.050

Interpretación:

como P-valor (0.000) es menor que el nivel de significancia ($\alpha = 0.050$) se rechaza la Hipótesis estadística nula (H_0), por lo que se acepta la Hipótesis estadística alternativa (H_1) en la que nos dice que existe una diferencia significativa entre la media de calificaciones del aprendizaje de la matemática del grupo experimental del Post Test y la media de calificaciones del grupo control del post test; en conclusión aceptamos la Hipótesis General de nuestro trabajo de investigación en la que nos expresa: ***"Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014."***

CAPITULO V

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos en la presente investigación comprueban lo planteado en la hipótesis general: "***Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014***." Ya que se evidencia la efectividad del Método Singapur en el incremento del nivel de logro en el aprendizaje de la matemática en los grupos experimentales con diferencias estadísticamente significativas frente a al grupo control.

Los datos presentados por los diferentes grupos en el momento del pre test corroboran los datos emitidos por el MINEDU, mediante el informe de las ECE – 2011, 2012 y 2013, donde se halló un bajo nivel de logro en los estudiantes de segundo grado de educación primaria; así como también, se determinó que los estudiantes de la institución educativa privada presentaron un mejor nivel de logro que los de la institución educativa estatal.

Por otro lado, los resultados obtenidos nos permiten contrastar parcialmente nuestra primera hipótesis específica, pues, en el momento de aplicar el pre test, el grupo experimental difiere del grupo control. Se observa que efectivamente el Método Singapur es efectivo en aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número, puesto que los niños(as) obtuvieron un mejor desempeño.

Con respecto a la segunda hipótesis específica, se confirma que al aplicar el post test, el grupo experimental tuvo mayor nivel en comparación del grupo control. Se observa que efectivamente el Método Singapur es efectivo porque desarrolló y mejoró el aprendizaje de la matemática en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal, puesto que los niños(as) obtuvieron un mejor desempeño.

En la tercera hipótesis específica, se confirma que al aplicar el post test, el grupo experimental tuvo mayor nivel comparación del grupo control. Se observa que efectivamente el Método Singapur es efectivo porque desarrolló y mejoró el aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas, puesto que los niños(as) obtuvieron un mejor desempeño

Según los resultados se encontró que los puntajes de la evaluación del aprendizaje de la matemática de los niños en el grupo control resultaron muy parecidos. Asimismo, en el post test se observa un puntaje mayor en los resultados del grupo experimental, lo cual evidencia de manera exploratoria un cambio significativo por efectos del Método Singapur

Se determinó que existen diferencias significativas (p - valor=*0.00 < 0.05) en el puntaje de la evaluación del aprendizaje de la matemática en los niños (as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL en el pre-test y pos-test.

Se observa que no existen diferencias significativas en el grupo control en el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número, al 95% de confianza. Se observa también que existen diferencias estadísticamente significativas (p-valor=*0.00 < 0.05) en el grupo experimental en el aprendizaje de la matemática en la dimensión comprensión y uso del número, al 95% de confianza.

En esa misma línea de ideas, se observa que no existen diferencias significativas en el grupo control en el aprendizaje de la matemática en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal, al 95% de confianza. Se observa también que existen diferencias estadísticamente significativas (p-valor=*0.00 < 0.05) en el grupo experimental en el aprendizaje de la matemática en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal, al 95% de confianza.

Se puede determinar que no existen diferencias significativas en el grupo control en el aprendizaje de la matemática en la dimensión nociones aditivas y resolución de problemas, al 95% de confianza. Se observa también que existen diferencias estadísticamente significativas (p-valor=*0.00 < 0.05) en el grupo experimental en el aprendizaje de la matemática en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas, al 95% de confianza. Como se ve el bajo nivel del grupo control en la resolución de problemas se debe que en las escuela hay una preponderancia exageras del uso del algoritmo y su aprendizaje mecánico, tal como refiere Carpenter y Moser que fue citado por Castro

Martinez, Rico Romero, & Castro Martinez (1996) sobre el aprendizaje que deben realizar los niños sobre la estructura aditiva y la resolución de problemas:

> **"*el concepto de estructura aditiva, del cual la adición y la sustracción son sus ejemplo más elementales, subyace en una gran parte de la matemática y se desarrolla sobre un extenso periodo de tiempo. La transición desde los recuentos informales y el modelado de estrategias que los niños realizan al margen de su instrucción formal, hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la adición y sustracción, es una etapa crítica en el aprendizaje de las matemáticas en los niños, y aún más, algunas de las dificultades posteriores en matemáticas pueden señalarse en la instrucción inicial de la suma y resta*" (p.139)**

La forma en que se deben realizar las operaciones básica de una manera amena lo expresan Pérez Gómez, Peña Ramos, Cruz Rodríguez, Chacón Sotelo (2005) en su tesis titulada la enseñanza de la suma y la resta en profesores de primero, segundo y tercer grado de educación primaria afirma que **"**Los niños son expuestos a situaciones o ejercicios representados a modo de narración oral, escrita, gráfica, con dibujos o de manera concreta; por otro lado, algunos son estimulados a utilizar diferentes formas de representarlos. Estos dos aspectos se complementan y permiten a los niños aprender a desarrollar estrategias más flexibles para la resolución de problemas muy diversos de matemáticas.**",** dicha experiencia sigue los mismos postulados del Método Singapur.

También coincidimos con por lo expresado por Baroody (1988), en que el cálculo y el uso del algoritmo sigue en nuestras escuelas:

> **«Se exige que los niños memoricen datos, definiciones, procedimientos de cálculo, técnicas de medición, etc. Cuando los recursos son limitados y las clases grandes, la enseñanza y la práctica repetitiva de datos y técnicas son más manejables que el fomento del conocimiento conceptual y la aptitud para el razonamiento. Por ejemplo, enseñar paso a paso el algoritmo para la sustracción de números de varias cifras con acarreos resulta más fácil que construir la red de relaciones que constituye el conocimiento de los órdenes de unidades. Más aún, el conocimiento de datos y técnicas es más fácil de observar y comprobar que el conocimiento conceptual o la capacidad de razonamiento. Como el cultivo y la evaluación de la comprensión matemática, el razonamiento y la resolución de problemas son difíciles, la educación masiva se centra en la enseñanza y la evaluación de datos y técnicas matemáticas.» (p. 55**

En esa misma línea de concepto, coincidimos sobre el error que cometemos al definir y utilizar el algoritmo, tal como lo afirma Pearla Nesher (1986), citado por Gómez Alonso (1998), en la que expresa:

> **«Es un error creer que un algoritmo necesariamente describe una operación aritmética. Hoy en día, con el extendido desarrollo y uso de los ordenadores, la importancia de los algoritmos va más allá del dominio de las propias matemáticas. Instrucciones para cómo manejar una lavadora, o como prepara un pastel pueden servir, también, como ejemplos de algoritmos.»**

Los resultados obtenidos confirman que los estudiantes del grupo experimental, en su mayoría, han interiorizado las fases o momentos propuestos por Bruner y que fue recogido por el Método Singapur, por lo que confirmamos la idea se basa de los modos de representación de Bruner (1984):

> ***"Estos tres modos son, como se dijo, la representación enactiva, la representación icónica y la representación simbólica: conocer algo por medio de la acción, a través de un dibujo o una imagen y mediante formas simbólicas como el lenguaje".***

Siguiendo la línea de Polya (1974), las cuales se trabajaron durante la ejecución del Método Singapur. En la primera fase los estudiantes comprendieron el problema mediante preguntas, segmentando el enunciado y reformulando el problema, Polya (1974) . En la segunda fase los estudiantes diseñaron o adaptaron una estrategia, seleccionando una o más estrategias: actuar, graficar, operar, modificar y ensayar respuestas, cuya nominalización favoreció su interiorización. Al ejecutar su plan comprobaron sus hipótesis y aplicaron reajustes si la situación lo requirió. Finalmente, revisaron el trabajo realizado consolidando sus conocimientos. Por los que coincidimos con lo obtenido por Elichiribehety , Rita Otero y de los Ángeles, (2001). En su tesis titulada los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversa; en la que afirma que "un porcentaje elevado de sujetos intenta algún tipo de solución, orientado por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado, independientemente del año escolar al que pertenecen, y los marcos de resolución adoptados son las manifestaciones externas de las representaciones mentales internas que los sujetos construyen para comprender y resolver; además en todos los segmentos de la escolaridad considerados, los alumnos construyen modelos mentales relacionados con procedimientos algebraicos y/o aritméticos.” En esa misma línea de ideas la investigación de Jara Abunda (2010) en su tesis titulada Modelos de Interacción como Estrategia Metodológica en la Resolución de Problemas para el Aprendizaje de la Matemática en los alumnos del 6to. Grado de Educación Primaria, en las Instituciones Educativas Estatales, UGEL N° 1, San Juan de Miraflores, confirma nuestros resultados obtenidos en nuestra tesis, ya que afirman que “los modelos de resolución de problemas: normativo, iniciativo, aproximativo, Polya, y Guzmán ayudan al aprendizaje de los contenidos del área Matemática”, también coincidimos con Postijo Remache en su trabajo de investigación titulada “El Método del conjunto básico en el desarrollo de la lógica matemática en niños de 6-7 años de edad en las Instituciones Educativas Públicas de la provincia de Huánuco ” en la que luego de un largo proceso de adquisición de esquemas mentales por la resolución de problemas se confirma que: “(…) los ejercicios operatorios inducen a la adquisición de la noción de imagen, idea y concepto de números naturales a partir de la observación viva de los elementos…” es decir del paso de lo concreto a lo abstracto.

El uso de material concreto en el Método Singapur fue muy significativo ya que ayudó a los niños a ubicarse del nivel concreto al abstracto en su proceso de aprendizaje de la matemática, tal como refiere Cockroft (1985) en su informe titulado “las matemáticas si cuentas”. Así mismo, los estudiantes de los grupos experimentales lograron hacer transferencias de las secuencias y estrategias aprendidas a nuevas situaciones tal como lo sustentan.

En cuanto a los grupos control se observa un incremento también en su nivel de logro de resolución de problemas, pero siempre menor a los grupos experimentales, lo que se debería a que completaron el currículo asignado al área de matemática, así como también al énfasis que se le da a este grado debido a las evaluaciones censales.

Finalmente podemos coincidir con Martínez Ortiz (1997) en su tesis titulada Mitos y realidades en el aprendizaje de las matemáticas: una experiencia en educación primaria en la que afirma “que es evidente la necesidad de motivar a los docentes para que se capaciten verdaderamente en lo postulado por el nuevo enfoque de la modernización educativa; de lo contrario, todo el trabajo hecho habrá sido en vano”

CONCLUSIONES.

1. Se demostró que existen diferencias significativas entre (p-valor=0.000 < α= 0.05) de la prueba T de Student, en ese sentido se determinó el efecto del Método Singapur en la que desarrolló y mejoró el aprendizaje de las matemáticas en los niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, con la comparación del pos-test del grupo experimental y grupo control, por lo que aceptamos la hipótesis General de la investigación en la que nos expresa: ***"Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014."***
2. Se determinó que existen diferencias significativas entre (p-valor=0.018 < α= 0.05), en ese sentido se determinó el efecto del Método Singapur en la que desarrolló y mejoró el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en los niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, con la comparación del pos-test del grupo experimental y grupo control, por lo que aceptamos la hipótesis especifica 1 de la investigación en la que nos expresa: ***"Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en los niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014."***
3. Se determinó que existen diferencias significativas entre (p-valor=0.000 < α= 0.05) de la prueba T de Student, en ese sentido se determinó el efecto del Método Singapur en la que desarrolló y mejoró el aprendizaje de las

matemáticas en la dimensión de comprensión y uso del número en los niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, con la comparación del pos-test del grupo experimental y grupo control, por lo que aceptamos la hipótesis especifica 2 de la investigación en la que nos expresa: ***“Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de comprensión del sistema de numeración decimal en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.”***

4. Se determinó que existen diferencias significativas entre (p-valor=0.000 < α= 0.05) de la prueba T de Student, en ese sentido se determinó el efecto del Método Singapur en la que desarrolló y mejoró el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión *de nociones aditivas y resolución de problemas* en los niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL, con la comparación del pos-test del grupo experimental y grupo control, por lo que aceptamos la hipótesis especifica 3 de la investigación en la que nos expresa: ***“Si aplicamos el método Singapur, entonces; se desarrollará y potenciará el aprendizaje de las matemáticas en la dimensión de nociones aditivas y resolución de problemas en niños(as) del segundo grado de primaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL – 2014.”***

SUGERENCIAS.

1. La Universidad por medio de sus facultades y departamentos académicos debería promover la aplicación del método Singapur, a nivel de Pre grado para que los alumnos, a través de sus prácticas pedagógicas puedan experimentar el valor pedagógico de dicho método, de esta manera contribuir en la construcción del conocimiento matemático en los niños.
2. Realizar un seguimiento sobre el nivel de logro en el aprendizaje de la matemática de los alumnos que participaron de esta investigación.
3. Los profesores de aula deben crear situaciones didácticas e introducir en ellas el Método Singapur, para que sus alumnos desarrollen habilidades matemáticas a partir de realidades problemáticas de su entorno.
4. Replicar la presente investigación en otras facultades de la Universidad Nacional de Educación, así como en el magisterio nacional tanto en zonas urbano-marginales. como en rurales, a fin de lograr generalizar los resultados de la aplicación del método Singapur.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Ausubel, D., Novak, J. D., & Hanesian, H. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva.* Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Ban Har, J. (2012). *Seminario de Matemática Singapur en Chile.* Obtenido de http://www.banhar.com/presentations.html.

Baquero, R. (1996). *Vigotsky y el aprendizaje escolar.* Buenos Aires: Aique.

Baquero, R. (1998). Tensiones y paradojas en el uso de la teoría socio-histórica en educación. En M. Carretero, J. A. Castorina, & R. Baquero, *Debates constructivistas* (págs. 141-150). Buenos Aires: Aique.

Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Visor.

Bermejo, V. (2004). *Como enseñar matemática para aprender mejor.* Alcalá-Madrid, España: Editorial CCS.

Bouvier, A., & George, M. (1984). *Diccionario de Matemática. .* (M. Armiño, & V. Bordoy, Trads.) Akal Editores.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, I. Saiz, & 1 (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (págs. 66-94). Buenos Aires: Paidos.

Bruner, J. (1984). *Acción, Pensamiento y Lenguaje.* Madrid: Alianza Editorial.

Bruner, J. (1999). *Educación puerta de la cultura.* Madrid: Editorial Aprendizaje Visor.

Bruner, J. (2009). *Acto de significado: Más alla de la revolución cognitiva.* (J. Gómez Crespo, & J. Luis Linaza, Trads.) Madrid, España: Alianza Editorial.

Castorina, J. A. (2000). *La teoría Psicogenética del aprendizaje y la práctica educativa. Propuestas psicopedagógicas para el año 2000.* Buenos Aires: FADIP.

Castro Martinez, E., Rico Romero, L., & Castro Martinez, E. (1996). *Números y operaciones: fundamento para una aritmética escolar.* Sintesis .

Castro, E. (2008). *Didáctica de la matemática en la educación Primaria.* Madrid, España: Síntesis.

Chamorro, M., Belmonte Gómez, J. M., Llinares, S., Ruiz Higueras, M. L., & Vecino Rubio, F. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* Madrid: Pearson Prentice Hall.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas si cuentan.* Ministerio de Educación y Ciencia de España. Madrid: GREFOL.

Cordano, M. (26 de Marzo de 2012). *Lee Sing Kong, director del Instituto Nacional de Educación de Singapur: El buen trabajo en la sala de clases es algo que debe celebrarse. Diario El Mercurio*. Obtenido de Centro de Investigación Avanzada en Educación. Universidad de Chile: http://www.ciae.uchile.cl/index.php?page=view_noticias&id=190

De Guzmán Ozámiz, M. (17 de setiembre de 2014). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Obtenido de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#4.5

Dienes Zoltan, P., & Golding E., W. (1970). *Los primeros pasos en matemáticas: Lógica y juegos lógicos* (4 ed.). (M. Deschamps Bonet, Trad.) Barcelona: Teide.

Dolle, J.-M. (2009). *Para comprender a Jean Piaget* (2 ed.). (M. Carrillo, Trad.) México: Trillas.

Espeleta Delgado, V., & Castillo Alfaro, T. (2003). *La matemática: su enseñanza y aprendizaje* (1 ed.). San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia. Obtenido de https://books.google.com.pe

Flavell, J. H. (1996). *El desarrollo cognitivo.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Gadino, J. (2003). *Marco teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Obtenido de Documento de trabajo del curso de doctorado "teoría de la educación matemática.: http://www.ugr.es/local/jgodino

Gaonac'h, D., & Golder, C. (2005). *Manual de psicología para la enseñanza* (1 ed.). México: Siglo XXI.

Garcia Cruz, J. A. (18 de junio de 2014). *Didáctica de la matemática: Una visión General*. Obtenido de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm#resol

Ginsburg, H., & Opper, S. (1981). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual.* Madrid: Prentice Hall International.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. .* Obtenido de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros

Gómez Alonso, B. (1998). *Numeración y cálculo.* Madrid, España: Síntesis.

Gómez Chacon, I. M. (2008). *Matemática Emocional: los afectos en el aprendizaje matemático* (2 ed.). Madrid, España: Narcea. S.A.

Good, T., & Brophy, J. (1995). *Psicología educativa contemporánea.* México D. F.: McGrawHill. Obtenido de (1995). Psicología Educativa Contemporánea. McGrawHill.

Good, T., & Brophy, J. (1995). *Psicología educativa contemporánea.* México. D. F.: McGrawHill.

Gregorio Guirles, J. (2004). El cálculo en el primer ciclo de primaria. *SIGMA*(25), 71-97.

Gutiérrez, Á. (2005). *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática.* Madrid, España: Síntesis.

Hernández Pina, F., & Soriano Ayala, E. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria: una experiencia didáctica.* Murcia, España: Servicio de publicación de la Universidad de Murcia. Obtenido de https://books.google.com.pe

Holloway, G. (1982). *Concepción del espacio en el niño según Piaget.* Barcelona: Paidos.

Kamii, C., & Devries, R. (1983). *El mundo físico en la educación pre escolar. Implicancias de la teoría de Piaget* (1 ed.). (J. C. Navascués Howard, Trad.) Madrid, España: Siglo XXI.

Kuhn, T. (1972). *La estructura de las revoluciones científicas.* Barcelona: Arial.

Lerner, D., & Patricia, S. (1994). El sistema de numeración: un problema didactico. En C. Parra, I. Saiz, L. A. Santaló, G. Gálvez, R. Charnay, G. Brousseau, . . . P. Sadovsky, *Didactica de matemáticas: aportes y reflexiones* (págs. 95-184). Paidos.

Lovell, K. (1999). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños* (7 ed.). Madrid, España: Morata.

Martín Bravo, C. (2009). *Psicología del desarrollo para docentes.* Madrid: Pirámide.

Martínez, R., & Otros. (2004). Matemáticas: Cultura y aprendizaje. (16), 18-25.

Ministerio de Educación. (2009). *Diseño curricular de Educación Básica Regular.* Lima: Bruño.

Ministry of Education of Singapore. (2007). *Mathematics Syllabus (Primary). Singapore: Curriculum Planning and Development Division*. Obtenido de http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2007.pdf [traducción de Google].

Morales, N. (19 de diciembre de 2013). *Implementación del Método Singapur: Una experiencia del profesorado de Primer Ciclo Básico de una Escuela Municipal*. Obtenido de http://abs.docsread.com/docs/index-11212.html.

Newman, D., Griffin, P., & Cole, M. (1991). *La zona de construcción del conocimiento.* Madrid: Morata.

Núñez Espallargas, J., & Font Moll, V. (Enero - Abril de 1995). Aspectos ideológico en la contextualización de las matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de educación*(306), 293-314. Obtenido de https://books.google.com.pe

Parra, C., & Saiz, I. (2009). *Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio.* Santa Fe, Argentina: Ediciones HomoSapiens.

Piaget, J. (1965). *La construcción de lo real en el niño.* Buenos Aires, Argentina: Proteo.

Piaget, J. (1972). *Psicología y pedagogía.* Barcelona: Ariel.

Piaget, J. (1973). Causalidad y operaciones. En J. Piaget, & R. García, *Las explicaciones causales* (E. R. Póliza, Trad., 1 ed., págs. 15-178). Barcelona, España: Barral Editores.

Piaget, J. (1976). *Seis estudios de psicología* (7 ed.). Barcelona: Barral.

Piaget, J. (1990). *El nacimiento de la inteligencia.* Barcelona: Crítica.

Piaget, J. (1999). *Psicologia de la inteligencia.* (J. C. Foix, Trad.) Barcelona: Critica.

Piaget, J., & Inhelder, B. (2007). *Psicología del niño* (17 ed.). Madrid, España: Morata S. L.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* (J. Zugazagoitia, Trad.) México. D. F.: Trillas.

Posada Díaz, Á., Gómez Ramírez, J. F., & Ramírez Gómez, H. (2005). *El niño sano* (3 ed.). Bogota, Colombia: Médica Internacional Panamericana. Obtenido de https://books.google.com.pe

Pozo, J. I. (2006). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Morata.

Ribes Antuña, M. D., Ales Reina, M., Clavijo Gamero, R., & Fernández Gonzáles, C. (2006). *Tecnicos de Educacion Infantil de la Comunidad de Extremadura.* (1 ed., Vol. 1). Sevilla, España: Mad S.L. Obtenido de https://books.google.com.pe

Richmond, P. (2000). *Introducción a Piaget* (15 ed.). (I. Álvarez Bara, Trad.) Madrid, España: Fundamentos. Obtenido de https://books.google.com.pe

Sales, J. (2000). Pedro Puig Adam, maestro. *Suma*(34), 9-20.

Sanchez Carlessi, H. (1998). *Metodología y diseño en la investigación científica.* Lima: Mantaro.

Sánchez, J. C., & Fernández, J. A. (2005). *La enseñanza de la Matemática: Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicos.* Madrid, España: Editorial CCS.

Schoenfeld, A. H. (1996). La enseñanza del pensamiento. En l. B. Resnick, & L. Klopper.

Segovia Alex, I., & Rico Romero, L. (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria.* Madrid, España: Pirámide.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de la matemática.* Madrid, España: Morata.

Tran, T. (1981). *Los estadios del niño en la psicología evolutiva. Los sistemas de Piaget. Wallon. Gesell y Freud. Madrid.* Madrid: Pablo del Río.

Unidad de Medición de Calidad. (2013). *Informe a los docentes de la Evaluación censal a alumnos del segundo grado de primaria.* Ministerio de Educación, Lima.

Vigotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* México: Grijalbo.

Vygotski, L. S. (1993). *Pensamiento y lenguaje.* Madrid: Visor.

Zubiría Remy, H. D. (2004). *El constructivismo en los procesos de enseñanza - aprendizaje en el siglo XXI.* México, D.F.: Plaza y valdes editores.

ANEXOS

ANEXOS

ANEXO Nº 1

Resultados de la prueba piloto.

ANEXO Nº 2

Consolidado de los resultados del pre-test y pos-test del grupo control.

ANEXO Nº 3

Consolidado de los resultados del pre-test y postest del grupo experimental.

ANEXO Nº 4

Prueba de Evaluación Censal del segundo grado de primaria.

ANEXO Nº 5

Programación del Método Singapur.

ANEXO Nº 6

Cuaderno de trabajo del Método Singapur para los alumnos.

ANEXO Nº 7

Documentos administrativos

ANEXO Nº 8

Fotografías.

ANEXO 1
Resultados de la prueba piloto. (Test)

	CUADERNILLO 1																					CUADERNILLO 2																					TOTAL
N°	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	
1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	3	3	3	0	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	2	1	1	2	2	2	2	2	1	60
2	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	20
3	1	1	1	2	1	1	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	0	2	2	2	1	62
4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8
5	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
6	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	27
7	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
8	1	1	1	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	26
9	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
10	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6
11	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	2	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	24
12	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9
13	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	21
14	1	1	0	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	25
15	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
17	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8
18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
19	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	22
20	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8
21	1	1	1	2	1	1	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	64
22	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
23	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	9

Resultados de la prueba piloto. (Re-Test)

	CUADERNILLO 1																					CUADERNILLO 2																					TOTAL
N°	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	
1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	2	1	1	2	2	2	2	2	1	62
2	1	0	1	0	1	1	1	2	1	0	0	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	22
3	1	1	1	2	1	1	0	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	0	2	2	2	1	61
4	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9
5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
6	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	26
7	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
8	1	1	1	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	26
9	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
10	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6
11	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	2	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	24
12	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11
13	1	1	1	0	1	1	1	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	23
14	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	24
15	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
17	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9
18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
19	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	22
20	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
21	1	1	1	2	1	1	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	64
22	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8
23	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8

ANEXO Nº 2

Consolidado de los resultados del pre-test y pos-test del grupo control

N°	Comprensión y uso del número.					Comprensión del sistema. de numeración decimal								
	CUAD. 1		CUAD. 2		PUNTAJE	CUADERNILLO 1			CUADERNILLO 2					PUNTAJE
	P5	P6	P5	P6		P17	P18	P19	P8	P11	P14	P16	P20	
	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	2	14
1	1	0	1	0	2	0	2	1	2	2	1	2	2	12
2	0	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	0	0	4
3	1	0	0	0	1	0	2	1	2	2	0	0	0	7
4	0	0	0	0	0	2	2	1	2	0	1	0	0	8
5	1	1	1	1	4	2	0	0	2	2	1	0	0	7
6	1	0	0	1	2	2	2	0	0	0	1	0	0	5
7	1	1	0	0	2	2	0	1	0	2	1	2	2	10
8	1	1	0	0	2	2	0	1	0	0	1	0	0	4
9	1	0	0	0	1	2	0	1	0	0	1	0	2	6
10	1	0	0	0	1	2	2	1	0	0	1	2	0	8
11	1	1	1	1	4	2	2	0	0	2	1	2	0	9
12	0	1	0	0	1	2	2	1	2	2	1	0	0	10

ANEXO Nº 2 (continuación)

Pre test

N°	Nociones aditivas y resolución de problemas																															PUNTAJE
	CUADERNILLO 1																CUADERNILLO 2														TOTAL	
	P1	P2	P3	P4	P7	P8	P8	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P20	P21	P1	P2	P3	P4	P7	P9	P10	P12	P13	P15	P17	P18	P19	P21		TOTAL
	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	**66**
1	1	1	1	0	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	2	1	0	0	1	2	2	0	1	27	**41**
2	1	1	1	2	0	2	0	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	21	**26**
3	1	1	0	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	0	1	1	1	1	2	1	2	0	1	0	0	0	1	25	**33**
4	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	2	2	2	1	38	**46**
5	1	1	1	2	1	0	0	0	0	0	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	2	1	0	0	1	2	0	0	1	26	**37**
6	1	1	1	2	1	0	1	0	0	0	2	2	0	1	2	2	0	1	1	1	1	2	1	2	0	1	0	0	0	1	27	**34**
7	1	1	1	2	1	2	1	3	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	0	0	1	2	0	0	1	34	**46**
8	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	2	1	0	2	0	1	30	**36**
9	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	0	0	1	28	**35**
10	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	27	**36**
11	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2	1	31	**44**
12	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	0	0	0	1	27	**38**

ANEXO Nº 2

Post test.

Comprensión y uso del número.						Comprensión del sistema. de numeración decimal								
N°	CUAD. 1		CUAD. 2		PUNTAJE	CUADERNILLO 1			CUADERNILLO 2					PUNTAJE
	P5	P6	P5	P6		P17	P18	P19	P8	P11	P14	P16	P20	
	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	2	14
1	1	0	1	1	3	2	2	1	0	2	1	2	2	12
2	1	0	0	1	2	2	0	1	0	0	1	2	0	6
3	0	0	1	0	1	0	2	1	2	2	1	0	0	8
4	1	0	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	2	8
5	1	1	1	1	4	2	2	1	2	0	0	0	0	7
6	1	0	0	1	2	2	2	1	2	0	0	0	0	7
7	1	1	0	0	2	0	2	1	2	2	0	2	0	9
8	1	1	1	0	3	2	0	1	0	0	1	0	0	4
9	1	0	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	2	8
10	1	0	1	0	2	2	2	1	0	0	1	2	0	8
11	1	1	0	0	2	2	2	1	2	2	1	2	0	12
12	1	0	0	0	1	2	2	1	0	2	1	0	0	8

(continuación)

Post test.

N°	Nociones aditivas y resolución de problemas																															PUNTAJE
	CUADERNILLO 1																CUADERNILLO 2														TOTAL	
	P1	P2	P3	P4	P7	P8	P8	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P20	P21	P1	P2	P3	P4	P7	P9	P10	P12	P13	P15	P17	P18	P19	P21		**TOTAL**
	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	**66**
1	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	2	0	1	1	1	1	1	2	1	0	0	1	2	2	0	1	31	46
2	1	1	1	2	1	2	0	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	2	0	0	1	24	32
3	1	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0	2	1	1	0	0	0	1	1	1	1	2	1	2	0	1	0	0	0	1	21	30
4	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	42	51
5	1	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	2	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	2	0	0	0	20	31
6	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	0	0	1	0	2	0	1	1	1	1	2	1	2	2	1	0	0	0	1	27	36
7	1	1	1	2	1	2	1	3	3	0	2	0	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	2	2	0	1	39	50
8	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	2	2	0	1	26	33
9	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	0	0	0	1	28	37
10	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	0	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	0	0	2	0	0	0	2	1	29	39
11	1	1	0	0	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	0	0	0	1	33	47
12	1	1	1	2	1	2	1	3	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	2	0	0	0	0	0	1	27	36

ANEXO Nº 2

Consolidado de los resultados del pre-test y pos-test del grupo experimental

Pre test

	Comprensión y uso del número.					Comprensión del sistema. de numeración decimal								
N°	CUAD. 1		CUAD. 2		PUNTAJE	CUADERNILLO 1			CUADERNILLO 2					PUNTAJE
	P5	P6	P5	P6		P17	P18	P19	P8	P11	P14	P16	P20	
	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	2	14
1	1	1	0	0	2	2	0	0	0	2	1	2	0	7
2	1	0	0	1	2	2	2	1	2	0	1	0	0	8
3	0	0	0	0	0	2	0	1	2	0	0	2	2	9
4	1	1	0	0	2	2	2	1	0	0	1	0	0	6
5	0	0	1	1	2	2	0	1	2	0	1	2	0	8
6	1	1	0	0	2	2	0	1	0	0	1	2	0	6
7	0	0	1	0	1	2	2	1	0	2	0	0	0	7
8	1	0	1	1	3	2	2	0	0	0	1	2	0	7
9	1	1	0	0	2	2	0	1	2	0	1	0	2	8
10	1	0	0	1	2	2	0	0	0	2	1	2	2	9
11	1	0	0	0	1	2	2	0	2	0	1	0	0	7
12	0	0	2	1	3	2	2	1	2	0	0	0	0	7

ANEXO Nº 3 (continuación)

Pre test

N°	Nociones aditivas y resolución de problemas																															PUNTAJE
	CUADERNILLO 1																CUADERNILLO 2														TOTAL	
	P1	P2	P3	P4	P7	P8	P8	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P20	P21	P1	P2	P3	P4	P7	P9	P10	P12	P13	P15	P17	P18	P19	P21		**TOTAL**
	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	**66**
1	1	1	1	2	1	0	0	0	0	0	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	2	0	0	1	28	37
2	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	23	33
3	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	2	0	2	1	31	40
4	0	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	0	0	0	1	28	36
5	1	1	1	2	0	2	0	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	21	31
6	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	25	33
7	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	2	1	0	2	0	1	30	38
8	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2	1	31	41
9	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	2	0	0	1	26	36
10	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	2	2	0	1	27	38
11	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	2	1	2	0	1	2	2	2	1	38	46
12	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	2	2	1	1	0	2	0	1	1	1	1	2	1	0	0	1	0	0	0	1	26	36

ANEXO Nº 3

Post test.

Comprensión y uso del número.						Comprensión del sistema. de numeración decimal								
N°	CUAD. 1		CUAD. 2		PUNTAJE	CUADERNILLO 1			CUADERNILLO 2					PUNTAJE
	P5	P6	P5	P6		P17	P18	P19	P8	P11	P14	P16	P20	
	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	2	14
1	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	0	2	2	13
2	1	0	1	1	3	2	2	0	2	2	1	2	0	11
3	1	0	0	0	1	2	2	1	2	2	0	2	2	13
4	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	0	12
5	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	2	14
6	1	1	1	0	3	2	2	1	2	2	1	2	0	12
7	1	1	1	1	4	2	2	1	2	2	2	2	0	13
8	1	1	1	0	3	2	2	1	2	2	1	2	2	14
9	1	1	1	0	3	2	2	1	2	2	1	2	2	14
10	1	0	0	1	2	2	2	0	2	2	1	2	2	13
11	1	0	0	1	2	2	2	1	2	2	1	2	2	14
12	1	1	0	1	3	2	2	1	2	2	0	2	2	13

(continuación)

Post test.

N°	Nociones aditivas y resolución de problemas																															PUNTAJE
	CUADERNILLO 1																CUADERNILLO 2														TOTAL	
	P1	P2	P3	P4	P7	P8	P8	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P20	P21	P1	P2	P3	P4	P7	P9	P10	P12	P13	P15	P17	P18	P19	P21		TOTAL
	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	66
1	1	1	1	2	1	2	1	3	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	0	2	2	2	1	42	59
2	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	62
3	1	1	1	2	1	2	1	3	0	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	42	56
4	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	42	58
5	1	1	1	2	1	2	1	0	3	0	2	2	1	1	0	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	40	58
6	1	1	1	2	1	2	1	3	3	0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	0	2	2	2	1	44	59
7	1	1	1	2	1	2	1	0	0	0	0	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2	0	1	35	52
8	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	41	58
9	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	0	1	40	57
10	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	63
11	1	1	1	2	1	2	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	48	64
12	1	1	1	2	1	2	1	0	0	3	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	42	58

PERÚ | Ministerio de Educación

Evaluación Censal de Estudiantes 2011

ANEXO N° 4

Matemática

Cuadernillo 1 - Primer día

Código del estudiante: ______ Sección: ______

Apellidos: ______ ______

Paterno Materno

Nombres: ______

Marque aquí si el estudiante no asistió para desarrollar este cuadernillo o no estuvo en el aula durante todo el tiempo establecido.

Indicaciones

- Lee cada pregunta con mucha atención.
- Luego, resuelve cada pregunta y <u>**marca** con **X**</u> la respuesta correcta.
- Si lo necesitas, puedes volver a leer la pregunta.
- Solo debes marcar una respuesta por cada pregunta.

Vamos a resolver juntos el primer ejemplo.

Resuelve:

$$\begin{array}{r} 4 + \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Ahora marca tu respuesta.

a) 4
b) 42
~~c)~~ 6

Ahora resuelve tú solo el segundo ejemplo.

Ana tiene 1 galleta y Luis tiene 3 galletas.
¿Cuántas galletas tienen juntos?

a) 3 galletas
b) 4 galletas
c) 1 galleta

- Resuelve el resto del cuadernillo en silencio.
- Trabaja sin mirar los cuadernillos de tus compañeros.
- Solo podrás preguntar si tienes dudas de cómo <u>**marcar**</u> tus respuestas.

Lee y piensa bien antes de marcar tus respuestas.

Ahora puedes empezar.

1

Resuelve:

$$435 + 93$$

Ahora marca tu respuesta.

- (a) 428
- (b) 528
- (c) 1365

2

Resuelve:

$$\begin{array}{r} 17 - \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Ahora marca tu respuesta.

- (a) 25
- (b) 11
- (c) 9

3

Resuelve:

$$17 + 14 + 3$$

Ahora marca tu respuesta.

- a) 24
- b) 34
- c) 61

4

Resuelve:

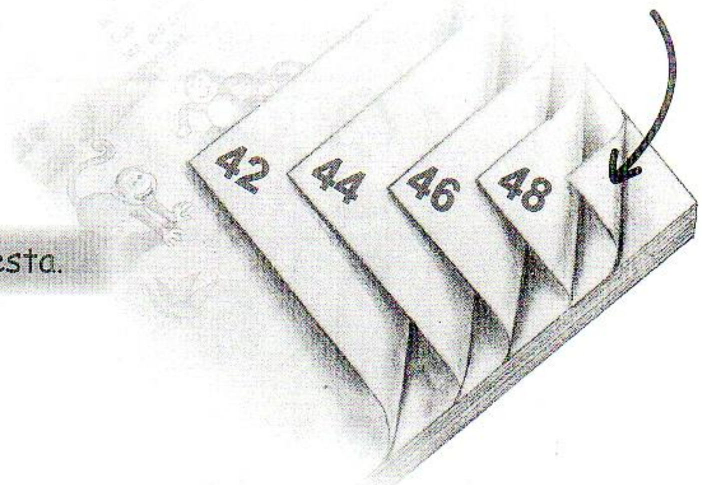
$$\begin{array}{r} 390\ - \\ 42 \\ \hline \end{array}$$

Ahora marca tu respuesta.

- a) 348
- b) 352
- c) 358

5

Los números de las páginas mostradas en el libro forman una secuencia. ¿Qué número falta en la página señalada?



Ahora marca tu respuesta.

a) 50

b) 49

c) 47

6

¿Qué grupo de tarjetas tiene los números ordenados de **MENOR** a **MAYOR**?

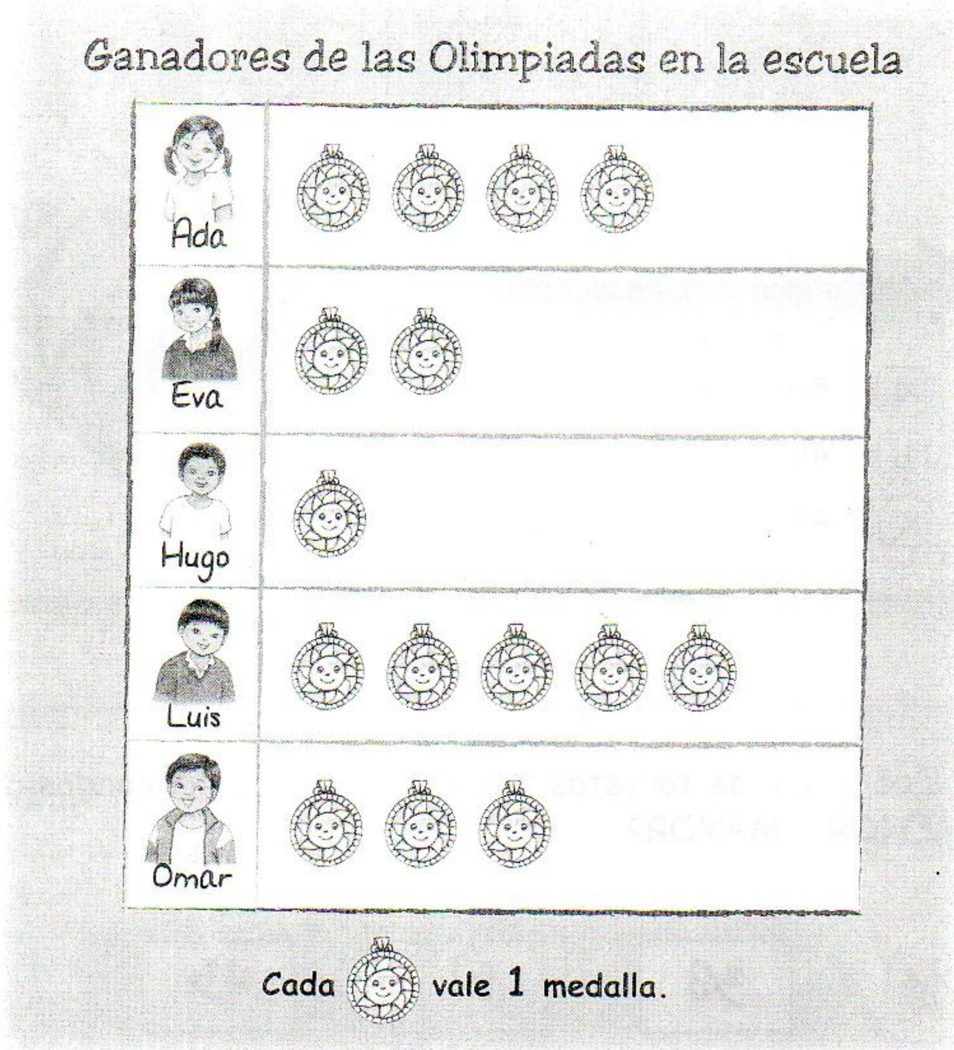
a) 38 51 43

b) 51 43 38

c) 38 43 51

7

Observa el gráfico:



Solo Eva y Luis son de nuestro salón. ¿Cuántas medallas ganó nuestro salón?

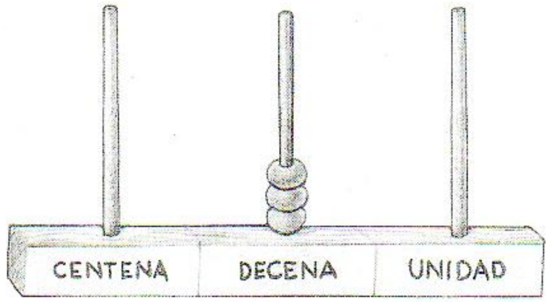
a) 4 medallas

b) 7 medallas

c) 15 medallas

8

En el ábaco está representado el número 30. Observa:



Si restamos 13 unidades a este número, ¿qué número resultará?

a) 17

b) 10

c) 23

9

Lee la tabla y responde: ¿cuántas orquídeas fueron sembradas en total?

Plantas sembradas

	Margaritas	Orquídeas
Blanca	15	21
Amarilla	12	13

a) 21 orquídeas

b) 34 orquídeas

c) 36 orquídeas

10

Observa el cartel:

Cecilia compró 12 girasoles y 5 rosas para armar un ramo. ¿Cuánto gastó en total?

a) S/. 16

b) S/. 17

c) S/. 27

11

Observa la cantidad de dinero que tiene Sonia:

Sonia tiene la mitad de la cantidad de dinero que tiene Francisco. ¿Cuánto dinero tiene Francisco?

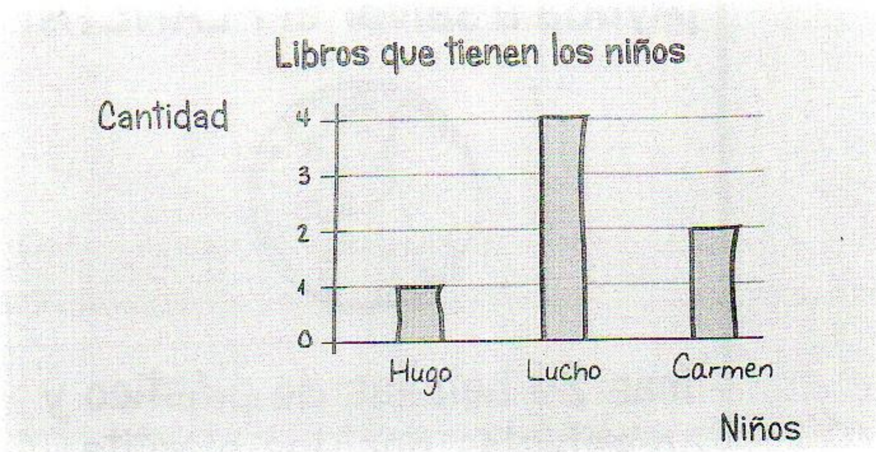
a) S/. 16

b) S/. 8

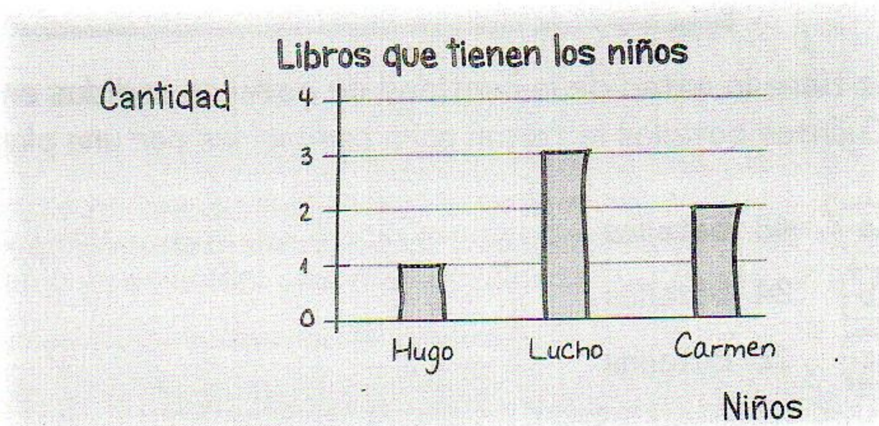
c) S/. 4

12 ¿En qué gráfico se muestra que Lucho tiene 3 libros más que Hugo?

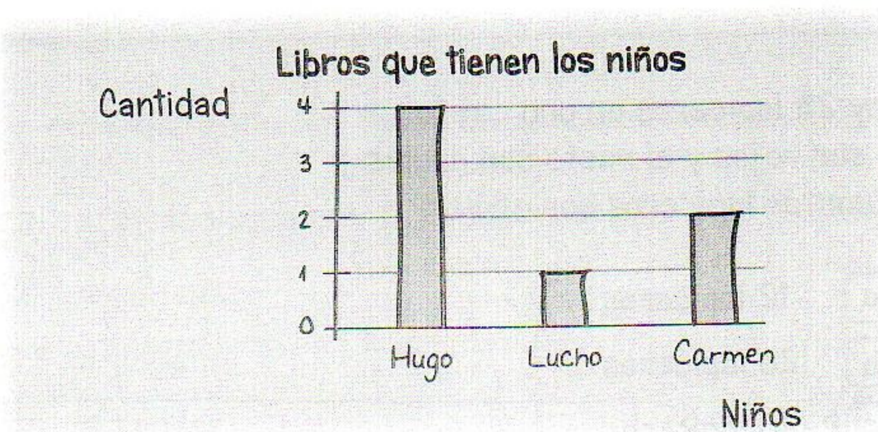
a



b



c



13

Lee el siguiente aviso:

¡Ayuda a salvar el PLANETA!

Trae **24** botellas de plástico y cámbialas por una plantita.

Liz tiene la mitad de la cantidad de botellas pedidas en el aviso.
¿Cuántas botellas le faltan para cambiarlas por una plantita?

- a) 48 botellas
- b) 24 botellas
- c) 12 botellas

14

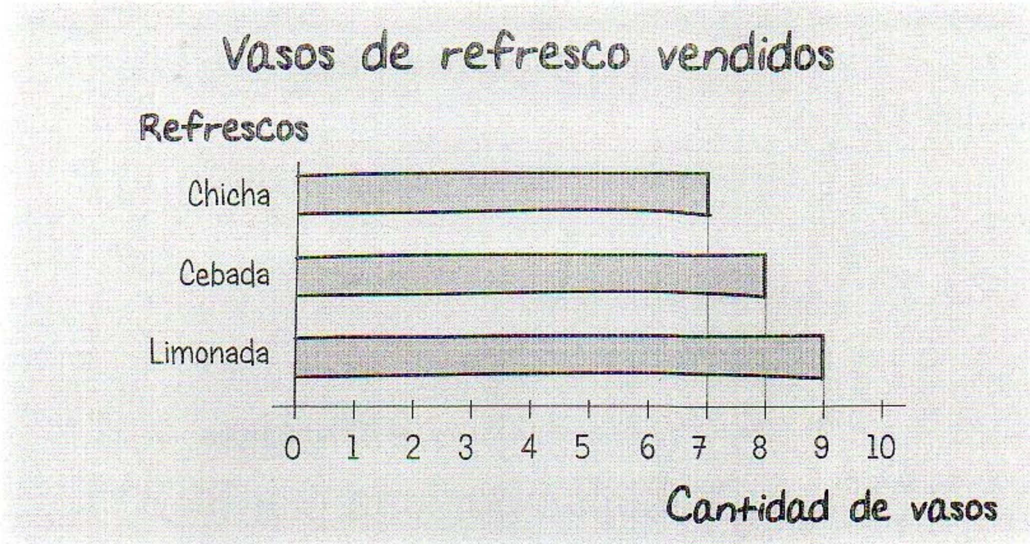
Hay 26 lapiceros en una cajita.
14 son rojos y el resto son azules.
¿Cuántos lapiceros son azules?

- a) 12 lapiceros
- b) 26 lapiceros
- c) 40 lapiceros

Pasa a la siguiente página.

15

Observa el gráfico:



Ahora responde: ¿cuántos vasos de chicha y de limonada se vendieron en total?

a) 7 vasos

b) 16 vasos

c) 24 vasos

16

Ramón tenía en su tienda 24 latas de leche. Luego vendió 6 latas de leche. ¿Cuántas latas tiene ahora?

a) 30 latas

b) 22 latas

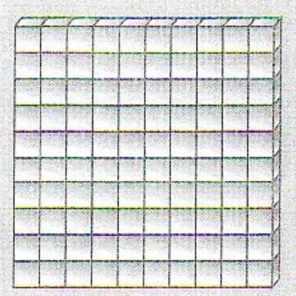
c) 18 latas

17

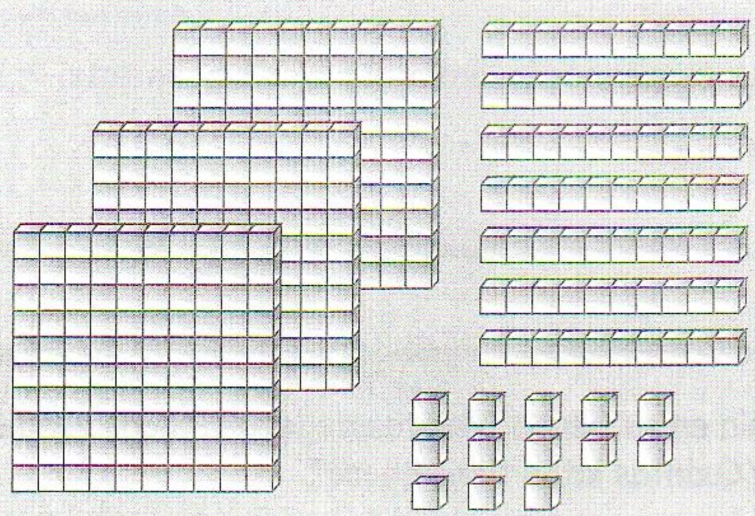
Observa con atención:

 vale una unidad.

 vale 10 unidades.

 vale 100 unidades.

¿Qué número está representado en el siguiente dibujo?



(a) 373

(b) 383

(c) 3713

18

Observa el tablero:

Decenas	Unidades
4	9

Ahora responde: ¿cuál vale lo mismo que el **4** del tablero?

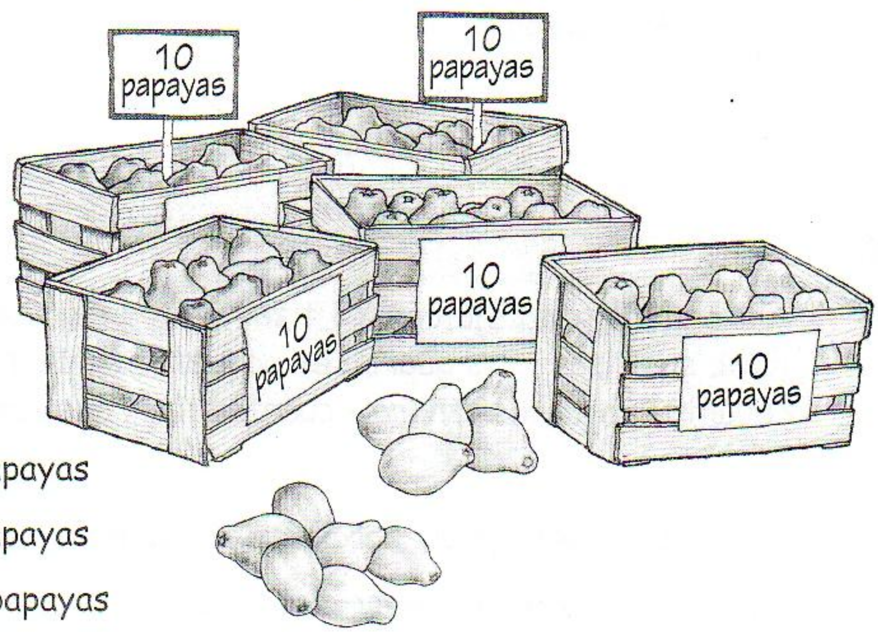
a) 4 unidades

b) 49 unidades

c) 40 unidades

19

Observa y responde: ¿cuántas papayas hay en total?



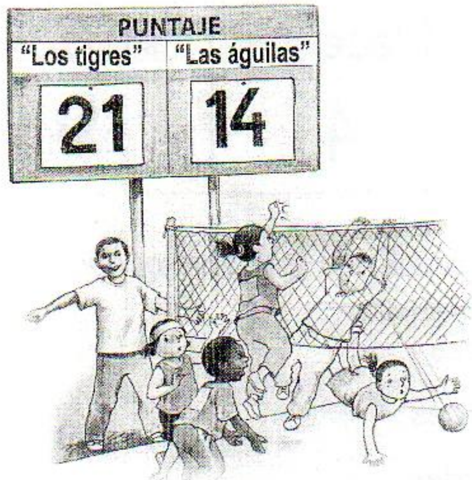
a) 16 papayas

b) 61 papayas

c) 511 papayas

20

Los estudiantes de la escuela están jugando vóley. Observa los puntajes en la pizarra:



Ahora responde: ¿cuántos puntos le faltan al equipo de "Las águilas" para igualar al equipo de "Los tigres"?

- (a) 7 puntos
- (b) 21 puntos
- (c) 35 puntos

21

Alicia tiene una caja con 23 tizas y otra caja con 34 tizas. Alicia junta sus tizas y las guarda en paquetes de 10 tizas cada paquete. ¿Cuántos paquetes tendrá y cuántas tizas quedarán sueltas?

- (a) 5 paquetes y quedarán 7 tizas sueltas.
- (b) 6 paquetes y quedarán 7 tizas sueltas.
- (c) 57 paquetes y no quedarán tizas sueltas.

¡Felicitaciones!
Has terminado.

PERÚ | Ministerio de Educación

Evaluación Censal de Estudiantes 2011

ANEXO N° 4

Matemática

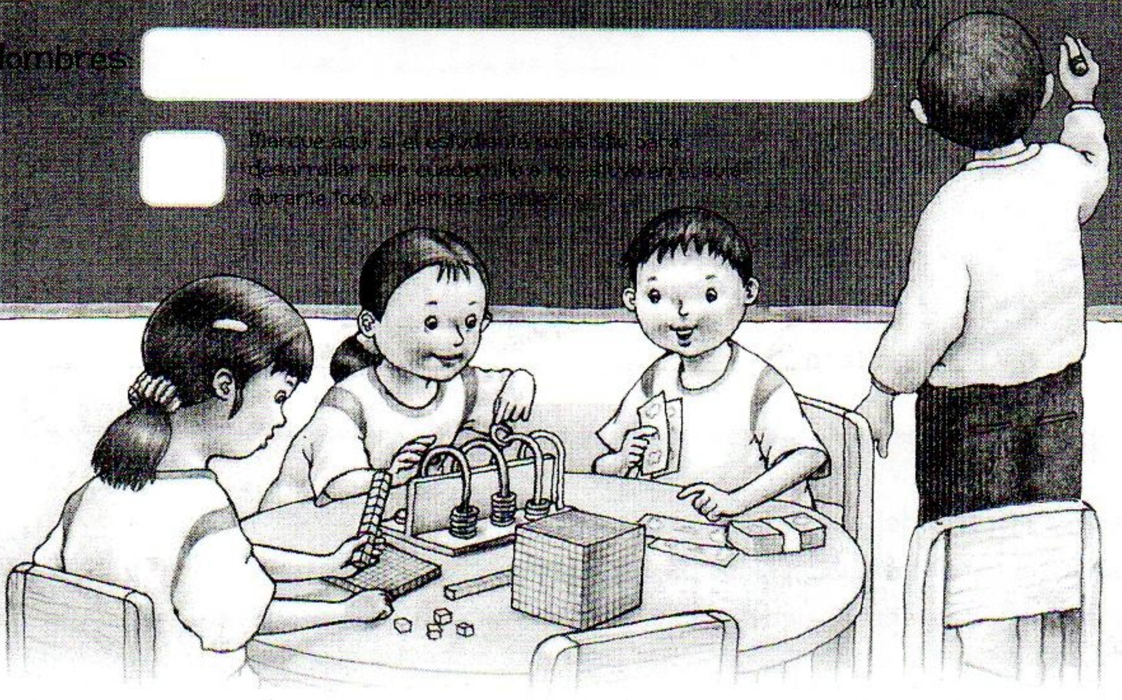
Cuadernillo 2 - Segundo día

Código del estudiante: ____ Sección: ____

Apellidos: ____ (Paterno) ____ (Materno)

Nombres: ____

☐ Marque aquí si el estudiante [illegible] para desarrollar este cuadernillo y no estuvo en el aula durante todo el tiempo establecido.



Indicaciones

- Lee cada pregunta con mucha atención.
- Luego, resuelve cada pregunta y **marca con X** la respuesta correcta.
- Si lo necesitas, puedes volver a leer la pregunta.
- Solo debes marcar una respuesta por cada pregunta.

Vamos a resolver juntos el primer ejemplo.

Resuelve:

$$\begin{array}{r} 4\ + \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Ahora marca tu respuesta.

- a) 4
- b) 42
- c) 6 [X]

Ahora resuelve tú solo el segundo ejemplo.

Ana tiene 1 galleta y Luis tiene 3 galletas.
¿Cuántas galletas tienen juntos?

- a) 3 galletas
- b) 4 galletas
- c) 1 galleta

- Resuelve el resto del cuadernillo en silencio.
- Trabaja sin mirar los cuadernillos de tus compañeros.
- Solo podrás preguntar si tienes dudas de cómo **marcar** tus respuestas.

Espera.

Lee y piensa bien antes de marcar tus respuestas.

Ahora puedes empezar.

1

Resuelve:

$$\begin{array}{r} 73\ + \\ 386 \\ \hline \end{array}$$

Ahora marca tu respuesta.

- a) 359
- b) 459
- c) 3159

2

A **81** réstale **59**.

Ahora marca tu respuesta.

- a) 38
- b) 32
- c) 22

3

Resuelve:

$$4 + 13 + 7 + 16$$

Ahora marca tu respuesta.

a) 22

b) 40

c) 76

4

Completa la operación:

Personas del ómnibus

Subieron:	46 -
Bajaron:	27
Quedaron:	

Ahora marca tu respuesta.

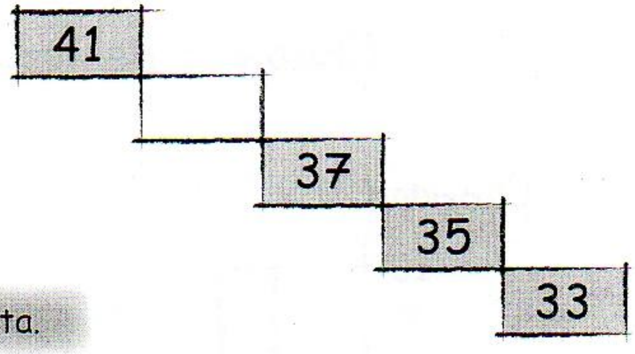
a) 19

b) 21

c) 29

5

Observa la secuencia y responde: ¿qué número falta en el recuadro ☐ ?



Ahora marca tu respuesta.

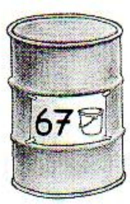
a) 38

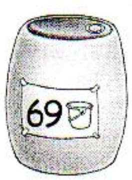
b) 39

c) 40

6

Los carteles indican la cantidad de baldes con agua que se echaron en cada cilindro. ¿En qué cilindro se echaron más baldes con agua?

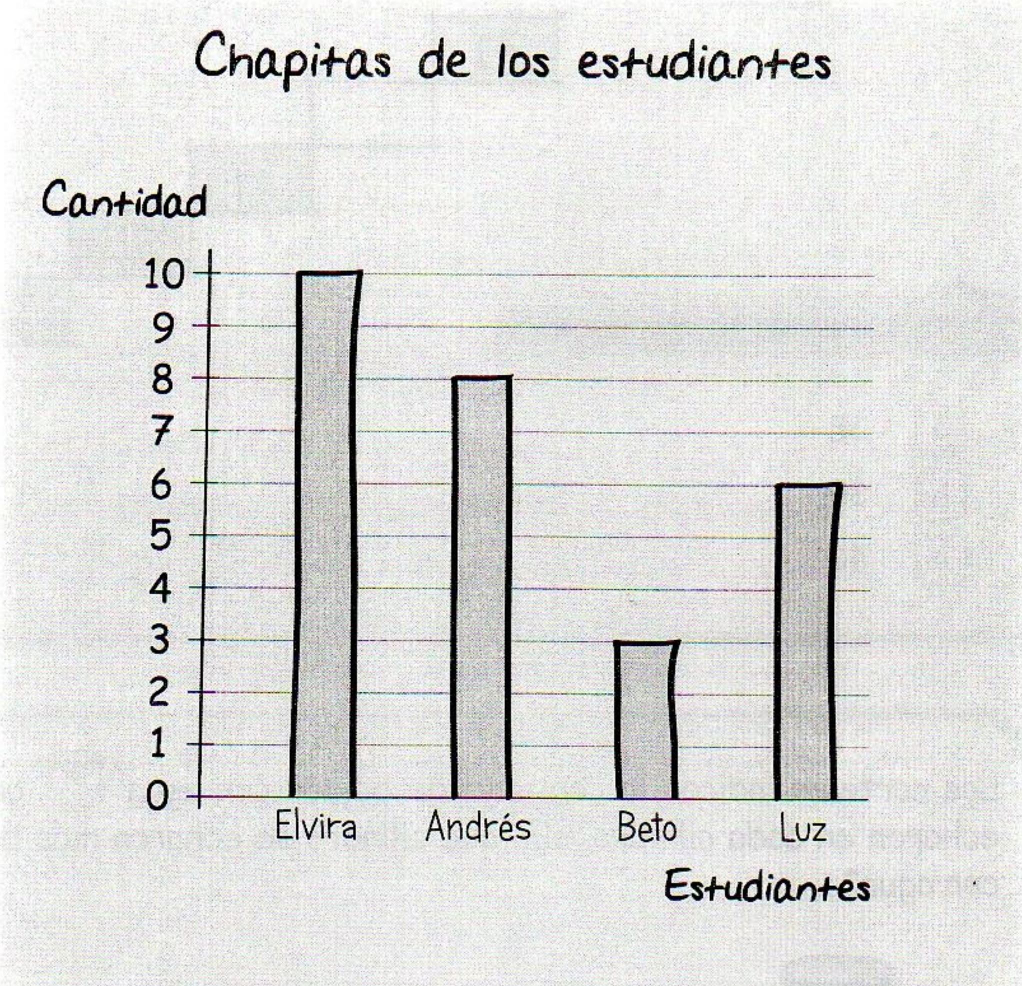
a) 

b) 

c) 

7

Observa el gráfico:



Ahora responde: ¿cuántas chapitas le faltan a Beto para tener tantas como Elvira?

a) 7 chapitas

b) 10 chapitas

c) 13 chapitas

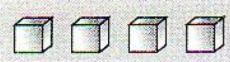
8

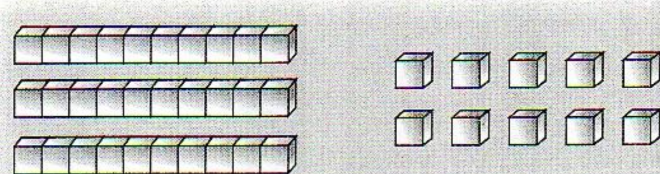
Observa:

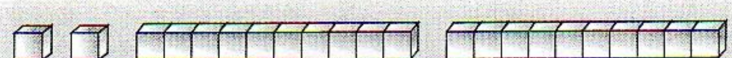
 vale una unidad.

 vale 10 unidades.

Ahora responde: ¿dónde hay **40** unidades?

a) 

b) 

c) 

9

Víctor tiene S/. 7. Mónica tiene el triple de dinero que Víctor. ¿Cuánto dinero tiene Mónica?

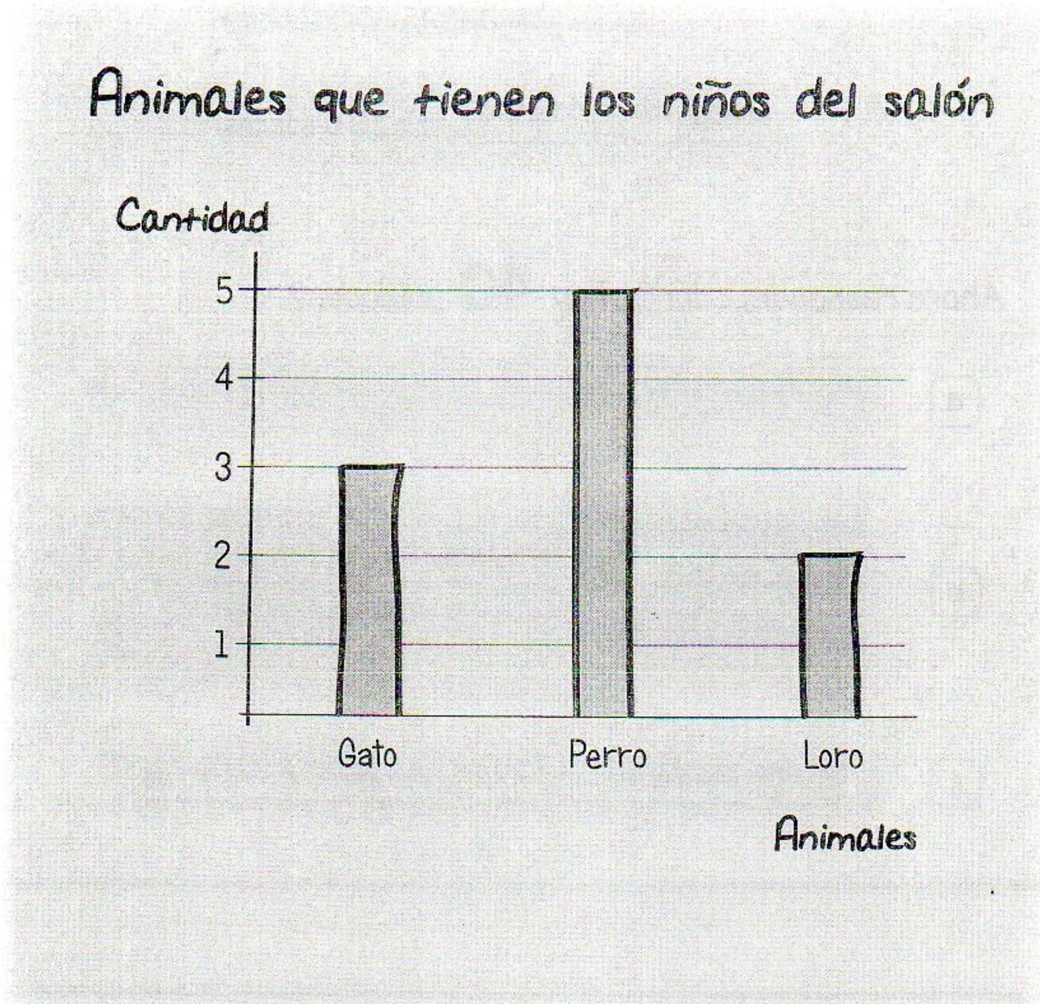
a) S/. 21

b) S/. 14

c) S/. 7

10

Observa el gráfico:



Ahora responde: ¿cuántos animales tienen en total los niños del salón?

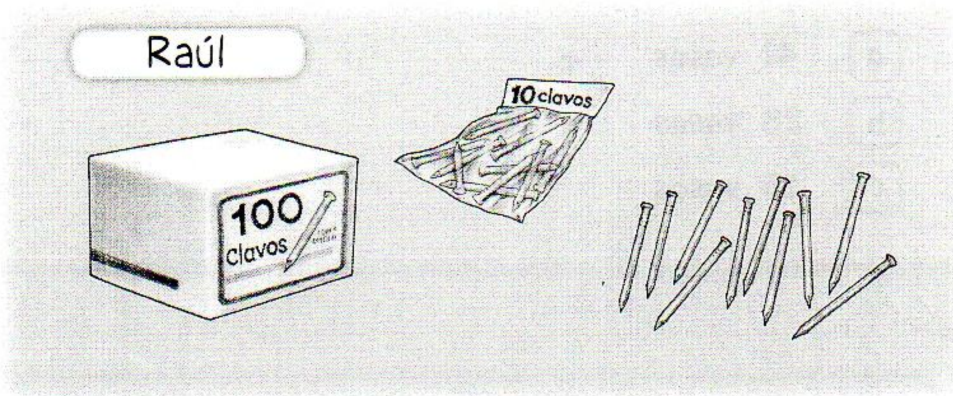
a) 5 animales

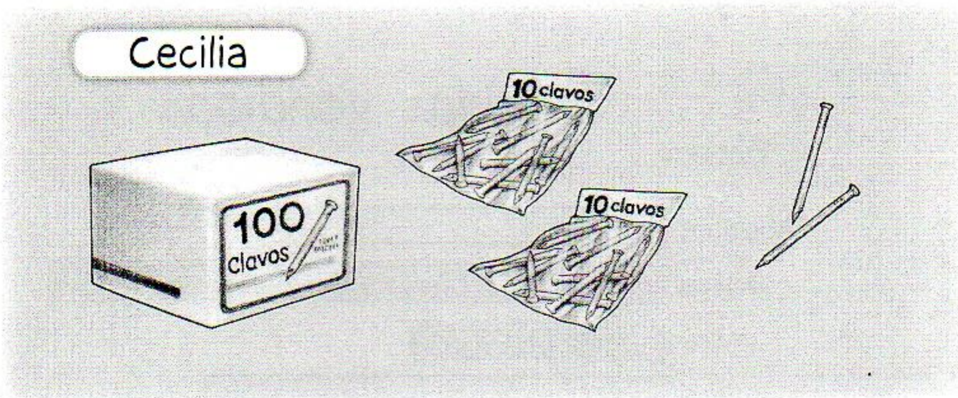
b) 3 animales

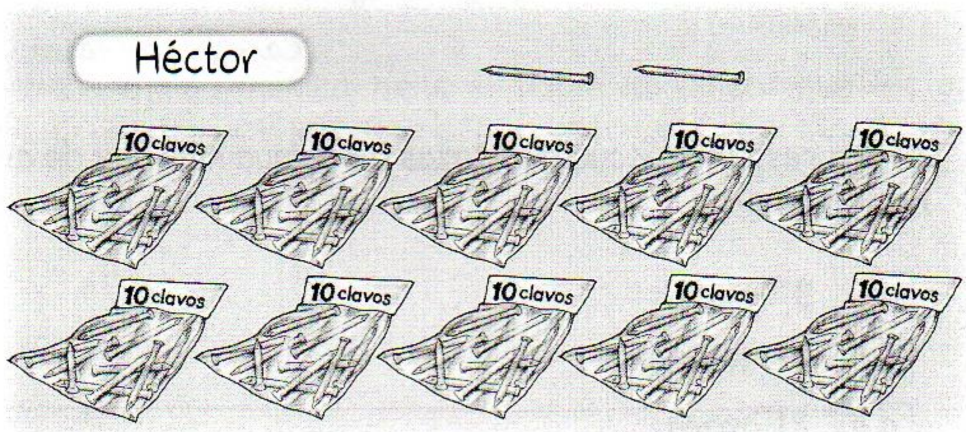
c) 10 animales

11

Observa la cantidad de clavos que compró cada carpintero y responde: ¿quién compró 120 clavos?

a)


b)


c)


12

Hay 28 vasos servidos.
13 vasos tienen gaseosa y el resto tiene limonada.
¿Cuántos vasos tienen limonada?

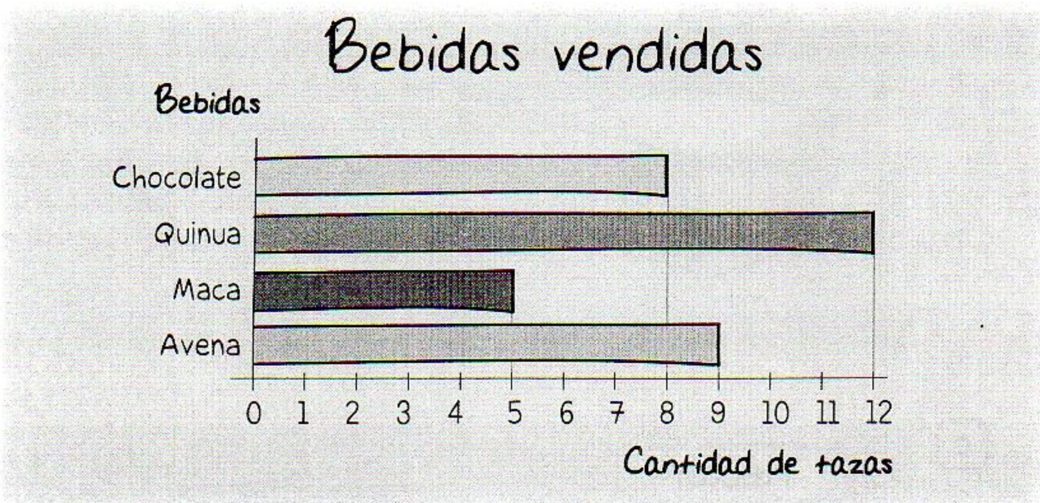
a) 41 vasos

b) 28 vasos

c) 15 vasos

13

Observa el gráfico:



Ahora responde: ¿cuántas tazas de quinua más que de avena se ha vendido?

a) 3 tazas

b) 12 tazas

c) 21 tazas

14

Observa y responde: ¿cuánto dinero hay en total?

a) S/. 26

b) S/. 206

c) S/. 2 006

15

Observa y responde: ¿cuántos animales de la granja son machos?

Animales de la granja

	Cuyes	Cerdos
Machos	14	12
Hembras	10	15

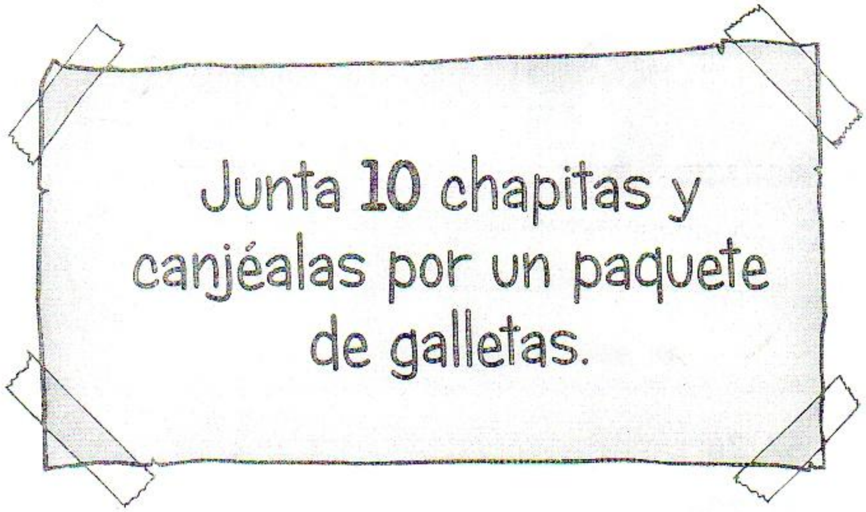
a) 14 animales

b) 24 animales

c) 26 animales

16

Observa el cartel:



Violeta canjeó 3 paquetes de galletas. ¿Cuántas chapitas juntó?

- a) 10 chapitas
- b) 13 chapitas
- c) 30 chapitas

17

En una tienda había 15 pantalones y 28 polos. Luego se vendieron 13 polos. ¿Cuántos polos quedan?

- a) 15 polos
- b) 41 polos
- c) 56 polos

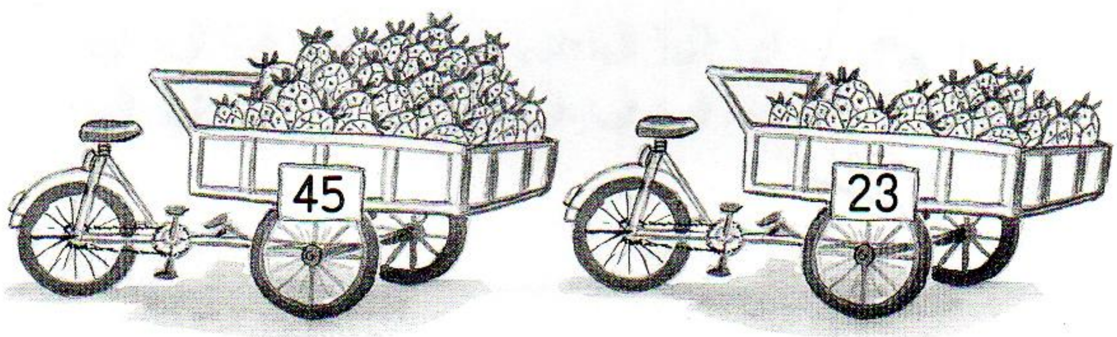
18

En la mañana Teresa tenía algunas chapitas. Luego en la tarde encontró 8 chapitas. Ahora tiene 17 chapitas. ¿Cuántas chapitas tenía Teresa en la mañana?

a) 8 chapitas
b) 9 chapitas
c) 25 chapitas

19

Félix tiene un triciclo con 45 piñas y otro con 23 piñas.

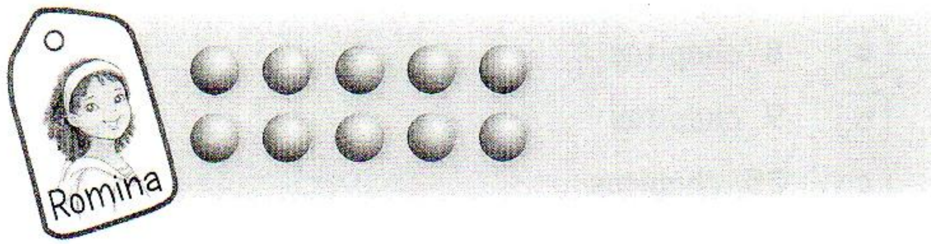


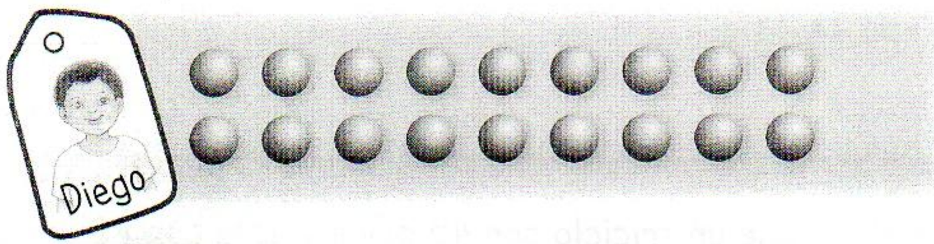
Él quiere guardar sus piñas en cajas de 10 piñas cada una. ¿Cuántas cajas necesitará y cuántas piñas quedarán sueltas?

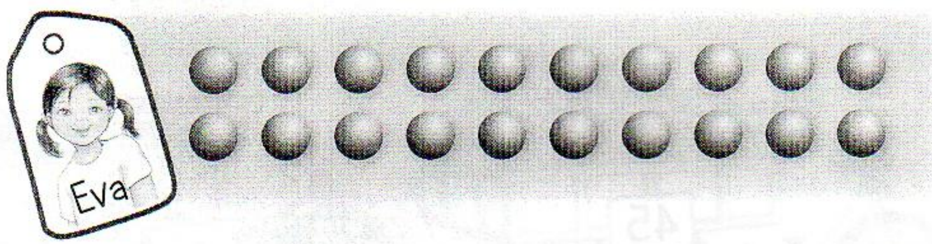
a) Necesitará 7 cajas y quedarán 8 piñas sueltas.
b) Necesitará 6 cajas y quedarán 8 piñas sueltas.
c) Necesitará 68 cajas y no quedarán piñas sueltas.

20

¿Quién podrá formar **dos grupos** de 10 bolitas con las bolitas que tiene?

a 

b 

c 

21

En una canasta hay 26 manzanas rojas y 19 manzanas verdes.
¿Cuántas manzanas hay en total?

a 45 manzanas

b 27 manzanas

c 7 manzanas

ANEXO Nº 5

PROGRAMACIÓN Y GUÍA DEL DOCENTE

DEL MÉTODO SINGAPUR

INTRODUCCIÓN

El Método Singapur, es un método basado en múltiples actividades que proporcionan al alumno una sólida base matemática. Desarrolla la creatividad y el pensamiento crítico, habilidades claves para la resolución de problemas. **El método Singapur,** estimula el aprendizaje de la matemática en forma divertida y provechosa, a través de ilustraciones y juegos que ayudan a reforzar y consolidar el aprendizaje. La programación y el cuaderno de trabajo fue elaborado por: Dr. Fong Ho Kheong, Chelvi Romakrishnan y Michelle Choo, cuyo título del trabajo fue **“Pensar sin límites: Matemática Método Singapur”** y propone en dicho trabajo las siguientes actividades:

¡Aprendamos! Se introducen paso a paso los conceptos en forma atractiva. En paralelo, se formulan preguntas que permiten monitorear la comprensión de los conceptos aprendidos.

¡Activa tu mente! Desafía a los estudiantes a resolver problemas no rutinarios que permiten aplicar tanto procedimientos como herramientas y, al mismo tiempo, desarrollar habilidades de pensamiento.

Diario matemático Permite compartir lo que el estudiante ha aprendido, crear sus propias preguntas matemáticas, y tomar conciencia de su propio pensamiento matemático.

¡Exploremos! Se realizan actividades investigativas que permiten a los estudiantes aplicar los conceptos aprendidos.

Realiza esta actividad y **¡Juguemos!** incluyen juegos y actividades que involucran el uso de la Matemática.

Matemática en la casa Permite a los padres o apoderados guiar a los estudiantes en la aplicación de los conceptos aprendidos a situaciones de su vida diaria.

ENFOQUE DEL METODO SINGAPUR

El enfoque CPA (Concreto-Pictórico- Abstracto), está asociado a los tres elementos básicos:

a) **Concreto:** Se realiza un primer acercamiento a los conceptos matemáticos mediante actividades de tipo manipulativo y asociadas a la vida cotidiana.

b) **Pictórico:** Los alumnos pueden dibujar conceptos matemáticos, así como cantidades y relaciones entre éstos. A partir de ahí las pueden introducir en los problemas relacionándolas entre sí y comparando.

c) **Abstracto:** Aplicación de símbolos y algoritmos matemáticos adquiridos que son capaces de identificar.

PASOS DEL MÉTODO SINGAPUR:

El procedimiento de aplicación comprende ocho pasos a seguir para la resolución de cualquier problema matemático al que haya que enfrentarse:

1. Leer el problema.
2. Observar y decidir de qué se está hablando.
3. Dibujar una barra de unidades (en función del nivel)
4. Releer el problema.
5. Ilustrar las cantidades del problema.
6. Identificar la pregunta exactamente.
7. Realizar las operaciones: resolver el problema.
8. Escribir la respuesta con las unidades correspondientes.

PROGRAMACIÓN N° 01
NÚMEROS HASTA 1 000

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Reconocer representaciones concretas de números (100 a 1000), leerlos y escribirlos en números y en palabras.
- Reconocer, leer y escribir números (100 a 1000) y su respectivo nombre (cien a mil).
- Reconocer representaciones concretas de números (100 a 1000), leerlos y escribirlos en números y en palabras.
- Reconocer, leer y escribir números (100 a 1000) y su respectivo nombre (cien a mil).

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Repase mostrando una representación concreta de 10 cubos que forman 1 decena. • Repase contando hacia adelante de 10 en 10 hasta 100, usando la representación concreta de 10. Luego, haga una representación concreta de 1 centena usando 10 barras de decena. • Escriba el número en cifras “100” y el número en palabras “cien” y reemplace 10 decenas por una placa de centena. • Explique y muestre a sus estudiantes cómo contar hasta 108. Utilice el método de contar de 1 en 1 a partir de 100: 100, 101, 102, 103,..., 108. Señale la representación concreta	Objetos concretos, como placas de centena, barras de decena y cubos de unidad	10´
2	• Explique y muestre a los estudiantes cómo contar hasta 352. • Utilice el método de contar de 100 en 100, de 10 en 10, y de 1 en 1 de la siguiente manera: 100, 200, 300, 310, 320,..., 350, 351, 352. Señale la representación concreta en la medida que cuenta.		10´
3 y 4	• Verifique el desempeño de sus estudiantes en el conteo de 100 en 100, de 10 en 10, y de 1 en 1, dado un conjunto de representaciones concretas. • Pida que algunos estudiantes realicen esta actividad frente a sus compañeros.		10´
5	• Guíe a los estudiantes para contar hasta 1000 usando placas de centena. Cuente de 100 en 100 de la siguiente manera: 100, 200, 300,..., 900, 1000. Apile las placas de centena mientras cuenta. • Pida que repitan el conteo. • Introduzca el número “1000” y el número escrito en palabras “mil”. • Destaque que 10 placas de centena forman un cubo grande, que representa 1000. (Debe mostrar diez placas de centena y un cubo de 1000).		10´

Nº DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
6	• Repase el conteo de uno en uno. Ponga la cantidad requerida de cubos de unidad en el retroproyector y guíe a los estudiantes a contar, decir y escribir cada número dado. • Explique que contar en unidades significa "sumar 1" a cada número. Por ejemplo: +1 +1 234, 235, 236,.... • Luego de contar, diga: "Al sumar 1 a 234, tenemos 235. 235 es 1 más que 234". "Al sumar 1 a 235, tenemos 236. 236 es 1 más que 235", etc.	Objetos concretos, como placas de centena, barras de decena y cubos de unidad	10´
7	• Verifique el desempeño de sus estudiantes al contar de uno en uno a partir de números como 424, 567, 606, 798, 995.		10´
8	• Repase el conteo de diez en diez. • Pregunte: "¿Cómo podemos mostrar 10 más que 563?". Guíelos a contar de diez en diez, comenzando por 563. • Explique que contar de diez en diez significa "sumar 10" a cada número contado. Por ejemplo: +10 +10 563, 573, 583,.... • Diga: "Al sumar 10 a 563, tenemos 573. 573 es 10 más que 563". "Al sumar 10 a 573, tenemos 583. 583 es 10 más que 563", etc.		10´
9	• Verifique el desempeño de sus estudiantes en el conteo de diez en diez con los números 519 y 740.		10´
10	• • Repase el conteo de cien en cien. • • Pregunte a los estudiantes "¿Cuánto es 100 más que 617?" • • Haga que el curso cuente de cien en cien. Diga: "717 es 100 más que 617. • Cuando sumamos 100 a 617, tenemos 717". "817 es 100 más que 717. • Cuando sumamos 100 a 717, tenemos 817". • Ayude a los estudiantes a comprender que el contar de cien en cien significa "sumar 100" a cada número contado. Por ejemplo: +100 +100 617, 717, 817,...		10´

PROGRAMACIÓN N° 02
VALOR POSICIONAL

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Representar números como centenas, decenas y unidades en una tabla de valor posicional.
- Mostrar representaciones concretas en centenas, decenas y unidades, dado un número hasta 1000,
- Leer y escribir números, dada una representación concreta y viceversa, con o sin una tabla de valor posicional.

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Explique el concepto de valor posicional relacionándolo con un número, los dígitos del número y los valores de cada dígito del número. • Para ilustrar, escriba un número (como 258) en una tabla de valor posicional para mostrar los dígitos del número y los valores de cada dígito correspondiente a centenas, decenas y unidades, así como la representación concreta de los valores de cada dígito. • Explique los dos métodos para mostrar los valores de los dígitos en el número 258: 2 representa 200 o 2 centenas; 5 representa 50 o 5 decenas; 8 representa 8 u 8 unidades. • Ayude a los estudiantes a leer el número 258 como“2 centenas 5 decenas y 8 unidades”. • Muestre la posición en que se ubica cada dígito. Por ejemplo, el dígito 2 está en la posición de las centenas.	• Bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
2	• Verifique el desempeño de sus estudiantes en el concepto de valor posicional, dado un conjunto de representaciones concretas. • Se espera que los estudiantes indiquen a) el valor de cada dígito, y b) la posición en la cual está ubicado. • Enseñe a sus estudiantes a escribir oraciones que involucren la suma de centenas, decenas y unidades.		10´

<table>
<tr><th>N° DE ACTIVIDAD</th><th>ESTRATEGIA</th><th>RECURSOS</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>3</td><td>• A través de estos ejercicios evalúe la habilidad de los estudiantes para indicar el valor de cada dígito, y la posición en la cual está ubicado.</td><td rowspan="4">• Bloques base diez
• Tablas de valor posicional</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Explique a los estudiantes las distintas formas de representar y expresar números usando su valor posicional.
• Lea las distintas formas. Dado el número 493, lea de la siguiente manera:
400, 90 y 3 hacen 493
400 + 90 + 3 = 493
• Pida voluntarios para repetir la lectura de las distintas formas de representar un número usando el valor posicional de sus dígitos.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>5</td><td>• Utilice estos ejercicios para verificar si los estudiantes han comprendido el concepto de valor posicional para representar números.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>6</td><td>• Pida a sus estudiantes que sigan los pasos indicados en el Libro del Alumno.
• Se espera que los estudiantes lleguen a dominar el conteo, la lectura y el uso de una tabla de valor posicional para representar números, relacionando cada dígito con su posición y valor.</td><td>10´</td></tr>
</table>

PROGRAMACIÓN N° 03
COMPARANDO NÚMEROS HASTA 1000

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar la estrategia de “comparar las decenas y las unidades” para comparar números hasta 1000.
- Comparar números hasta 1000 usando los términos “mayor que” y “menor que”, con y sin representaciones concretas.
- Comparar números hasta 1000 usando los términos “el mayor” y “el menor”, con y sin representaciones concretas.

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre representaciones concretas de los dos números usando los bloques. • Explique la estrategia para comparar los números 235 y 146: comparar primero las centenas, seguidas de las decenas y las unidades. • Destaque a los estudiantes que las 2 placas de centena son más que una placa de centena, por lo tanto, 235 es mayor que 146. • Diga a los estudiantes que deben utilizar “más que” o “menos que” para concluir cada comparación realizada.	• Bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
2	• Muestre otro ejemplo a los estudiantes. Siga el mismo procedimiento que en el Ejercicio 1 • Nota: en este ejemplo, comparamos las decenas, ya que las centenas de los números son iguales. • Pida algunos voluntarios para que expliquen al curso cómo obtuvieron sus respuestas.		10´
3	• Muestre otro ejemplo a los estudiantes. Siga el mismo procedimiento que en el ejercicio 1 • Nota: En este ejemplo comparamos las unidades, ya que las centenas y decenas de los números son iguales. • Muestre a los estudiantes cómo obtener un número mayor que 415 cambiando los dígitos del número 415. a) Sumando 100 a 415: 415 + 100 = 515 b) Sumando 10 a 415: 415 + 10 = 425 c) Sumando 4 unidades a 415: 415 + 4 = 419		10´

Nº DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
4 y 5	• Evalúe la comprensión de sus estudiantes respecto del procedimiento de comparación. • Pregunte por qué han elegido la respuesta y que la justifiquen. Por ejemplo, 233 y 333: El dígito 3 es mayor que el dígito 2 en la posición de las centenas.	• Bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
6	• Organice a los estudiantes en grupos de tres. • Pídales que sigan las instrucciones dadas en el Libro del Alumno. • Destáqueles que es necesario que los compañeros(as) verifiquen las respuestas.	• Dado de diez caras • Hojas de papel	10´

PROGRAMACIÓN N° 04
ORDEN Y SECUENCIAS

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Comparar dos o más números de 3 dígitos.
- Identificar “el mayor” y “el menor”.
- Comparar un número con el número previo usando los términos “1 más que”, “1 menos que”, “10 más que”, “10 menos que”, “100 más que” y “100 menos que”.
- Ordenar números hasta 1000 en forma ascendente o descendente.

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Diga a los estudiantes que podemos utilizar la estrategia de comparar para ordenar números en forma ascendente o descendente. • Guíe a los estudiantes a comparar números hasta 1000, comparando primero las centenas. Si las centenas son iguales, deben comparar las decenas y, si las decenas son iguales, deben comparar las unidades. • Pida a sus estudiantes que nombren los números mayores y menores y luego los ordenen en forma ascendente o descendente. • Diga a los estudiantes que esta estrategia se puede utilizar para encontrar patrones en una secuencia de números.	Tablas de valor posicional	30´

PROGRAMACIÓN N° 05
DIARIO MATEMÁTICO

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Recordar los pasos para comparar números y luego ordenarlos (en forma ascendente o descendente).
- Escribir los pasos requeridos para comparar dos o más números hasta 1000.
- Recordar y aplicar la estrategia de “comparar las centenas primero, luego las decenas y unidades” para comparar y ordenar números hasta 1000 en forma ascendente o descendente.
- Identificar errores en el problema de ejemplo y dar las razones de

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

<table>
<tr><th>N° DE ACTIVIDAD</th><th>ESTRATEGIA</th><th>RECURSOS</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>• Pida a los estudiantes que recuerden la estrategia para hacer comparaciones entre números: comenzar siempre por las centenas, luego las decenas y por último las unidades.
• Una vez que los estudiantes estén seguros de la estrategia, serán capaces de elegir como la opción correcta.
• Los estudiantes también pueden aplicar la regla de eliminación: pueden intentar eliminar las opciones imposibles para llegar a la opción correcta.</td><td rowspan="3">• Bloques base diez
• Tablas de valor posicional</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• De igual forma, pida que los estudiantes apliquen la estrategia en este ejercicio.
• Los estudiantes pueden escribir oraciones como:
“427 no es el número mayor”.
“724 es el número mayor.”
“247 es el número menor.”
“247, 274, 427 y 724 es el orden correcto.”
• Acepte cualquier otra oración que explique correctamente el intento de Gugo.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• Verifique si sus estudiantes son capaces de ordenar los números.</td><td>10´</td></tr>
</table>

Nº DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
4	• Lleve a los estudiantes a ver el patrón usando las palabras “más que” comparando dos números adyacentes cualesquiera. • Explique el patrón: “244 es 1 más que 243, y 245 es 1 más que 244. Por lo tanto, existe un patrón. Usamos este patrón para encontrar el valor desconocido. 1 más que 246 es 247, y así en adelante.” • Explique el mismo procedimiento usando “menos que”. • Pida algunos voluntarios para argumentar lo anterior.	• Bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
5	• Intente que sus estudiantes vean el patrón usando las palabras “más que” o “menos que” con el mismo procedimiento que en el ejercicio 4 • Los estudiantes debieran darse cuenta que la diferencia entre los números es 10, y no 1 como en el ejercicio anterior.		10´
6 y 7	• Pida a sus estudiantes que trabajen en los ejercicios. • Resuma la siguiente estrategia antes que comiencen a trabajar: Paso 1: Encuentra un patrón comparando dos números adyacentes cualesquiera. Paso 2: Pueden usar tanto la estrategia “más que” como “menos que”. Paso 3: Utiliza el patrón para encontrar los valores desconocidos.		10´
8	• Ayude a los estudiantes a recordar la estrategia para encontrar los números. • Pídales que sigan las instrucciones dadas en el Libro del Alumno. • Puede explicarles que (a) el número que viene después del número obtenido con los dados, es mayor que el último, y (b) el número que viene antes del número obtenido con los dados, es menor que éste último.		10´

PROGRAMACIÓN N° 06
EXPLOREMOS

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Reconocer que el patrón de “el último número” menos “el primer número” más “uno” es siempre la cantidad de números que hay entre dos números dados

HABILIDAD

•Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Esta actividad ayuda a los estudiantes a encontrar un patrón y luego usarlo para encontrar otros números. • Explique los dos métodos a los estudiantes: (1) método de “contar hacia adelante” (2) método de “encontrar la diferencia y sumar 1” • Destaque a los estudiantes que el segundo método es más eficiente que el método del conteo, especialmente cuando la diferencia entre los dos números es muy grande. Ejemplo: • Diga: “Para los números 12 y 89, toma demasiado tiempo contar desde 12 hasta 89. Usando el segundo método puedes obtener el resultado en poco tiempo."	• Bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´

PROGRAMACIÓN N° 07
ACTIVA TU MENTE

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Aplicar los conceptos aprendidos para encontrar los números que faltan en "__más que" y "__menos que", contando hacia adelante.
- Aplicar los conceptos aprendidos para encontrar los números que faltan en "__más que" y "__menos que" contando hacia atrás.

HABILIDAD

• Deducir •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Pida que los estudiantes encuentren el patrón numérico y luego lo usen para encontrar los números faltantes. • Los estudiantes pueden usar la estrategia "más que" o "menos que". • Destaque que el primer método involucra "sumar", mientras que el segundo involucra "restar.	• Bloques base diez • Tablas de valor posicional	20´
2	• En el ejercicio a, explique a los estudiantes que requieren aplicar un patrón numérico y la estrategia de "contar hacia atrás" para resolver el problema. • En el ejercicio b, explique a los estudiantes las habilidades requeridas para resolver el problema: identificar patrones numéricos, secuenciar y contar hacia adelante.		20´

PROGRAMACIÓN N° 08
ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN HASTA 1000

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional con representaciones concretas, para mostrar la suma de un número de 1, 2 o 3 dígitos a un número de 3 dígitos, sin reagrupar.
- Sumar un número de 1, 2 o 3 dígitos a un número de 3 dígitos sin reagrupar, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la suma de un número de 1, 2 o 3 dígitos a un número de 3 dígitos, sin reagrupar.

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Introduzca la estrategia y procedimientos para sumar números: sume de derecha a izquierda (sume primero las unidades, luego las decenas y por último las centenas). • Muestre y explique cómo sumar números hasta 1000 usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Muestre cómo sumar 123 + 5. Primero, sume las unidades: 3 unidades + 5 unidades = 8 unidades. Luego, sume las decenas: 2 decenas + 0 decenas = 2 decenas • Por último, sume las centenas: 1 centena + 0 centenas = 1 centena Por lo tanto, 123 + 5 = 128. • Enseñe a sus estudiantes a presentar la suma en forma vertical: 1 2 3 + 5 1 2 8 • Aplicando el mismo procedimiento del ejercicio, trabaje este ejemplo con sus estudiantes. • Diga a sus estudiantes que, en este ejemplo, se está sumando un número de 2 dígitos a un número de 3 dígitos.	• Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional.	10´

<table>
<tr><th>N° DE ACTIVIDAD</th><th>ESTRATEGIA</th><th>RECURSOS</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>2</td><td>• Permita que sus estudiantes trabajen las sumas en forma individual o en pares.</td><td rowspan="4">•Representaciones concretas, como bloques base diez
• Tablas de valor posicional.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• Explique esta suma con procedimientos similares a los del ejercicio.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Motive a sus estudiantes a que realicen este ejercicio. Pida voluntarios que expliquen el procedimiento de sumar las unidades primero, luego las decenas y, por último, las centenas.
• • Motive a sus estudiantes para que digan:
“5 unidades + 2 unidades = 7 unidades”;
“3 decenas + 4 decenas = 7 decenas”;
“1 centena + 3 centenas = 4 centenas”</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>5</td><td>• Haga que sus estudiantes trabajen el ejercicio, relacionando el problema con la suma de números.
• Ellos deberían descubrir que el problema involucra el concepto “parte-todo” y el problema la “comparación”.</td><td>10´</td></tr>
</table>

PROGRAMACIÓN N° 09
RESTA SIMPLE HASTA 1000

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas, para mostrar la resta de un número de 1, 2 o 3 dígitos de un número de 3 dígitos.
- Restar un número de 1,2 o 3 dígitos de un número de 3 dígitos sin reagrupar, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la resta de un número de 1, 2 o 3 dígitos de un número de 3 dígitos, sin reagrupar.

HABILIDAD
• Comparar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Introduzca la estrategia y procedimientos para restar números: reste de derecha a izquierda (reste primero las unidades, luego las decenas y por último las centenas). • Muestre y explique cómo restar números hasta 1000 usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Muestre cómo restar 3 de 384. Primero, reste las unidades: 4 unidades - 3 unidades = 1 unidad, luego, reste las decenas: 8 decenas - 0 decenas = 8, decenas por último, reste las centenas: 3 centenas - 0 centenas = 3 centenas • Enseñe a sus estudiantes a presentar su respuesta tanto en forma vertical como horizontal. Los estudiantes deben alinear todos los dígitos de las unidades, todos los dígitos de las decenas y todos los dígitos de las centenas. 384 - 3 38 1 • Siga el mismo procedimiento del ejercicio a para restar un número de 2 dígitos de un número de 3 dígitos con representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Estimule a los estudiantes para que participen en las explicaciones.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´

Nº DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
2	• Refuerce las estrategias aprendidas por los estudiantes pidiendo que hagan este ejercicio. • Nota: Los estudiantes suelen equivocarse al alinear los dígitos. Tienden a hacer lo siguiente: 459 – 46	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
3	• Siga el mismo procedimiento del ejercicio 1 para restar un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos con representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Estimule a los estudiantes para que participen en las explicaciones. • Explique a los estudiantes el procedimiento para restar: reste de derecha a izquierda. Reste primero las unidades, luego las decenas y, por último, las centenas. • Muestre cómo: Primero, reste las unidades: 9 unidades - 4 unidades = 5 unidades Luego, reste las decenas: 4 decenas - 3 decenas = 1 decena • Por último, reste las centenas: 2 centenas - 1 centena = 1 centena. • Presente la resta en forma vertical: 249 - 1 34 1 1 5		10´
4	• Utilice esta actividad para reforzar la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de valor posicional en la resta.		10´
5	• Guíe a los estudiantes para que trabajen el ejercicio relacionando el problema con la resta de números. • Los estudiantes deben darse cuenta que se aplica el concepto “parte-todo” en la resolución de los problemas.		10´

PROGRAMACIÓN N° 10
SUMAR REAGRUPANDO LAS UNIDADES

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas para mostrar la suma de dos números de 3 dígitos, reagrupando las unidades.
- Sumar un número de 3 dígitos a otro número de 3 dígitos reagrupando las unidades, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la suma de un número de 3 dígitos a otro número de 3 dígitos, reagrupando las unidades.

HABILIDAD

• Comparar • Reagrupar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre y explique la reagrupación de unidades en decenas usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Pida que los estudiantes recuerden el procedimiento para la suma: sumar de derecha a izquierda. • Explique la reagrupación: "Suma las unidades. 7 unidades + 9 unidades = 16 unidades. Reagrupa las unidades. 16 unidades = 1 decena 6 unidades. Suma las decenas. 1 decena + 4 decenas + 2 decenas = 7 decenas. Suma las centenas. 3 centenas + 1 centena = 4 centenas.'' • Enseñe a los estudiantes a presentar sus respuestas tanto en forma vertical como horizontal. • Destaque la importancia de alinear todos los dígitos de las unidades, todos los dígitos de las decenas y todos los dígitos de las centenas.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
2	• Refuerce las estrategias aprendidas por los estudiantes haciendo que realicen este ejercicio.		10´
3	• Utilice esta actividad para reforzar en los estudiantes la estrategia para restar y así lograr la comprensión del concepto de valor posicional en la suma.		10´

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
4	• Pida que los estudiantes trabajen el ejercicio relacionando los problemas con la suma de números. • Los estudiantes deben darse cuenta que para la resolución de los problemas se aplica el concepto “parte-todo” en la suma.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
5	• Pida que los estudiantes jueguen en grupos de 4 a 6. • Los estudiantes deben turnarse para tirar los dos dados. Deben sumar los números que aparecen en los dos dados. • Luego, los estudiantes deben tomar la misma cantidad de cubos. Si el estudiante tiene 10 cubos, debe canjearlo por una barra de decenas. • Continúe con el juego hasta que un jugador obtenga 10 barras de decenas, haciendo una placa de centenas. Este jugadores el ganador.	• 2 dados • Bloques base diez	10´

PROGRAMACIÓN N° 11
SUMAR REAGRUPANDO LAS DECENAS

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas para mostrar la suma de un número de 2 dígitos a un número de 3 dígitos, reagrupando las decenas
- Sumar un número de 3 dígitos a otro número de 3 dígitos reagrupando las decenas, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la suma de un número de 3 dígitos a otro número de 3 dígitos reagrupando las decenas.

HABILIDAD

• Comparar •Reagrupar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre y explique la reagrupación de decenas en centenas, usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Pida a los estudiantes que recuerden el procedimiento para la suma: sumar de derecha a izquierda. • Explique el procedimiento de reagrupación: • (Recuerde a los estudiantes que 10 decenas = 1 centena). "Suma las unidades primero. 2 unidades y 3 unidades = 5 unidades. Luego, suma las decenas. 8 decenas + 9 decenas = 17 decenas. Reagrupa las decenas en centenas y decenas. 17 decenas = 1 centena 7 decenas." • Junte las 10 barras de decena para mostrar 1 placa de centena.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
2	• Refuerce las estrategias aprendidas por los estudiantes haciendo que realicen esta actividad.		10´
3	• Utilice esta actividad para reforzar aún más en los estudiantes la estrategia para "sumar" y la "comprensión del concepto de valor posicional" en la suma.		10´
4	• Pida a los estudiantes que trabajen el ejercicio relacionando el problema con la suma de números. • Los estudiantes deben descubrir que en la resolución del problema se aplica el concepto "parte-todo" en la suma.		10´

PROGRAMACIÓN N° 12
SUMAR REAGRUPANDO LAS DECENA Y LAS UNIDADES

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas, para mostrar la reagrupación de unidades a decenas y de decenas a centenas en la suma.
- Sumar un número de 3 dígitos a otro número de 3 dígitos reagrupando las unidades y las decenas, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la suma de un número de 3 dígitos a otro número de 3 dígitos, reagrupando las unidades y las decenas.

HABILIDAD

• Comparar • Reagrupar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre y explique la reagrupación de decenas en centenas usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Pida a los estudiantes que recuerden el procedimiento para la suma: sumar de derecha a izquierda. • Explique el procedimiento de reagrupación: (Recuerde con los estudiantes que 10 decenas = 1 centena). “Primero, suma las unidades. Hay 14 unidades". Pregunte a los estudiantes qué deben hacer. Guíe a los estudiantes a descubrir que deben canjear las 10 unidades por 1 decena. “14 unidades = 1 decena 4 unidades. Suma 1 decena a las decenas existentes. Ahora tenemos 1 decena + 7 decenas + 8 decenas = 16 decenas". Guíe a los estudiantes a descubrir que deben canjear las 10 decenas por 1 placa de centena. • Diga: “Suma 1 centena a las centenas existentes. 1 centena + 2 centenas + 3 centenas. Ahora hay 6 centenas. Obtenemos seiscientos sesenta y cuatro. 278 + 386 = 664”.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´

Nº DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
2	• Refuerce las estrategias aprendidas por los estudiantes haciendo que realicen esta actividad. • Pida voluntarios para que guíen al curso en la suma de 153 y 449. Pida que los estudiantes participen en la explicación de los pasos de la suma y en destacar la importancia de alinear los dígitos de las centenas, decenas y unidades.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
3	• Utilice esta actividad para reforzar aún más en los estudiantes la estrategia para “sumar” y la “comprensión del concepto de valor posicional” en la suma.		10´
4	• Pida que los estudiantes trabajen el ejercicio relacionando los problemas con la suma de números. • Los estudiantes deben darse cuenta que se aplican los conceptos “parte-todo”, “agregar” y “comparar” en la suma para la resolución de los problemas a, b y c respectivamente.		10´

PROGRAMACIÓN N° 13
EXPLOREMOS

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Realiza juegos matemáticos para explorar los aprendido

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	Organice a los estudiantes en grupos de 2 a 4. • Pida que los estudiantes escriban 3 conjuntos de tarjetas con números del 0 al 9 en trozos de papel o tarjetas (del tamaño de la palma de la mano). • Pida que los estudiantes sigan las instrucciones dadas en el • Libro del Alumno: “Mezcla las tarjetas. Cada jugador toma seis tarjetas y las ordena para obtener dos números de 3 dígitos. • Suma los dos números. Intenta obtenerla suma más alta que puedas. El jugador con la mayor suma gana.” • Pida que los estudiantes repitan la actividad 4 veces más.	• 3 juegos de cartas con números del 0 al 9 • Hojas de papel	30´

PROGRAMACIÓN N° 14
RESTAR AGRUPANDO LAS DECENAS Y UNIDADES

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas, para mostrar la reagrupación de unidades a decenas y de decenas a centenas en la resta.
- Restar un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos reagrupando de decenas a unidades, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la resta de un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos, reagrupando de decenas a unidades.

HABILIDAD

• Comparar •Clasificar •Identificar relaciones •Secuenciar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre y explique la reagrupación de decenas a unidades usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Pida a los estudiantes que recuerden el procedimiento para la resta: restar de derecha a izquierda. • Explique a los estudiantes el procedimiento de resta y reagrupación: (Recuerde con los estudiantes que 10 unidades = 1 decena) "Ya que 2 unidades son menos que 8 unidades, necesitamos reagrupar 1 decena en 10 unidades, obteniendo12 unidades. 4 decenas = 3 decenas + 10 unidades. 10 unidades + 2 unidades = 12 unidades." • Diga: "Luego, resta: 12 unidades - 8 unidades=4 unidades • Ahora, resta 2 decenas de 3 decenas y 1 centena de 2 centenas, obteniendo 1 centena, 1 decena y 4 unidades. Por lo tanto, 242-128=114"	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
2	• Utilice esta actividad para reforzar las estrategias aprendidas. • Pida que los estudiantes trabajen en los procedimientos requeridos para restar 207 de 763. • Explique nuevamente los pasos a seguir: (1) Primero reagrupa las decenas y las unidades. (2) Resta las unidades. (3) Después, resta las decenas. (4) Por último, resta las centenas.		10´
3	• Utilice esta actividad para reforzar aún más la estrategia para "restar" y la "comprensión del concepto de valor posicional" en la resta.		10´
4	• Pida que los estudiantes trabajen el ejercicio relacionando el problema con la resta de números. • Los estudiantes deben darse cuenta que se aplica el concepto "parte-todo" en la resolución del problema.		10´

PROGRAMACIÓN N° 15
RESTAR REAGRUPANDO LAS CENTENAS Y LAS DECENAS

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas, para mostrar la reagrupación de centenas a decenas en la resta.
- Restar un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos reagrupando de centenas a decenas, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la resta de un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos, reagrupando de centenas a decenas.

HABILIDAD

• Comparar • Reagrupar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre y explique la reagrupación de centenas en decenas usando representaciones concretas y tablas de valor posicional. • Pida a los estudiantes recordar el procedimiento para la resta: restar de derecha a izquierda. • Explique a los estudiantes el procedimiento de resta y reagrupación: (Recuerde con los estudiantes que 10 decenas = 1 centena) • Diga: “7 unidades - 2 unidades = 5 unidades.” • Diga: “Ya que 3 decenas son menos que 7 decenas, necesitamos reagrupar 1 centena en 10 decenas, obteniendo 13 decenas. 4 centenas = 3 centenas 10 decenas. 10 decenas + 3 decenas -13 decenas.” • Diga: “Luego, resta: 13 decenas - 7 decenas = 6 decenas. Después resta las centenas: 4 centenas - 2 centenas = 2 centenas. Por lo tanto, 537 - 272 = 265.” • Nota: Es posible que algunos estudiantes no puedan reagrupar y tiendan a restar el número mayor del menor. Por ejemplo, -5 3 7 2 72 345 • El docente debe enfatizar que esto no se debe hacer.	•Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´

<table>
<tr><th>N° DE ACTIVIDAD</th><th>ESTRATEGIA</th><th>RECURSOS</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Refuerce las estrategias aprendidas por los estudiantes pidiendo que realicen esta actividad.
Pida que los estudiantes trabajen en los procedimientos para restar 383 de 719.
Vuelva a enfatizar los pasos involucrados:
(1) Reagrupar las centenas en decenas.
(2) Restar las unidades.
(3) Luego, restar las decenas.
(4) Por último, restar las centenas.</td><td rowspan="3">•Representaciones concretas, como bloques base diez
• Tablas de valor posicional</td><td>10’</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Utilice esta actividad para reforzar la estrategia para “restar” y la “comprensión del concepto de valor posicional” en la resta.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Pida que los estudiantes trabajen los ejercicios relacionando los problemas con la resta de números.
Los estudiantes deben darse cuenta que se aplica el concepto de “comparar” en la resolución de los problemas.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Organice a los estudiantes en grupos de 4 a 6. Uno de ellos actúa de banquero.
Cada jugador recibe una placa de centena del banquero.
Los jugadores canjean la placa por 10 barras de decena al banquero.
Por turnos, cada jugador lanza los dos dados, y suma los números que aparecen. Si los números son 2 y 1, la suma es 3. Saca 3 unidades. El jugador debe canjear 1 decena por 10 unidades antes de entregar las 3 unidades.
En su turno, cada jugador devuelve los cubos. ¡El primer jugador que devuelve todos sus cubos y barras es el ganador!</td><td>• Bloques base diez para cada grupo
• 2 dados para cada grupo.</td><td>10´</td></tr>
</table>

PROGRAMACIÓN N° 16
RESTAR REAGRUPANDO LAS CENTENAS, DECENAS Y UNIDADES

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas, para mostrar la reagrupación de centenas a decenas y de decenas a unidades en la resta.
- Restar un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos, reagrupando de centenas a decenas y de decenas a unidades, tanto en formato vertical como horizontal
- Resolver problemas simples que involucran la resta de un número de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos, reagrupando de centenas a decenas y de decenas a unidades.

HABILIDAD

• Comparar •Reagrupar

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
1	• Muestre y explique la reagrupación de centenas a unidades usando representaciones concretas y una tabla de valor posicional. • Pida a los estudiantes que recuerden el procedimiento para la resta: restar de derecha a izquierda. • Explique a los estudiantes el procedimiento de resta y reagrupación: (Recuerde con los estudiantes que 10 decenas = 1 centena y10 unidades = 1 decena). “Ya que no podemos restar 8 unidades de 2 unidades, necesitamos reagrupar las decenas y las unidades. 3 decenas 2 unidades —► 2 decenas 12 unidades.” • Diga: “Resta 8 unidades de 12 unidades. Ahora bien, no podemos restar 7 decenas de 3 decenas, por lo que reagrupamos las centenas 4 centenas 2 decenas —>3 centenas 12 decenas.” • Diga: “Resta 7 decenas de 12 decenas. Resta 1 centena de 3 centenas. Por lo tanto, 432 - 178 = 254” • Nota: Algunos estudiantes tienden a restar el dígito mayor del dígito menor sin reagrupar. Por ejemplo, 432 - 1 78 • Pregunte a los estudiantes si esto está correcto y pida que expliquen por qué está incorrecto.	• Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´

N° DE ACTIVIDAD	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
2	• Refuerce las estrategias aprendidas por los estudiantes con esta actividad. • Pida que los estudiantes trabajen en los procedimientos para restar 149 de 235. • Destaque nuevamente los pasos requeridos: (1) Reagrupar las centenas en decenas y las decenas en unidades. (2) Restar las unidades. (3) Después restar las decenas. (4) Por último, restar las centenas.	• Representaciones concretas, como bloques base diez • Tablas de valor posicional	10´
3	• Utilice esta actividad para reforzar aún más en los estudiantes la estrategia para “restar” y la “comprensión del concepto de valor posicional” en la resta.		10´
4	• Pida que los estudiantes trabajen el ejercicio relacionando el problema con la resta de números. • Los estudiantes deben darse cuenta que se aplica el concepto de “comparar” en la resolución del problema.		10´

PROGRAMACIÓN N° 17
RESTAR CON NÚMEROS QUE TIENEN CEROS

OBJETIVOS: Los alumnos y alumnas serán capaces de:

- Utilizar tablas de valor posicional y representaciones concretas, para mostrar la reagrupación de centenas a decenas, y luego de decenas a unidades, en restas en las cuales el minuendo está en centenas.
- Restar un número de 2 dígitos de otro número de 3 dígitos en centenas, reagrupando de centenas a decenas y luego de decenas a unidades, tanto en formato vertical como horizontal.
- Resolver problemas simples que involucran la resta de un número de 2 o de 3 dígitos de otro número de 3 dígitos en centenas, reagrupando de centenas a decenas y de decenas a unidades

HABILIDAD

• Comparar •Reagrupar

<table>
<tr><th>N° DE ACTIVIDAD</th><th>ESTRATEGIA</th><th>RECURSOS</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>• Pregunte a los estudiantes: “¿Cuánto es 200 - 18? ¿Cómo debemos resolver esto?’’
• Utilice representaciones concretas y tablas de valor posicional para ayudar a los estudiantes a ver la necesidad de reagrupar las centenas primero, luego reagrupar las decenas y, por último, las unidades.
200 = 2 centenas = 1 centena 10 decenas = 1 centena 9 decenas 10 unidades
• Nota: Los estudiantes deben saber cómo alinear los dígitos.
Pregunte si lo siguiente está correcto: 200 -1 8
• Pida que expliquen sus respuestas.
• Enfatice nuevamente la necesidad de restar las unidades primero, luego las decenas y, por último las centenas
• Diga a los estudiantes: “Resta la unidades primero. 10 unidades - 8 unidades = 2 unidades Luego, resta las decenas. 9 decenas - 1 decena = 8 decenas.
Por último, resta las centenas. 1 centena - 0 centenas = 1 centena.
Por lo tanto, 200-18= 182”</td><td rowspan="4">• Representaciones concretas, como bloques base diez
• Tablas de valor posicional</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• Pida voluntarios que sigan los pasos necesarios para resolver este problema con representaciones concretas y tablas de valor posicional.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• Utilice esta actividad para reforzar aún más en los estudiantes la estrategia para “restar” y la “comprensión del concepto de valor posicional” en la resta.</td><td>10´</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Pida que los estudiantes trabajen los ejercicios relacionando los problemas con la resta de números.
• Los estudiantes deben darse cuenta que se aplican los conceptos de “quitar” y “comparar” en la resolución de estos problemas.</td><td>10´</td></tr>
</table>

ANEXO N° 6

CUADERNO DE TRABAJO PARA EL ALUMNO

DEL MÉTODO SINGAPUR

1 Números hasta 1000

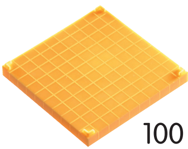
¡Aprendamos!

Contando

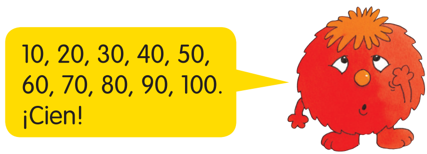
1 Gugo usa 10  para formar una .

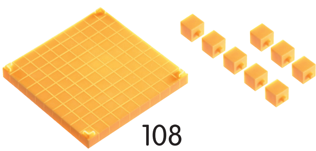
Luego pone 10  juntas.

10 decenas = 100 unidades



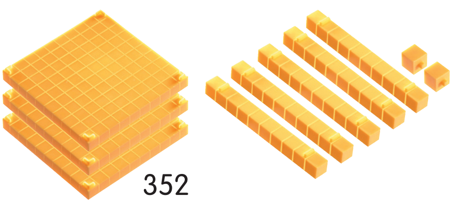
100





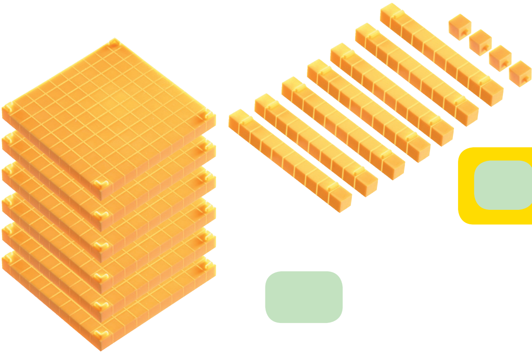
108

2



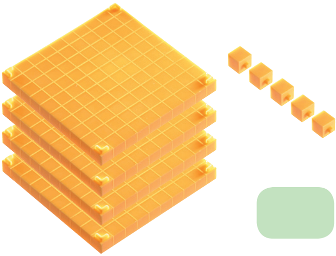
352

3 ¿Cuántos hay?



cientos

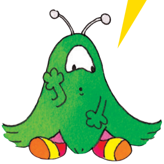
4 ¿Cuántos hay?

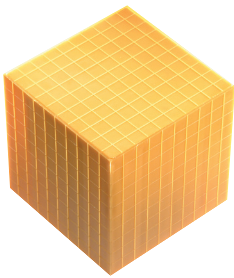


cientos

5

¿Qué número viene después de 999?

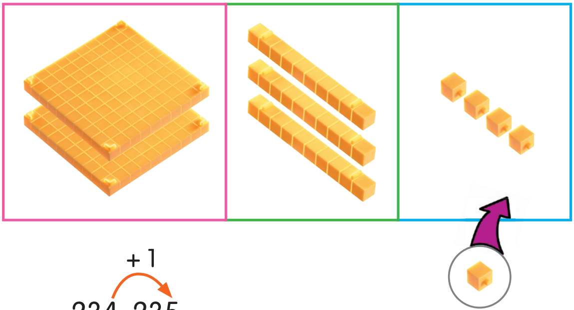




1000 ¡Mil!

Contando hacia adelante de uno en uno

6



$+1$

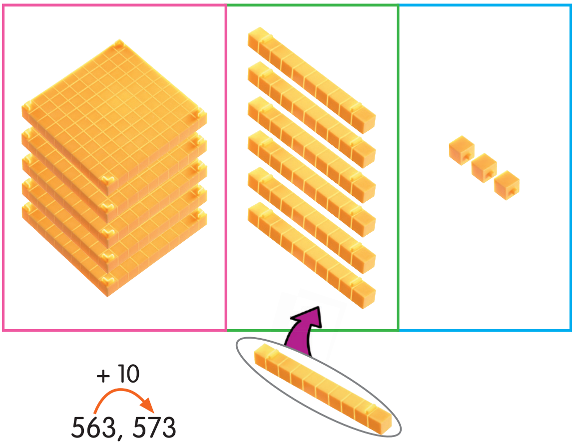
234, 235

7 Cuenta hacia adelante de uno en uno.

424, 425, 426, ____, ____, ____, ____, ____

Contando hacia adelante de diez en diez

8



$+10$

563, 573

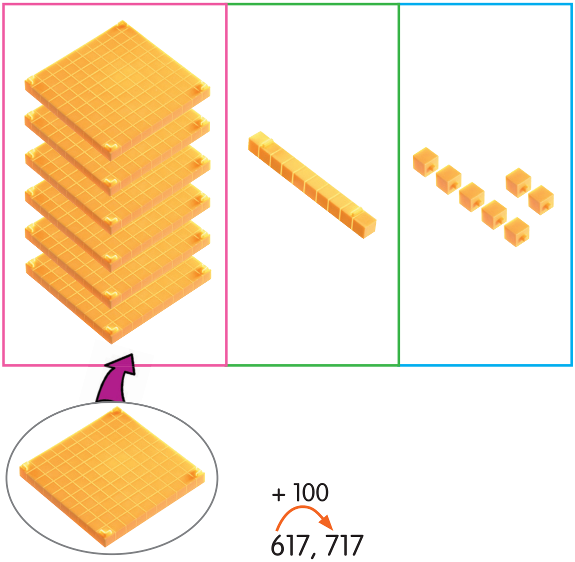
9 Cuenta hacia adelante de diez en diez.

a) 519, 529, 539, 549, ___, ___, ___, ___

b) 740, 750, 760, 770, ___, ___, ___, ___

Contando hacia adelante de cien en cien

10



+ 100

617, 717

11 Cuenta hacia adelante de cien en cien.

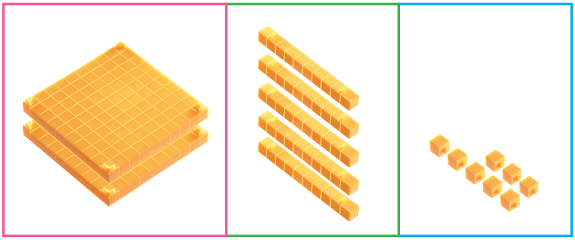
a) 260, 360, 460, ___, ___, ___

b) 435, 535, 635, ___, ___, ___

¡Aprendamos!

Valor posicional

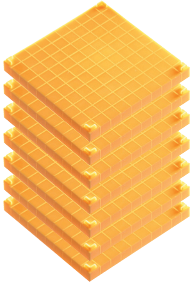
1 ¿Cuántos hay?

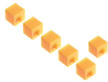


Centenas	Decenas	Unidades
2	5	8
significa 2 centenas ó 200	significa 5 decenas ó 50	significa 8 unidades u 8

En 258,
el dígito 8 está en el lugar de las unidades,
el dígito 5 está en el lugar de las decenas y
el dígito 2 está en el lugar de las centenas.

2





Centenas	Decenas	Unidades
significa	significa	significa
centenas	decenas	unidades
ó	ó	ó

706 = centenas decenas unidades

706 = + +

En 706,

el dígito está en el lugar de las unidades,

el dígito está en el lugar de las decenas y

el dígito está en el lugar de las centenas.

3 Completa lo siguiente:

a En 708,

el dígito 7 está en el lugar de las ______,

el dígito 0 está en el lugar de las ______ y

el dígito 8 está en el lugar de las ______.

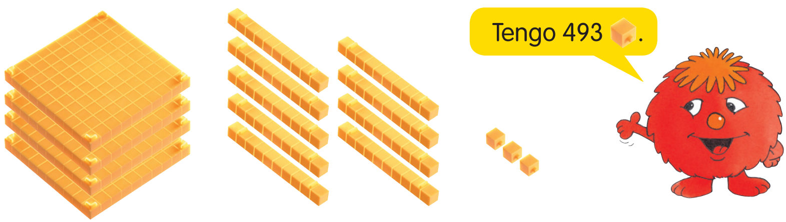
b En 960,

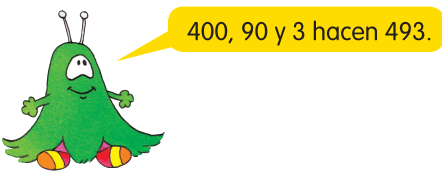
el dígito que está en el lugar de las centenas es ______,

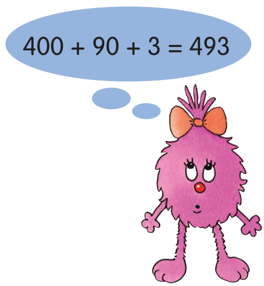
el dígito que está en el lugar de las decenas es ______ y

el dígito que está en el lugar de las unidades es ______.

4







5 Encuentra los números que faltan.

a 800, 60 y 7 hacen ______.

b 200 + 70 + 4 = ______

6  ¡Juguemos!

¡Muestra el número!

2 jugadores

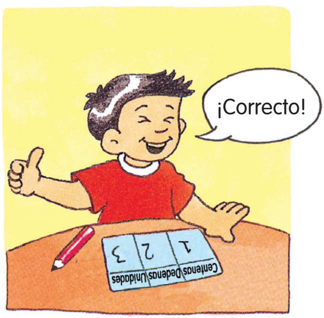
Necesitan:

- Bloques base diez.
- Tablas de valor posicional.

1 Tú muestras a tu amigo o amiga algunos .

2 Tu amigo o amiga cuenta los  y escribe el número en la tabla de valor posicional.

3 Tú compruebas la respuesta de tu amigo o amiga.



4 Hagan turnos para mostrar y escribir.
Por cada respuesta correcta obtienes un punto.

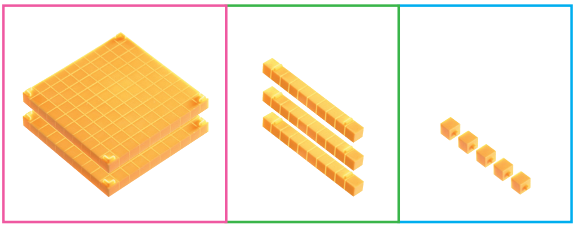
¡El jugador que obtiene más puntos gana!

¡Aprendamos!

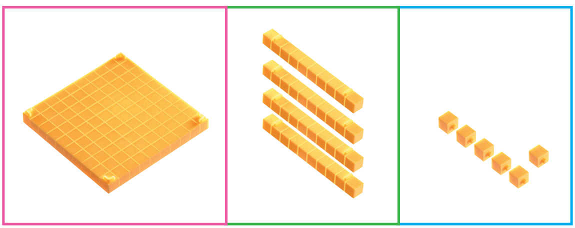
Comparando números hasta 1000

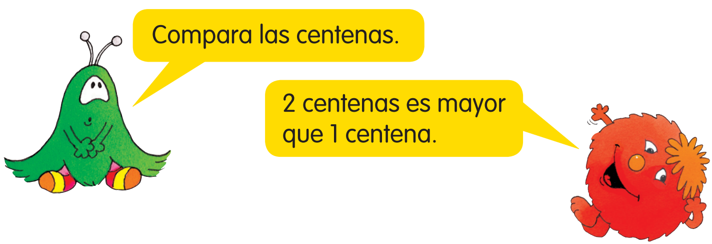
1 Gugo necesita elegir el conjunto mayor.
¿Qué conjunto elegirá, A o B?

Conjunto A
235



Conjunto B
146





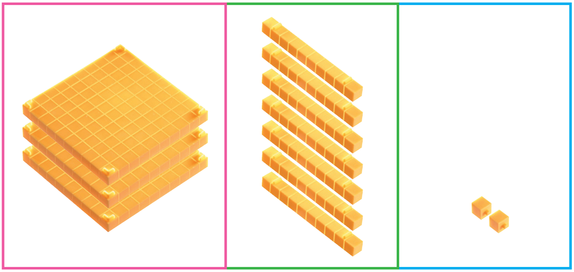
Entonces, 235 es mayor que 146.
Gugo elegirá el conjunto A.

2

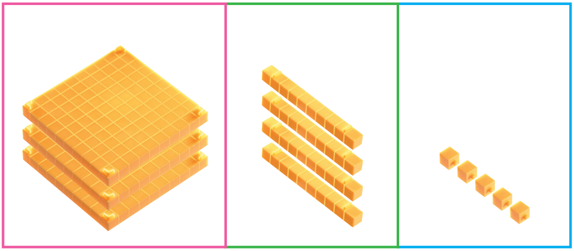
Si dos números tienen la misma cantidad de centenas, tienes que comparar las decenas.

Ahora, Gugo quiere elegir el conjunto menor.
¿Qué conjunto elegirá, A o B?

Conjunto A
372



Conjunto B
345



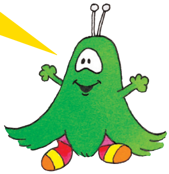
Primero, compara las centenas.
Son iguales.
Luego, compara las decenas.

4 decenas es menor que 7 decenas.

Entonces, 345 es menor que 372.
Gugo elegirá el conjunto B.

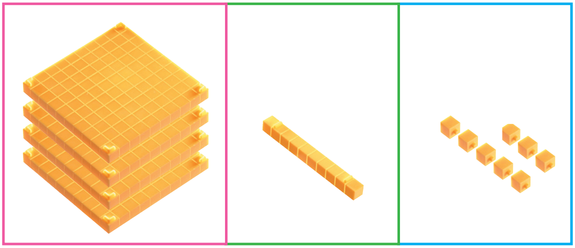
3

Si dos números tienen la misma cantidad de centenas y decenas, tienes que comparar las unidades.

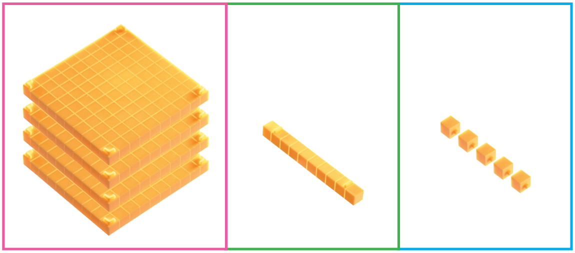


¿Cuál es mayor?
¿Cuál es menor?

Conjunto A
418

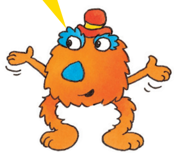


Conjunto B
415



Primero, compara las centenas. Ambas son iguales.

Luego, compara las decenas. Ambas son iguales.

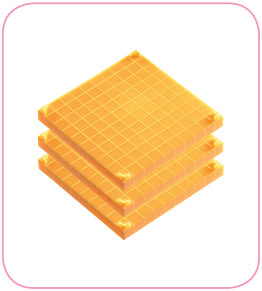


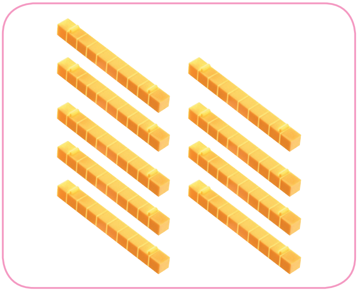
Finalmente, compara las unidades.
5 unidades es menor que 8 unidades.

418 es mayor que 415.
415 es menor que 418.

4 ¿Cuál es mayor?
¿Cuál es menor?
Usa **mayor que** o **menor que**.

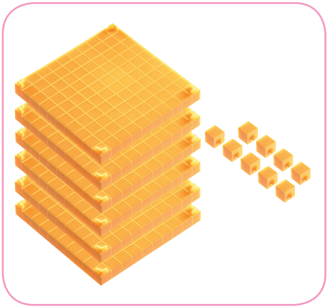
a

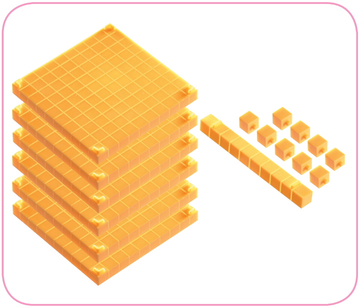




300 es ______ 90.

b





609 es ______ 619.

5 Completa lo siguiente:
Escribe **mayor que** o **menor que**.

a 233 es ______ 333.

b 715 es ______ 709.

c 564 es ______ 560.

d 479 es ______ 497.

6  ¡Juguemos!

¡Lanza y registra!

3 jugadores
Necesitan: 

- Un dado de 10 caras.
- Una hoja de papel.

1 Nombra a cada jugador como A, B o C. El jugador A lanza el dado tres veces para formar un número de 3 dígitos. El jugador C lo escribe.

2 El jugador B lanza el dado tres veces para formar otro número de 3 dígitos. El jugador C escribe este número bajo el anterior.

3 El jugador C mira los números y escribe **menor que** o **mayor que** entre los dos números. Los otros jugadores comprueban la respuesta.

4 Hagan turnos para lanzar y escribir.

¡El jugador con más respuestas correctas gana!

¡Aprendamos!

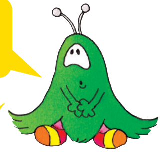
Orden y secuencias

1 Ordena los números 489, 236 y 701.
Comienza por el menor.

	Centenas	Decenas	Unidades
489	4	8	9
236	2	3	6
701	7	0	1

Compara las centenas.

701 es mayor que 489 y 236.



701 es el mayor.
236 es el menor.

236, 489, 701

menor

489 es mayor que 236.

2 Ordena los números 459, 574 y 558.
Comienza por el mayor.

	Centenas	Decenas	Unidades
459	4	5	9
574	5	7	4
558	5	5	8

_____ es el mayor.

_____ es el menor.

_____, _____, _____

mayor

Diario Matemático

247	724	274	427

1 ¿Cuál de éstas es la forma correcta?

a) Siempre tengo que comparar primero las unidades, luego las decenas y finalmente las centenas.

b) Siempre tengo que comparar primero las decenas, luego las centenas y finalmente las unidades.

c) Siempre tengo que comparar primero las centenas, luego las decenas y finalmente las unidades.

d) Siempre tengo que comparar primero las centenas, luego las unidades y finalmente las decenas.

2 Gugo ordena los números, comenzando por el menor.

724	247	274	427
menor			

¿Es correcto lo que hizo Gugo?

Escribe algunas frases para explicar por qué está correcto o incorrecto.

Ejemplo

724 no es el número menor.

3 Realiza lo siguiente.

a Ordena los números.

707 904 762 555

Comienza por el menor.

b Ordena los números.

368 555 357 699 553

Comienza por el mayor.

4 Los números de la cinta numerada están en una secuencia.
En la cinta faltan algunos números.
Ayuda a Gugo a encontrar los números que faltan.

1 más que 253 es 254.

243	244	245	246		248	249		251	252	253		255

1 más que 246 es 247.

1 menos que 251 es 250.

Los números que faltan son 247, 250 y 254.

5 Los números de la cinta están en una secuencia.
Encuentra los números que faltan.

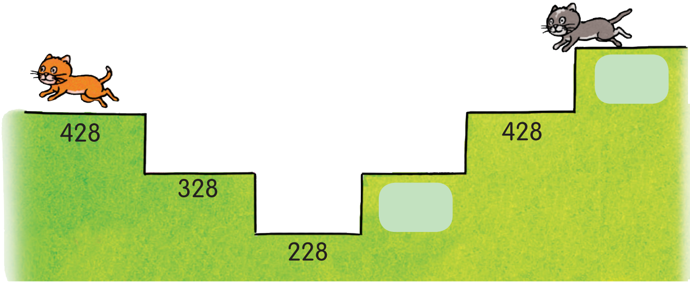
10 más que 821 es ____.

721	731	741	751		771	781		801	811	821		841

10 más que 751 es ____.

10 menos que 801 es ____.

6 Los números en la escalera están en una secuencia. Encuentra los números que faltan en la escalera.



7 Completa lo siguiente:

a) 1 menos que 999 es ____.

b) 20 más que 415 es ____.

c) 100 más que 900 es ____.

d) 200 menos que 635 es ____.

e) 442, 542, 642, 742, ____, ____

f) 884, 874, 864, ____, 844, ____

g) 298, 299, ____, ____, 302, 303

h) 342, ____, ____, ____, 338, 337

i) ____, 810, 820, ____, ____, 850

j) ____, ____, 332, 232, 132, ____

Matemática en la casa

Use los bloques base diez para trabajar con su hijo o hija los números hasta 1000. Muestre a su hijo o hija un conjunto de bloques que represente cierto número. Luego, pídale que represente con bloques un número que sea 1, 10 ó 100 unidades mayor que dicho número.

¡Juguemos!

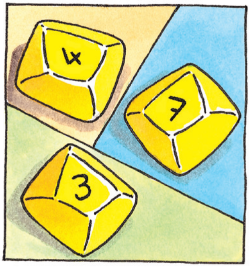
¡Lanza y cuenta!

4 a 6 jugadores

Necesitan:

- Un dado de 10 caras.
- Una hoja de papel.

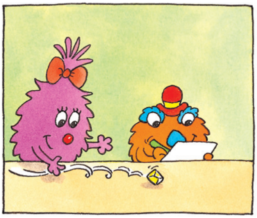
1 Lanza el dado tres veces para formar un número de 3 dígitos. Si el número formado es 900 o más, lanza el dado tres veces nuevamente para formar otro número de 3 dígitos.



2 Pide a tus amigos y amigas que completen la tabla.

Número formado	
1 más que el número	
1 menos que el número	
10 más que el número	
10 menos que el número	
100 más que el número	
100 menos que el número	

3 Hagan turnos para lanzar y contar.



¡El jugador con más respuestas correctas gana!

¡Exploremos!

Pilar y Katy quieren saber cuántos números hay desde:

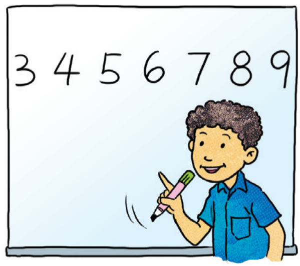
a 3 hasta 9 b 8 hasta 15 c 17 hasta 27

Ellas usan diferentes métodos para encontrar la respuesta.

Pilar

Katy

	Método de Pilar	Método de Katy
a 3 hasta 9	7	9 – 3 = 6
b 8 hasta 15	8	15 – 8 = 7
c 17 hasta 27	11	27 – 17 = 10



Diego

Diego comprueba las respuestas y muestra que el método de Pilar es correcto. Luego mira las respuestas de Katy y Pilar y encuentra un patrón. La respuesta de Pilar fue siempre 1 más que la respuesta de Katy.

1 Cuántos números hay desde:

a 22 hasta 38 **b** 44 hasta 79 **c** 24 hasta 94

2 Comprueba contando tus respuestas del ejercicio **1**.

¡Activa tu mente!

1 Encuentra los números que faltan.

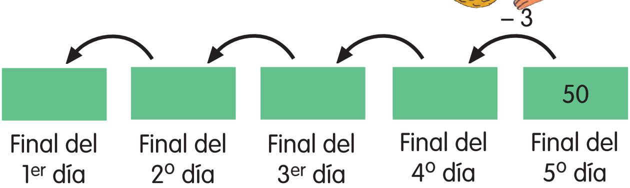
a 400 425 450 *475* 500 *525*

b 560 450 340 *230* *120* 10

¡Activa tu mente!

2 La ardilla Polita recolecta alimentos para el invierno.
Ella recolectó algunas bellotas y recoge cada día 3 bellotas más.
Sigue recolectando bellotas por 5 días.
Al final del quinto día, Polita ha recolectado 50 bellotas.

a ¿Cuántas bellotas tenía Polita al final del primer día?



b Si la ardilla Polita sigue recogiendo 3 bellotas cada día, ¿en cuántos días más tendrá 62 bellotas?

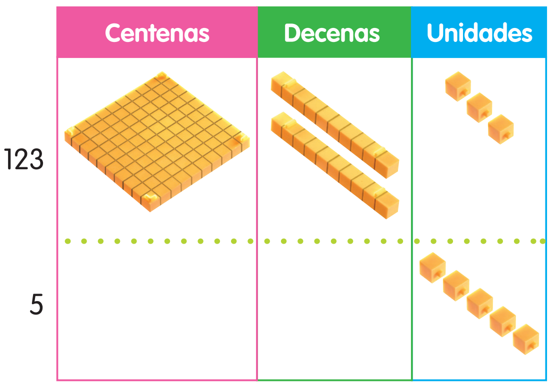
2 Adición y sustracción hasta 1000

¡Aprendamos!

Suma simple hasta 1000

1 Suma usando bloques base diez.
Usa la tabla de valor posicional para ayudarte.

a 123 + 5 = ?



Entonces, 123 + 5 = 128.

Primero, suma las unidades.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & 3 \\ + & & & 5 \\ \hline & & & 8 \end{array}$$

3 unidades + 5 unidades
= 8 unidades

Luego, suma las decenas.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & 3 \\ + & & & 5 \\ \hline & & 2 & 8 \end{array}$$

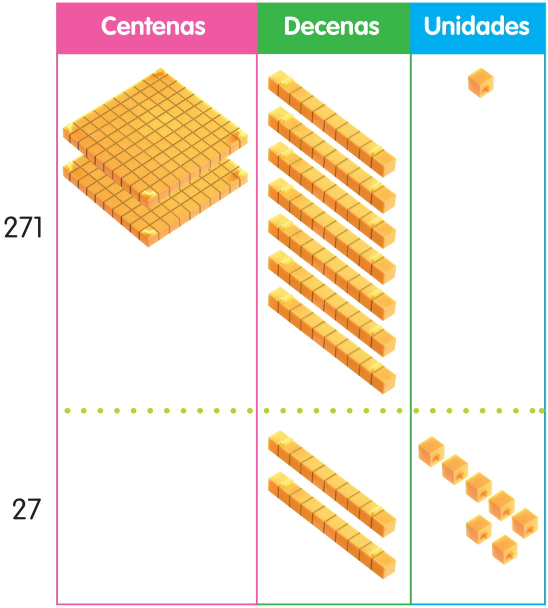
2 decenas + 0 decenas
= 2 decenas

Finalmente, suma las centenas.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & 3 \\ + & & & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

1 centena + 0 centenas
= 1 centena

b 271 + 27 = ?



Primero, suma las unidades.

$$\begin{array}{r} 2\ 7\ \boxed{1} \\ +\quad 2\ \boxed{7} \\ \hline \boxed{8} \end{array}$$

1 unidad + 7 unidades = 8 unidades

Luego, suma las decenas.

$$\begin{array}{r} 2\ \boxed{7}\ 1 \\ +\quad \boxed{2}\ 7 \\ \hline \boxed{9}\ 8 \end{array}$$

7 decenas + 2 decenas = 9 decenas

Finalmente, suma las centenas.

$$\begin{array}{r} \boxed{2}\ 7\ 1 \\ +\quad 2\ 7 \\ \hline \boxed{2}\ 9\ 8 \end{array}$$

2 centenas + 0 centenas = 2 centenas

Entonces, 271 + 27 = 298.

2 Realiza lo siguiente.

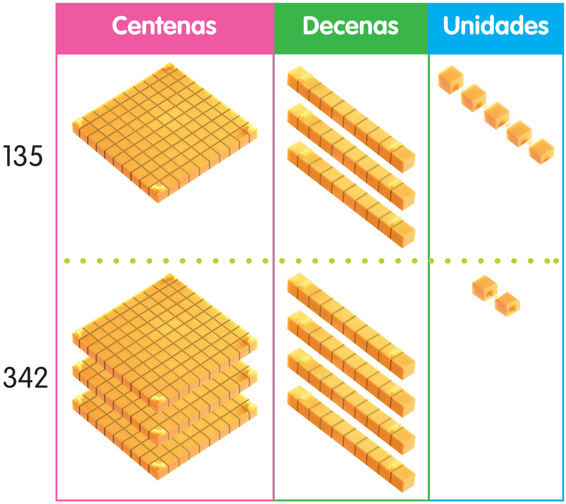
a 153 + 4

b 181 + 6

c 371 + 24

d 706 + 83

3 135 + 342 = ?



Entonces, 135 + 342 = 477.

Primero, suma las unidades.

$$\begin{array}{r} 1\,3\,5 \\ +\,3\,4\,2 \\ \hline 7 \end{array}$$

5 unidades + 2 unidades = 7 unidades

Luego, suma las decenas.

$$\begin{array}{r} 1\,3\,5 \\ +\,3\,4\,2 \\ \hline 7\,7 \end{array}$$

3 decenas + 4 decenas = 7 decenas

Finalmente, suma las centenas.

$$\begin{array}{r} 1\,3\,5 \\ +\,3\,4\,2 \\ \hline 4\,7\,7 \end{array}$$

1 centena + 3 centenas = 4 centenas

4 $623 + 254 = ?$

Primero, suma las unidades.
3 unidades + 4 unidades = ☐ unidades

Luego, suma las decenas.
2 decenas + 5 decenas = ☐ decenas

Finalmente, suma las centenas.
6 centenas + 2 centenas = ☐ centenas

Entonces, $623 + 254 =$ ☐.

Escribe 623 + 254
de esta manera.
Luego suma.

$$\begin{array}{r} 6\ 2\ 3 \\ +\ 2\ 5\ 4 \\ \hline \square \end{array}$$

5 Resuelve estos problemas.

a Gugo recolectó 445 revistas.
Mariela recolectó 321 revistas.
¿Cuántas revistas recolectaron en total?

b El sábado fueron 216 niños a la piscina.
El domingo fueron 102 niños más que el sábado.
¿Cuántos niños fueron a la piscina el domingo?

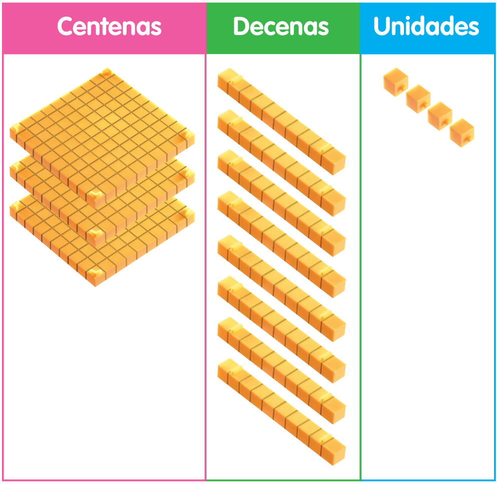
¡Aprendamos!

Resta simple hasta 1000

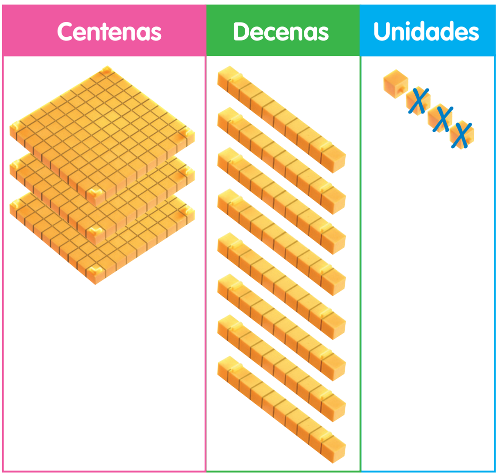
1 Resta usando bloques base diez.
Usa la tabla de valor posicional para ayudarte.

a 384 – 3 = ?

384



381



Primero, resta las unidades.

$$\begin{array}{r} 3\ 8\ \boxed{4} \\ -\quad\ \boxed{3} \\ \hline \boxed{1} \end{array}$$

4 unidades – 3 unidades
= 1 unidad

Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{r} 3\ \boxed{8}\ 4 \\ -\quad\ 3 \\ \hline \boxed{8}\ 1 \end{array}$$

8 decenas – 0 decenas
= 8 decenas

Finalmente, resta las centenas.

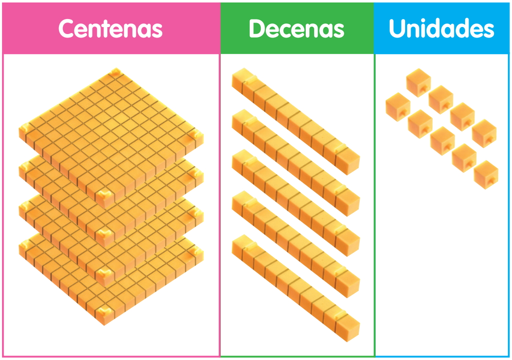
$$\begin{array}{r} \boxed{3}\ 8\ 4 \\ -\quad\ 3 \\ \hline \boxed{3}\ 8\ 1 \end{array}$$

3 centenas – 0 centenas
= 3 centenas

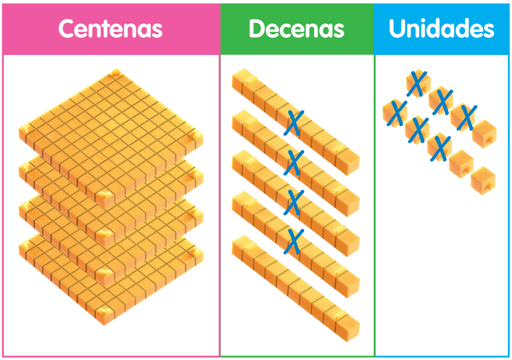
Entonces, 384 – 3 = 381.

b $459 - 46 = ?$

459



413



Entonces, $459 - 46 = 413$.

Primero, resta las unidades.

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 5 & \boxed{9} \\ - & & 4 & \boxed{6} \\ \hline & & & \boxed{3} \end{array}$$

9 unidades – 6 unidades
= 3 unidades

Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{cccc} & 4 & \boxed{5} & 9 \\ - & & \boxed{4} & 6 \\ \hline & & \boxed{1} & 3 \end{array}$$

5 decenas – 4 decenas
= 1 decena

Finalmente, resta las centenas.

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{4} & 5 & 9 \\ - & & 4 & 6 \\ \hline & \boxed{4} & 1 & 3 \end{array}$$

4 centenas – 0 centenas
= 4 centenas

2 Realiza lo siguiente.

a $408 - 6$

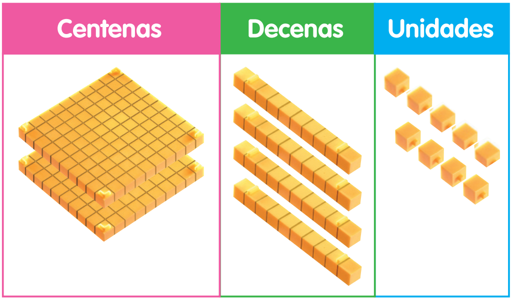
b $299 - 8$

c $655 - 40$

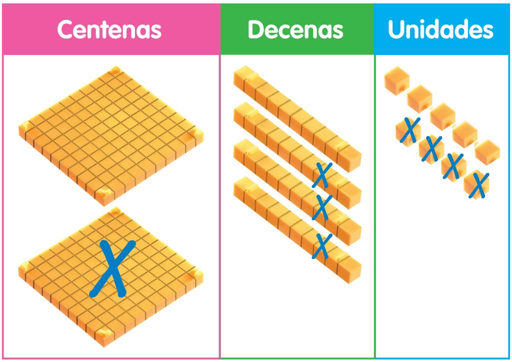
d $348 - 27$

3 249 – 134 = ?

249



115



Entonces, 249 – 134 = 115.

Primero, resta las unidades.

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 4 & \boxed{9} \\ - & 1 & 3 & \boxed{4} \\ \hline & & & \boxed{5} \end{array}$$

9 unidades – 4 unidades = 5 unidades

Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & \boxed{4} & 9 \\ - & 1 & \boxed{3} & 4 \\ \hline & & \boxed{1} & 5 \end{array}$$

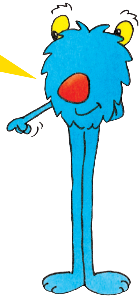
4 decenas – 3 decenas = 1 decena

Finalmente, resta las centenas.

$$\begin{array}{rrrr} & \boxed{2} & 4 & 9 \\ - & \boxed{1} & 3 & 4 \\ \hline & \boxed{1} & 1 & 5 \end{array}$$

2 centenas – 1 centena = 1 centena

4 $327 - 115 = ?$



Primero, resta las unidades.

7 unidades – 5 unidades = ____ unidades

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 7 \\ -\ 1\ 1\ 5 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Luego, resta las decenas.

2 decenas – 1 decena = ____ decena

Finalmente, resta las centenas.

3 centenas – 1 centena = ____ centenas

Entonces, 327 – 115 = ____.

5 Resuelve estos problemas.

a Gugo recogió 363 latas y botellas vacías en el parque.
Las botellas fueron 23.
¿Cuántas latas de bebida recogió Gugo?

b Hay 999 adultos en un concierto.
447 son hombres.
¿Cuántas mujeres hay?

¡Aprendamos!

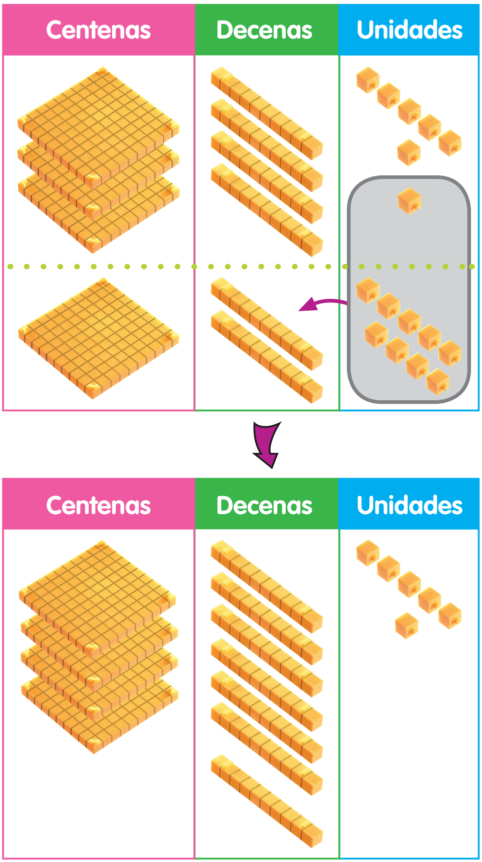
Sumar reagrupando las unidades

1 347 + 129 = ?

347

129

476



Entonces, 347 + 129 = 476.

Primero, suma las unidades.

$$\begin{array}{rrr} 3 & {}^{1}4 & 7 \\ +\ 1 & 2 & 9 \\ \hline & & 6 \end{array}$$

7 unidades + 9 unidades = 16 unidades

Reagrupa las unidades

16 unidades = 1 decena 6 unidades

Luego, suma las decenas.

$$\begin{array}{rrr} 3 & {}^{1}4 & 7 \\ +\ 1 & 2 & 9 \\ \hline & 7 & 6 \end{array}$$

4 decenas + 2 decenas + 1 decena = 7 decenas

Finalmente, suma las centenas.

$$\begin{array}{rrr} 3 & {}^{1}4 & 7 \\ +\ 1 & 2 & 9 \\ \hline 4 & 7 & 6 \end{array}$$

3 centenas + 1 centena = 4 centenas

2 136 + 127 = ?

Escribe 136 + 127 de esta manera. Luego suma.

$$\begin{array}{r} 1\,3\,6 \\ +\ 1\,2\,7 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$$

Primero, suma las unidades.

6 unidades + 7 unidades = ____ unidades

Reagrupa las unidades.

____ unidades = 1 decena ____ unidades

Luego, suma las decenas.

3 decenas + 2 decenas + 1 decena = ____ decenas

Finalmente suma las centenas.

1 centena + 1 centena = ____ centenas

Entonces, 136 + 127 = ____.

3 Suma, usa tablas de valor posicional para ayudarte.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} 6\ {}^{1}4\ 5 \\ +\ 2\ \ 3\ 5 \\ \hline 8\ \ 8\ 0 \end{array}$$

5 unidades + 5 unidades
= 10 unidades
= 1 decena

a
$$\begin{array}{r} 4\,2\,4 \\ +\ 4\,3\,9 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} 3\,1\,8 \\ +\ 5\,2\,8 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 7\,0\,6 \\ +\ 2\,7\,4 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$$

d
$$\begin{array}{r} 4\,0\,5 \\ +\ 5\,8\,8 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$$

4 Resuelve estos problemas.

a 637 niños y 257 adultos visitaron el Museo de Bellas Artes. ¿Cuántas personas visitaron el Museo en total?

b En la fiesta de aniversario de la escuela, Gugo vendió 162 helados de vainilla y 119 helados de chocolate. ¿Cuántos helados vendió Gugo en total?

5  ¡Juguemos!

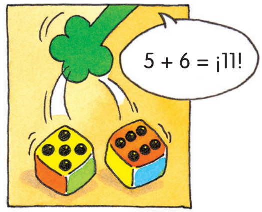
¡Arma una centena!

4 a 6 jugadores

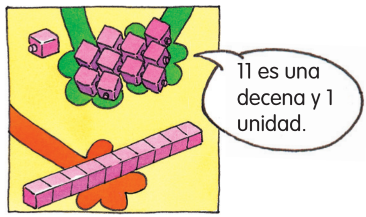
Necesitan:

- 2 dados.
- Bloques base diez.

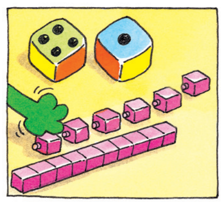
1 Lanza los dados.
Suma los números que obtienes.



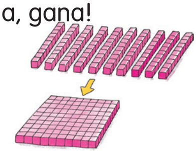
2 Toma ese número de .
Si tienes 10 , canjéalos por una .
Hagan turnos para jugar.



3 Cuando sea tu turno nuevamente, lanza los dados. Toma ese número de .
Súmalos a los y a las que tienes.



¡El primer jugador que obtiene 10 para formar una placa de centena, gana!



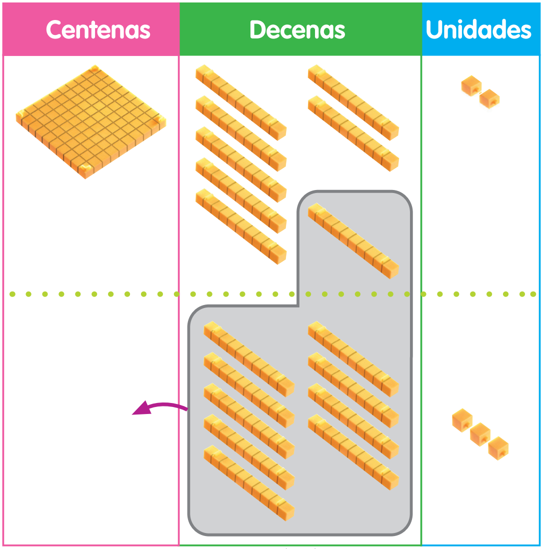
¡Aprendamos!

Sumar reagrupando las decenas

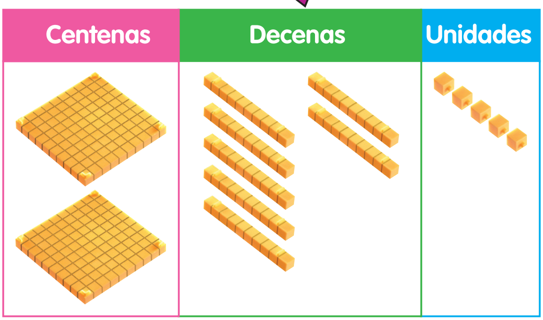
1 182 + 93 = ?

182

93



275



Entonces, 182 + 93 = 275.

Primero, suma las unidades.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 8 & 2 \\ + & & 9 & 3 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

2 unidades + 3 unidades
= 5 unidades

Luego, suma las decenas.

$$\begin{array}{rccc} & {}^{1}1 & 8 & 2 \\ + & & 9 & 3 \\ \hline & & 7 & 5 \end{array}$$

8 decenas + 9 decenas
= 17 decenas.

Reagrupa las decenas.
17 decenas
= 1 centena 7 decenas

Finalmente, suma las centenas.

$$\begin{array}{rccc} & {}^{1}1 & 8 & 2 \\ + & & 9 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 5 \end{array}$$

1 centena + 1 centena
= 2 centenas

2 $361 + 170 = ?$

$$\begin{array}{r} 3\ 6\ 1 \\ +\ 1\ 7\ 0 \\ \hline \text{\_\_\_} \end{array}$$

Primero, suma las unidades.

1 unidad + 0 unidades = ___ unidad

Luego, suma las decenas.

6 decenas + 7 decenas = ___ decenas

Reagrupa las decenas.

___ decenas = 1 centena ___ decenas

Finalmente, suma las centenas.

3 centenas + 1 centena + 1 centena = ___ centenas

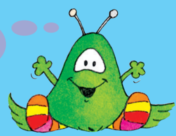
Entonces, 361 + 170 = ___.

3 Suma, usa las tablas de valor posicional para ayudarte.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} {}^{1}1\ 4\ 3 \\ +\ \ \ 8\ 1 \\ \hline 2\ 2\ 4 \end{array}$$

4 decenas + 8 decenas = 12 decenas
12 decenas = 1 centena y 2 decenas



a $\begin{array}{r} 4\ 9\ 0 \\ +\ 1\ 3\ 5 \\ \hline \text{\_\_\_} \end{array}$ **b** $\begin{array}{r} 3\ 8\ 4 \\ +\ 5\ 5\ 2 \\ \hline \text{\_\_\_} \end{array}$ **c** $\begin{array}{r} 5\ 3\ 5 \\ +\ 1\ 7\ 4 \\ \hline \text{\_\_\_} \end{array}$

d 266 + 562 **e** 730 + 98 **f** 345 + 264

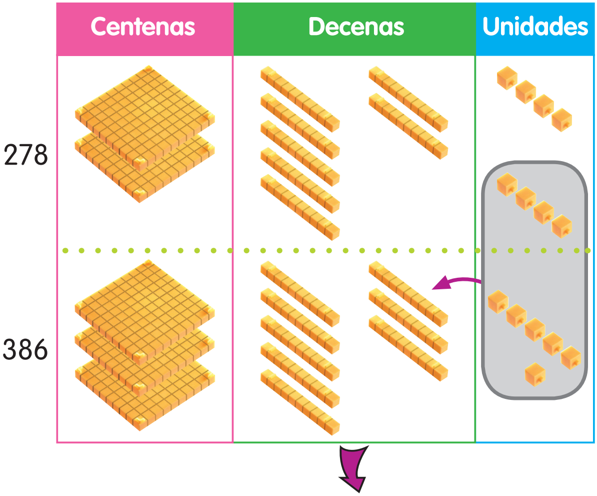
4 Resuelve este problema.

543 autos y 274 buses pasaron ayer por la caseta de peaje. ¿Cuántos autos y buses pasaron por la caseta de peaje en total?

¡Aprendamos!

Sumar reagrupando las decenas y las unidades

1 278 + 386 = ?



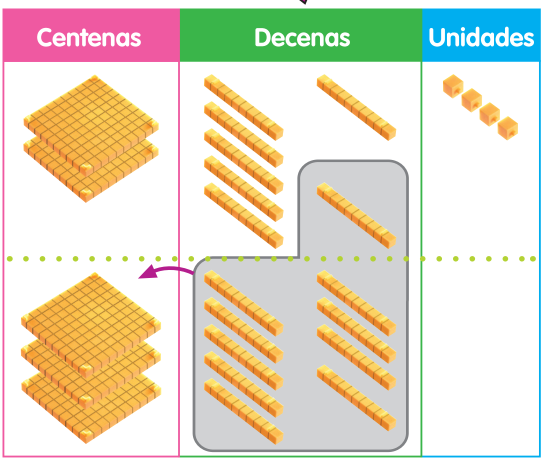
Primero, suma las unidades.

$$\begin{array}{r} 2\ {}^{1}7\ 8 \\ +\ 3\ \ 8\ 6 \\ \hline 4 \end{array}$$

8 unidades + 6 unidades
= 14 unidades

Reagrupa las unidades.

14 unidades
= 1 decena 4 unidades



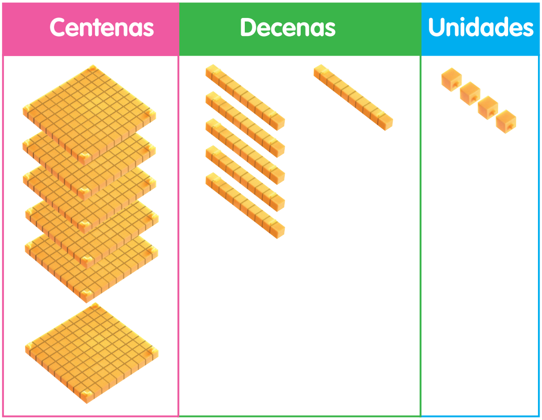
Luego, suma las decenas.

$$\begin{array}{r} {}^{1}2\ {}^{1}7\ 8 \\ +\ 3\ \ 8\ 6 \\ \hline 6\ 4 \end{array}$$

7 decenas + 8 decenas
+ 1 decena = 16 decenas

Reagrupa las decenas.
16 decenas
= 1 centena 6 decenas

Continuación de
página anterior.

664 

Finalmente, suma las centenas.

$$\begin{array}{r} {}^{1}2\;{}^{1}7\;8 \\ +\;3\;\;8\;6 \\ \hline 6\;\;6\;4 \end{array}$$

2 centenas + 3 centenas + 1 centena = 6 centenas

Entonces, 278 + 386 = 664.

2 153 + 449 = ?

Escribe 153 + 449 de esta manera. Luego suma.

$$\begin{array}{r} 1\;5\;3 \\ +\;4\;4\;9 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Primero, suma las unidades.

3 unidades + 9 unidades = ____ unidades

Reagrupa las unidades.

____ unidades = 1 decena ____ unidades

Luego, suma las decenas.

5 decenas + 4 decenas + 1 decena = ____ decenas

Reagrupa las decenas.

____ decenas = 1 centena ____ decenas

Finalmente, suma las centenas.

1 centena + 4 centenas + 1 centena = ____ centenas

Entonces, 153 + 449 = ____.

3 Suma, usa las tablas de valor posicional para ayudarte.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} {}^{1}5\,{}^{1}0\,9 \\ +\ 2\,9\,3 \\ \hline 8\,0\,2 \end{array}$$

¡Acuérdate de canjear 10 unidades por 1 decena y 10 decenas por 1 centena!

a $\begin{array}{r} 7\,6\,8 \\ +\ 1\,5\,6 \\ \hline \end{array}$

b $\begin{array}{r} 3\,7\,2 \\ +\ 3\,7\,9 \\ \hline \end{array}$

c $\begin{array}{r} 3\,1\,8 \\ +\ 4\,8\,5 \\ \hline \end{array}$

d 68 + 132

e 459 + 273

f 74 + 436

4 Resuelve estos problemas.

a Don Luis vendió 436 queques esta mañana.
Él vendió 276 queques más en la tarde.
¿Cuántos queques vendió don Luis en total?

b En la juguetería hay 784 perros de peluche.
Traen 96 perros de peluche más.
¿Cuántos perros hay en la juguetería en total?

c Ayer, Rosita vendió 468 huevos.
Hoy vendió 262 huevos más que ayer.
¿Cuántos huevos vendió hoy Rosita?

¡Exploremos!

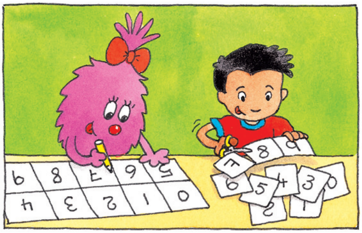
¡Busca el mayor!

2 a 4 jugadores

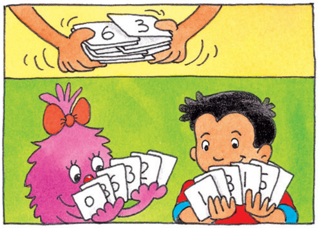
Necesitan:

- Lápiz y papel.
- 3 grupos de tarjetas con números del 0 a 9.

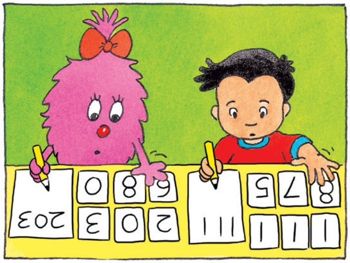
1 Escribe del 0 al 9 en hojas de papel. Córtalos en tarjetas rectangulares. Necesitas tres tarjetas de cada número.



2 Mezcla las tarjetas. Cada jugador toma seis tarjetas.



3 Usa las seis tarjetas para hacer tantos números de 3 dígitos como sea posible. Escríbelos.



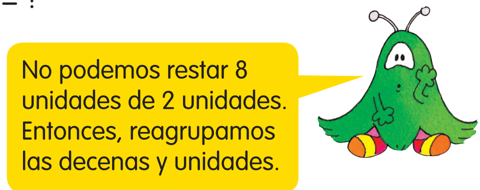
4 Elige dos números de 3 dígitos y súmalos. *(Pista: elige los números que darán la respuesta mayor).* Si las centenas de los números elegidos suman más de 9, elige otros números o mezcla las tarjetas nuevamente.

¡El jugador con la respuesta mayor, gana!

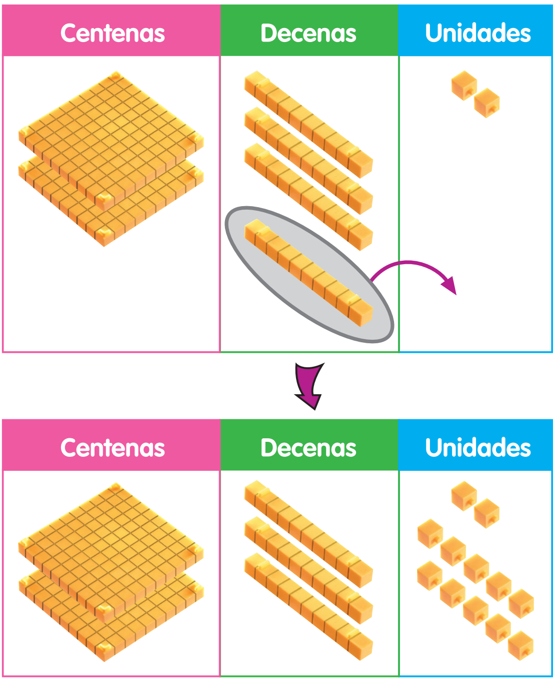
¡Aprendamos!

Restar reagrupando las decenas y las unidades

1 242 – 128 = ?



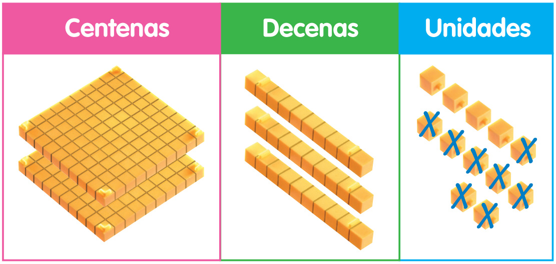
242



Reagrupa las decenas y unidades.

$$\begin{array}{r} 2\;{}^{3}\cancel{4}\;{}^{1}2 \\ -\;1\;\;2\;\;8 \\ \hline 4 \end{array}$$

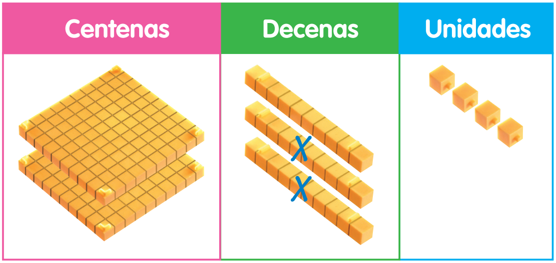
4 decenas 2 unidades
= 3 decenas
12 unidades



Primero, resta las unidades.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & {}^{3}\cancel{4} & {}^{1}2 \\ - & 1 & 2 & 8 \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

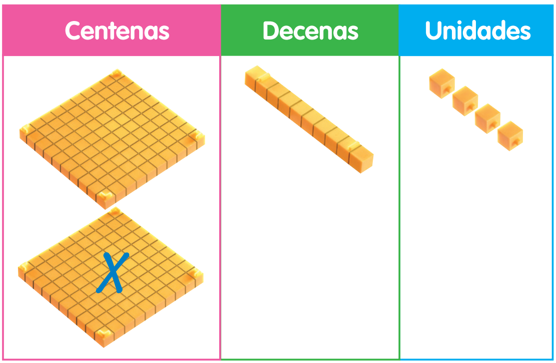
12 unidades – 8 unidades = 4 unidades



Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & {}^{3}\cancel{4} & {}^{1}2 \\ - & 1 & 2 & 8 \\ \hline & & 1 & 4 \end{array}$$

3 decenas – 2 decenas = 1 decena



Finalmente, resta las centenas.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & {}^{3}\cancel{4} & {}^{1}2 \\ - & 1 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

2 centenas – 1 centena = 1 centena

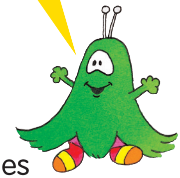
Entonces, 242 – 128 = 114.

2 $763 - 207 = ?$

Reagrupa las decenas y unidades.

63 = 6 decenas ___ unidades

= 5 decenas ___ unidades



$$\begin{array}{r} 7\ 6\ 3 \\ -\ 2\ 0\ 7 \\ \hline \square \end{array}$$

Primero, resta las unidades.

___ unidades – ___ unidades = ___ unidades

Luego, resta las decenas.

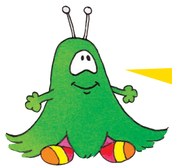
5 decenas – 0 decenas = ___ decenas

Finalmente, resta las centenas.

7 centenas – 2 centenas = ___ centenas

Entonces, 763 – 207 = ___.

3 Resta, usa las tablas de valor posicional para ayudarte.



Ejemplo

$$\begin{array}{r} 2\ {}^{8}\cancel{9}\ {}^{1}1 \\ -\ \ \ 5\ 5 \\ \hline 2\ 3\ 6 \end{array}$$

a $\begin{array}{r} 5\ 4\ 8 \\ -\ 3\ 1\ 9 \\ \hline \square \end{array}$

b $\begin{array}{r} 9\ 7\ 7 \\ -\ 4\ 5\ 9 \\ \hline \square \end{array}$

c $\begin{array}{r} 8\ 8\ 0 \\ -\ 6\ 5\ 6 \\ \hline \square \end{array}$

d 992 – 879

e 783 – 69

f 416 – 307

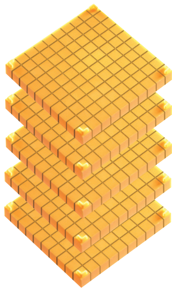
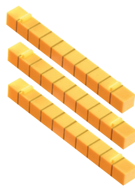
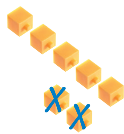
4 Resuelve este problema.

En un hotel hay 781 habitaciones.
472 habitaciones están ocupadas.
¿Cuántas habitaciones están desocupadas?

¡Aprendamos!

Restar reagrupando las centenas y las decenas

1 537 – 272 = ?

	Centenas	Decenas	Unidades
537			

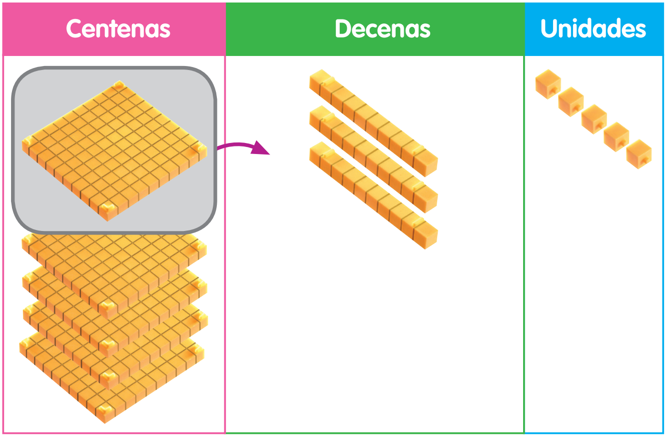
Primero, resta las unidades.

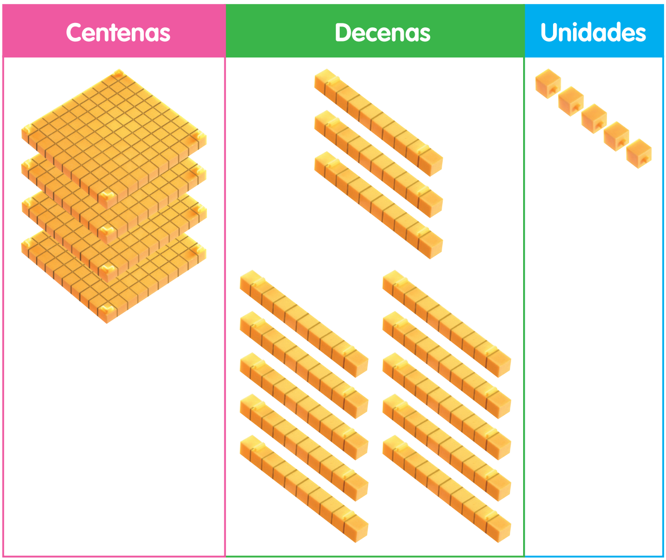
$$\begin{array}{r} 5\ 3\ 7 \\ -\ 2\ 7\ 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

7 unidades – 2 unidades = 5 unidades

$$\begin{array}{r} 5\ \ {}^{?}3\ 7 \\ -\ 2\ \ 7\ 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

No podemos restar 7 decenas de 3 decenas. Entonces, reagrupamos las centenas y decenas.



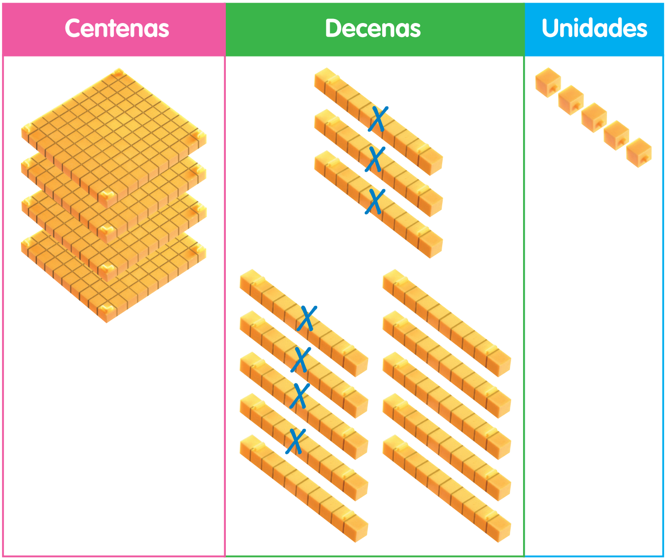


Reagrupa las centenas y decenas.

$$\begin{array}{r} {}^{4}\cancel{5}\ {}^{1}3\ \ 7 \\ -\ \ 2\ \ 7\ \ 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

5 centenas
3 decenas
= 4 centenas
13 decenas

Recuerda reagrupar cuando no tengas lo suficiente para restar.

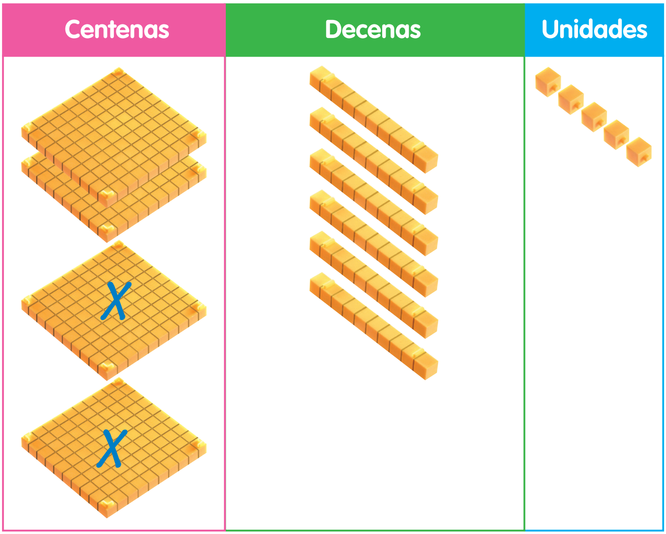


Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{rrr} {}^{4}\cancel{5} & {}^{1}3 & 7 \\ - \ 2 & 7 & 2 \\ \hline & 6 & 5 \end{array}$$

13 decenas
– 7 decenas
= 6 decenas

265



Finalmente, resta las centenas.

$$\begin{array}{rrr} {}^{4}\cancel{5} & {}^{1}3 & 7 \\ - \ 2 & 7 & 2 \\ \hline 2 & 6 & 5 \end{array}$$

4 centenas
– 2 centenas
= 2 centenas

Entonces, 537 – 272 = 265.

2 719 – 383 = ?

Escribe 719 – 383 de esta manera. Luego resta.

$$\begin{array}{r} 7\ 1\ 9 \\ -\ 3\ 8\ 3 \\ \hline \square \end{array}$$

Primero, resta las unidades.

9 unidades – 3 unidades = ___ unidades

Reagrupa las centenas y decenas.

7 centenas 1 decena = 6 centenas ___ decenas

Luego, resta las decenas.

___ decenas – ___ decenas = ___ decenas

Luego, resta las centenas.

6 centenas – 3 centenas = ___ centenas

Entonces, 719 – 383 = ___.

3 Resta, usa las tablas de valor posicional para ayudarte.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} {}^{3}\cancel{4}\,{}^{1}2\ 8 \\ -\ 1\ 5\ 1 \\ \hline 2\ 7\ 7 \end{array}$$

a
$$\begin{array}{r} 6\ 4\ 7 \\ -\ 2\ 6\ 7 \\ \hline \square \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} 9\ 1\ 5 \\ -\ 8\ 2\ 4 \\ \hline \square \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 3\ 3\ 6 \\ -\ 1\ 5\ 4 \\ \hline \square \end{array}$$

d
$$\begin{array}{r} 8\ 5\ 3 \\ -\ 7\ 9\ 1 \\ \hline \square \end{array}$$

e 589 – 493

f 604 – 311

4 Resuelve este problema.

a Macarena tiene 235 stickers.
Paola tiene 153 stickers menos que Macarena.
¿Cuántos stickers tiene Paola?

b Una panadería hace 306 pan en la mañana.
Al final del día, se han vendido 256 pan.
¿Cuántos pan quedaron?

5  ¡Juguemos!

¡Desarma una centena!

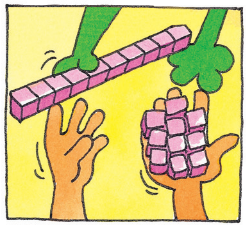
4 a 6 jugadores

Necesitan:

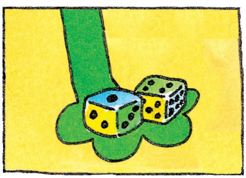
- 2 dados.
- Bloques base diez.

1 Cada jugador toma una placa de centena.

2 Canjea la placa de centena por y .



3 Lanza los dados.
Suma los números que salen.
Retira ese número de de tus
y .



Canjea por si lo necesitas.

4 Hagan turnos para jugar.

¡El primer jugador que devuelve todos sus y gana!

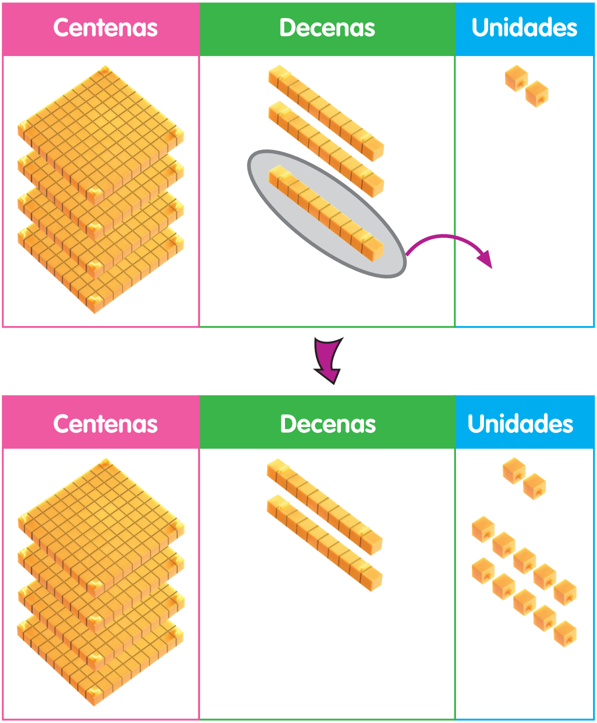
¡Aprendamos!

Restar reagrupando las centenas, decenas y unidades

1 432 – 178 = ?

No podemos restar 8 unidades de 2 unidades.
Entonces, reagrupamos las decenas y unidades.

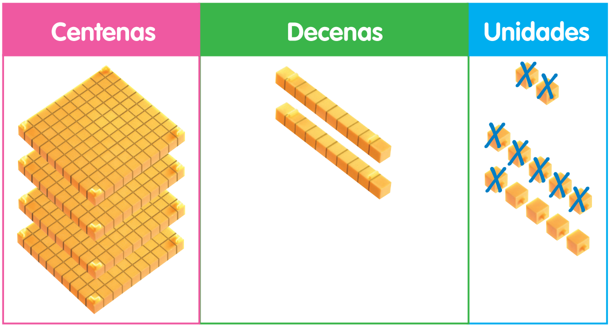
432



Reagrupa las decenas y unidades.

$$\begin{array}{r} 4\ \ {}^{2}\cancel{3}\ \ {}^{1}2 \\ -\ 1\ \ \ 7\ \ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

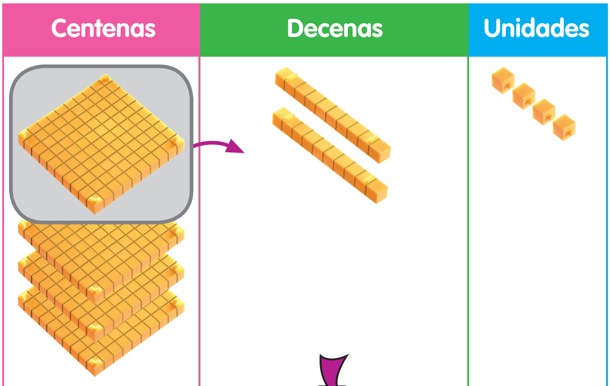
3 decenas
2 unidades
= 2 decenas
12 unidades



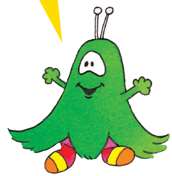
Primero, resta las unidades.

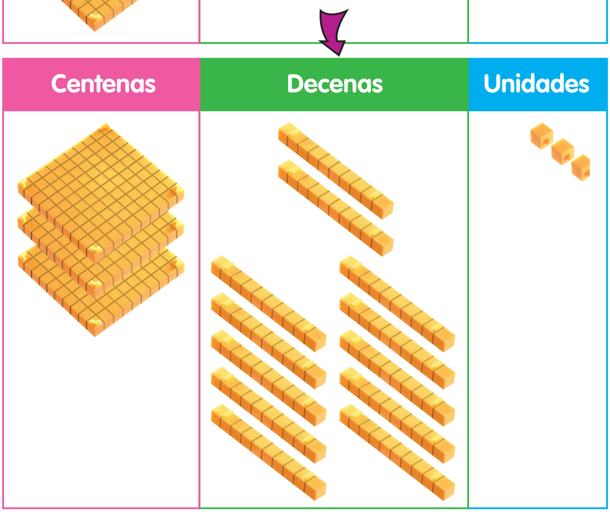
$$\begin{array}{rrrr} & 4 & {}^{2}3 & {}^{1}\cancel{2} \\ - & 1 & 7 & 8 \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

12 unidades
– 8 unidades
= 4 unidades



No podemos restar 7 decenas de 2 decenas. Entonces, reagrupamos las centenas y decenas.

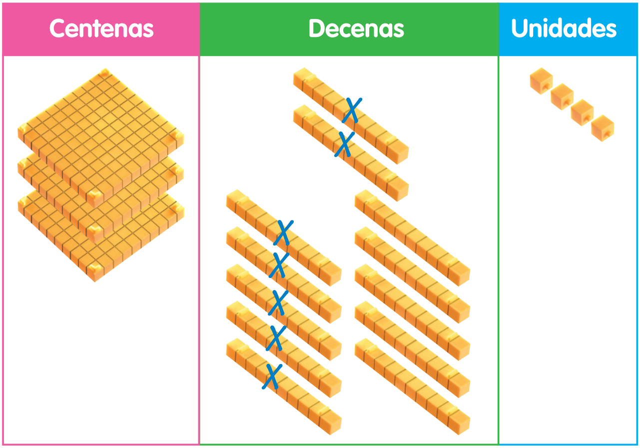




Reagrupa las centenas y decenas.

$$\begin{array}{rrrr} & {}^{3}\cancel{4} & {}^{12}\cancel{3} & {}^{1}2 \\ - & 1 & 7 & 8 \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

4 centenas 2 decenas
= 3 centenas
12 decenas

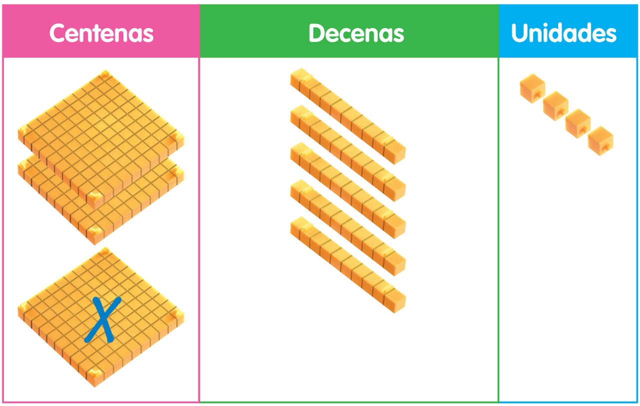


Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{rrr} {}^{3}\cancel{4} & {}^{12}\cancel{3} & {}^{1}2 \\ -\ 1 & 7 & 8 \\ \hline & 5 & 4 \end{array}$$

12 decenas
– 7 decenas
= 5 decenas

254



Finalmente, resta las centenas.

$$\begin{array}{rrr} {}^{3}\cancel{4} & {}^{12}\cancel{3} & {}^{1}2 \\ -\ 1 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 4 \end{array}$$

3 centenas
– 1 centena
= 2 centenas

Entonces, 432 – 178 = 254.

2 $235 - 149 = ?$

Escribe 235 – 149 de esta manera. Luego resta.

Reagrupa las decenas y unidades.

3 decenas 5 unidades = 2 decenas ___ unidades

Primero, resta las unidades.

___ unidades – ___ unidades = ___ unidades

Reagrupa las centenas y decenas.

2 centenas 2 decenas = 1 centena ___ decenas

Luego, resta las decenas.

___ decenas – ___ decenas = ___ decenas

Finalmente, resta las centenas.

1 centena – 1 centena = ___ centenas

Entonces, 235 – 149 = ___.

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 5 \\ -\ 1\ 4\ 9 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$$

3 Resta, usa las tablas de valor posicional para ayudarte.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} {}^{3}\cancel{4}\ {}^{10}\cancel{1}\ {}^{1}5 \\ -\ 2\ 6\ 7 \\ \hline 1\ 4\ 8 \end{array}$$

a $\begin{array}{r} 5\ 3\ 2 \\ -\ 3\ 7\ 9 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$

b $\begin{array}{r} 6\ 7\ 3 \\ -\ 1\ 9\ 8 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$

c $\begin{array}{r} 8\ 2\ 4 \\ -\ 5\ 6\ 8 \\ \hline \_\_\_ \end{array}$

d 812 – 238 ___

e 673 – 498 ___

f 317 – 289 ___

4 Resuelve este problema.

En una escuela hay 612 niñas.
Hay 138 niños menos que niñas en la escuela.
¿Cuántas niños hay en la escuela?

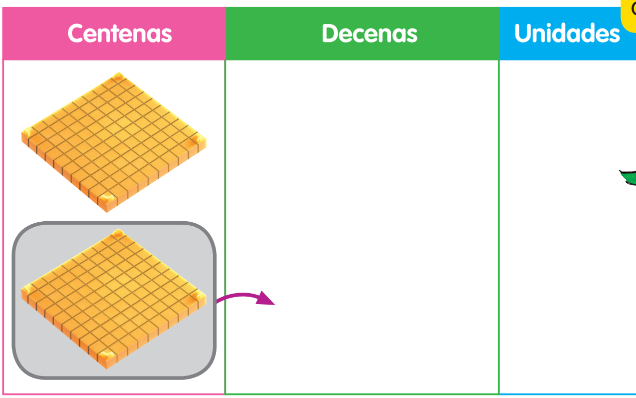
¡Aprendamos!

Resta con números que tienen ceros

1 200 – 18 = ?

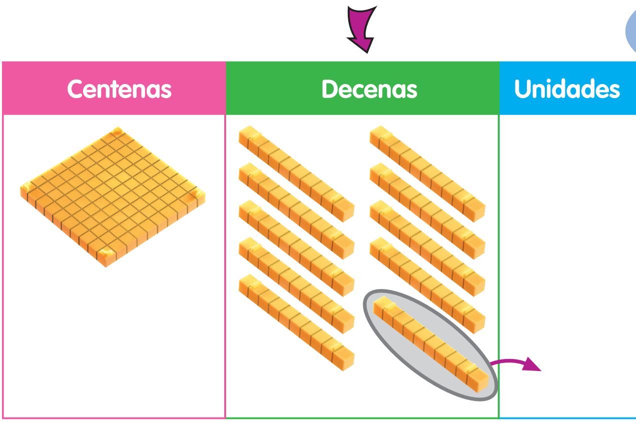
Reagrupa las centenas.

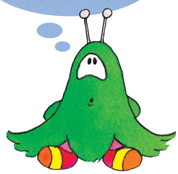
200



$$\begin{array}{r} {}^{1}\cancel{2}\;{}^{1}0\;\;0 \\ -\quad 1\;\;8 \\ \hline \end{array}$$

Reagrupa las decenas.

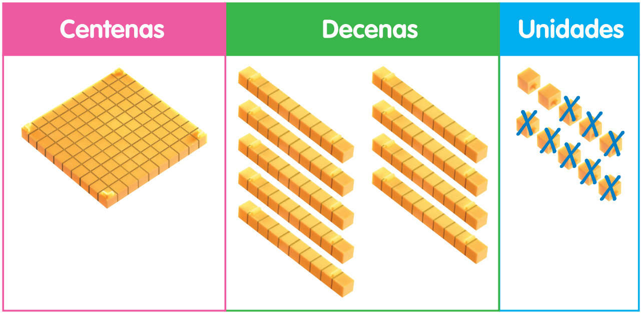




$$\begin{array}{r} {}^{1}\cancel{2}\;{}^{9}\cancel{{}^{1}0}\;{}^{1}0 \\ -\quad 1\;\;8 \\ \hline \end{array}$$

2 centenas = 1 centena 10 decenas
= 1 centena 9 decenas 10 unidades

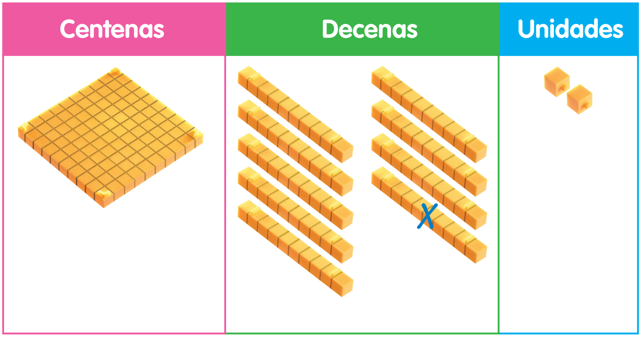
Continuación de página anterior.



Primero, resta las unidades.

$$\begin{array}{rrr} {}^{1}\cancel{2} & {}^{9}\cancel{10} & {}^{1}0 \\ - \quad & 1 & 8 \\ \hline & & 2 \end{array}$$

10 unidades
– 8 unidades
= 2 unidades

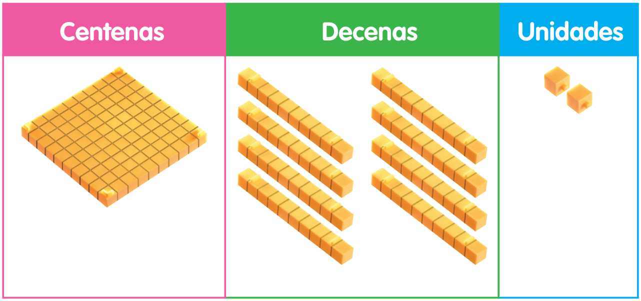


Luego, resta las decenas.

$$\begin{array}{rrr} {}^{1}\cancel{2} & {}^{9}\cancel{10} & {}^{1}0 \\ - \quad & 1 & 8 \\ \hline & 8 & 2 \end{array}$$

9 decenas
– 1 decena
= 8 decenas

182



Finalmente, resta las centenas.

$$\begin{array}{rrr} {}^{1}\cancel{2} & {}^{9}\cancel{10} & {}^{1}0 \\ - \quad & 1 & 8 \\ \hline 1 & 8 & 2 \end{array}$$

1 centena
– 0 centenas
= 1 centena

Entonces, 200 – 18 = 182.

2 $300 - 72 = ?$

Reagrupa las centenas, decenas y unidades.

3 centenas = 2 centenas ☐ decenas

= 2 centenas ☐ decenas 10 unidades

$$\begin{array}{r} 3\,0\,0 \\ -\quad 7\,2 \\ \hline \square \end{array}$$

Entonces, $300 - 72 =$ ☐.

3 Resta, usa las tablas de valor posicional para ayudarte.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} {}^{4}\cancel{5}\,{}^{9}\,{}^{1}\cancel{0}\,{}^{1}0 \\ -\ 1\,6\,8 \\ \hline 3\,3\,2 \end{array}$$

a) $$\begin{array}{r} 1\,0\,0 \\ -\quad 9\,8 \\ \hline \square \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} 6\,0\,0 \\ -\ 3\,0\,8 \\ \hline \square \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} 9\,0\,0 \\ -\ 7\,3\,4 \\ \hline \square \end{array}$$

d) $300 - 254$ ☐

e) $800 - 89$ ☐

f) $500 - 487$ ☐

4 Resuelve estos problemas.

a) Matías tenía 200 duraznos.
Él vendió 24.
¿Cuántos duraznos le quedaron?

b) Daniela tiene 300 moldes.
Ella usó 127 moldes para hacer jalea en su cumpleaños.
¿Cuántos moldes no usó?

c) Patricio obtuvo 400 puntos en un juego de computador.
Su hermano obtuvo 189 puntos en el mismo juego.
¿Cuántos puntos más que su hermano obtuvo Patricio?

ANEXO N° 7
DOCUMENTOS ADMINISTRATIVOS

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
COLEGIO NACIONAL DE APLICACIÓN

EL DIRECTOR DEL COLEGIO NACIONAL DE APLICACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN DE HUÁNUCO, QUE AL FINAL SUSCRIBE;

HACE CONSTAR

Que el Prof. Gustavo Óscar Soto Alvarado,, ha aplicado el Método Singapur, como parte del Trabajo de Investigación titulado *Aplicación del Método Singapur para Desarrollar y potenciar el Aprendizaje de las Matemáticas en niños(as) del Segundo Grado de Primaria*, proceso que se ha dado durante noviembre de 2013 a noviembre de 2014.

Se expide la presente a solicitud del interesado.

Huánuco, 15 de diciembre de 2014

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN COLEGIO DE APLICACIÓN DIRECCIÓN HUÁNUCO

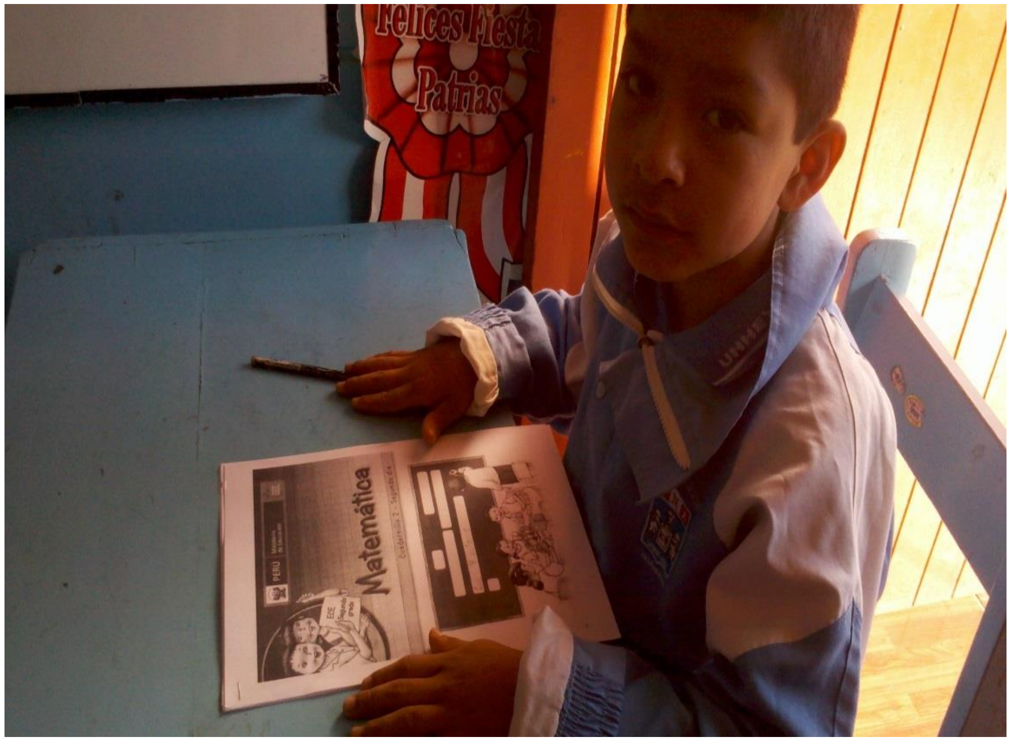
Lic. Carlos G. Moreno Taboada
DIRECTOR

CC: Archivo

ANEXO Nº 8

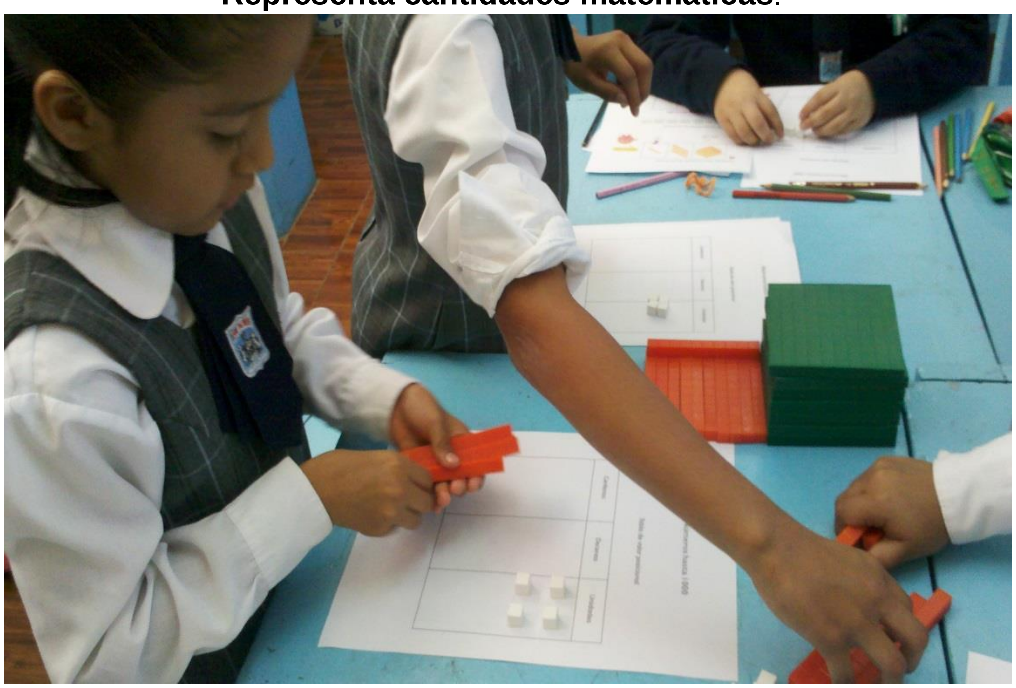
FOTOGRAFÍAS DE LA APLICACIÓN
DEL PRE Y POST TEST

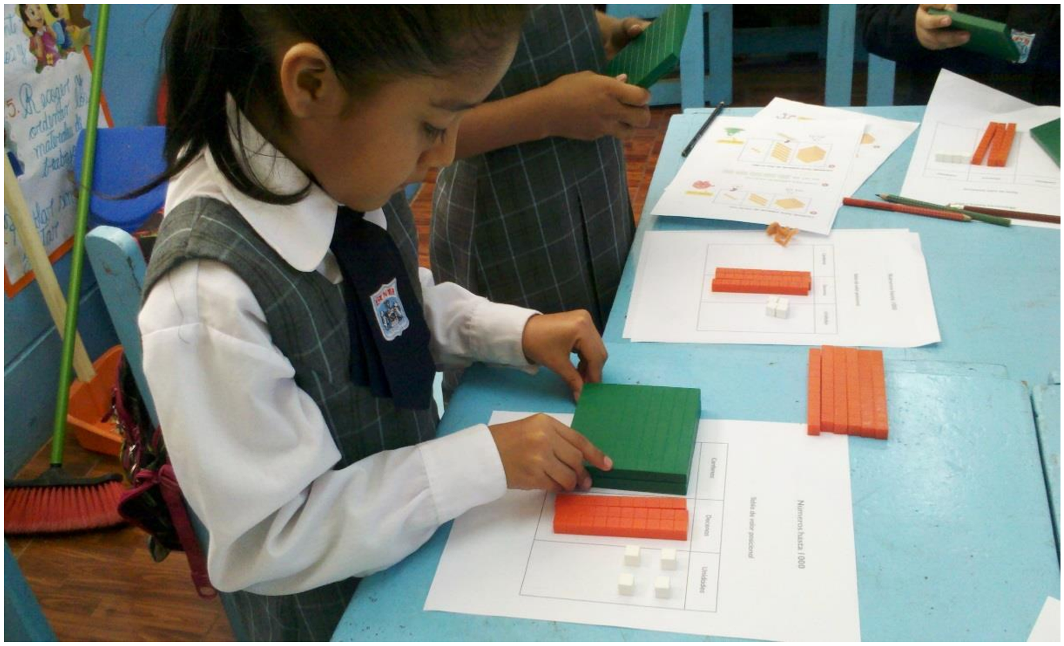
PRE TEST



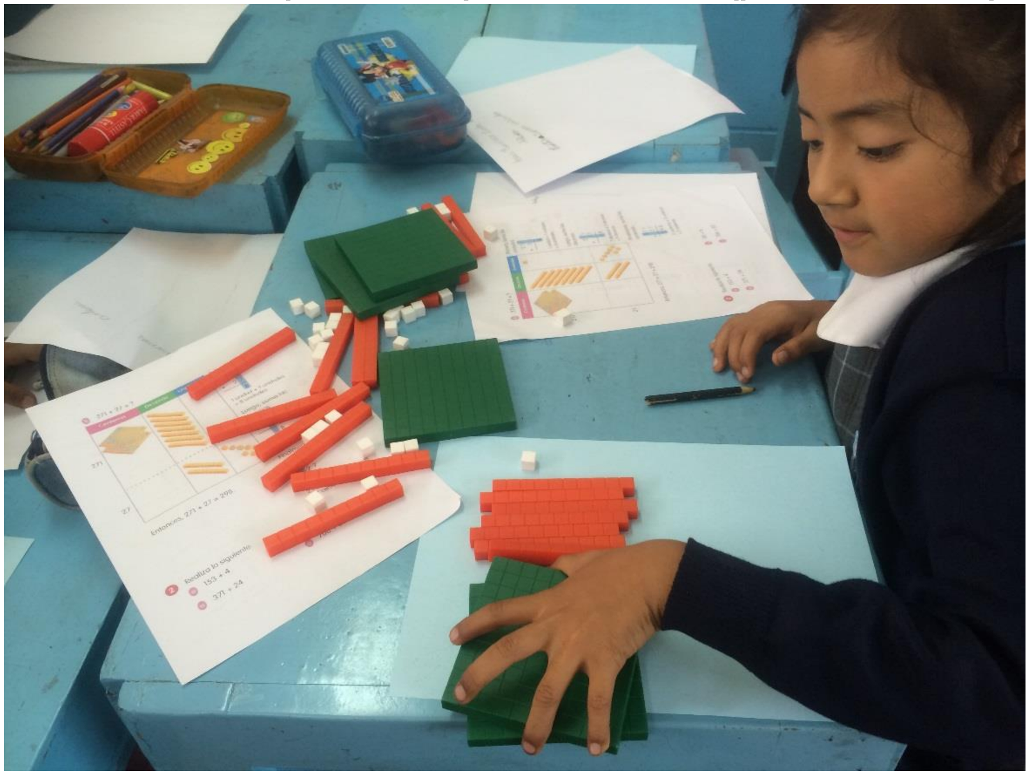
POST TEST

FOTOGRAFÍAS DEL PROCESO DEL MÉTODO SINGAPUR
NUMERACIÓN HASTA 1000

CONCRETO	**Manipula materiales concretos.** 
PICTÓRICO	**Representa cantidades matemáticas**. 

PICTÓRICO	**Representa la relación parte – todo.** 
ABSTRACTO	**Aplica símbolos y algoritmos matemáticos.** 

ADICIÓN APLICANDO EL MÉTODO SINGAPUR

<table>
<tr>
<td>CONCRETO</td>
<td>
Manipula materiales concretos.
Con el material representa la primera cantidad (primer sumando)

Con el material representa la segunda cantidad (segundo sumando)

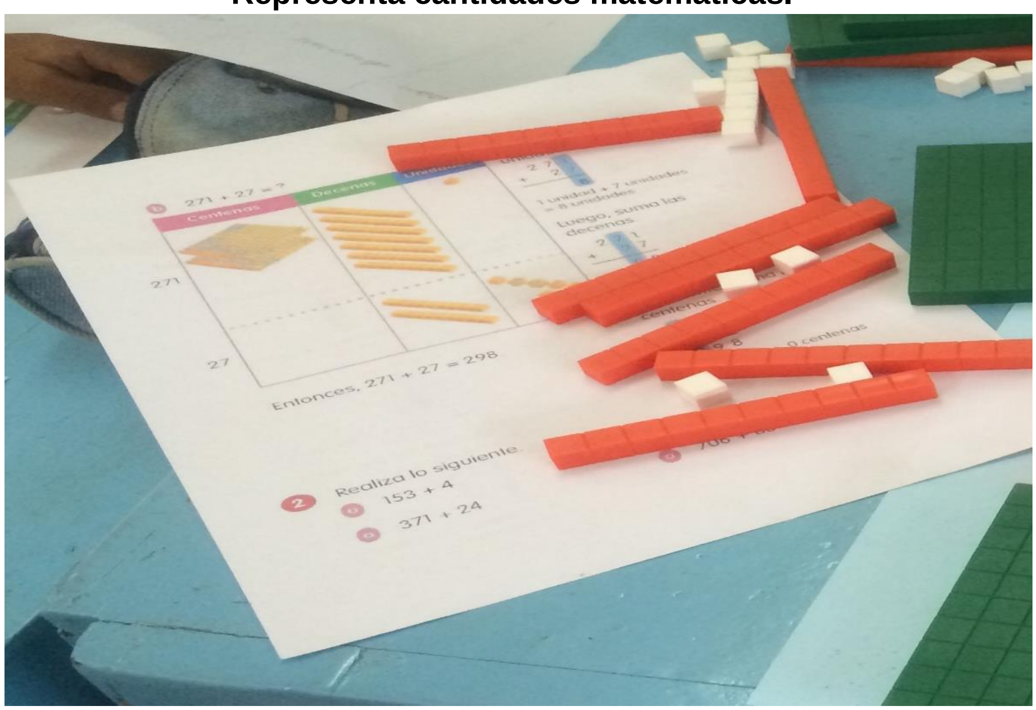
</td>
</tr>
</table>

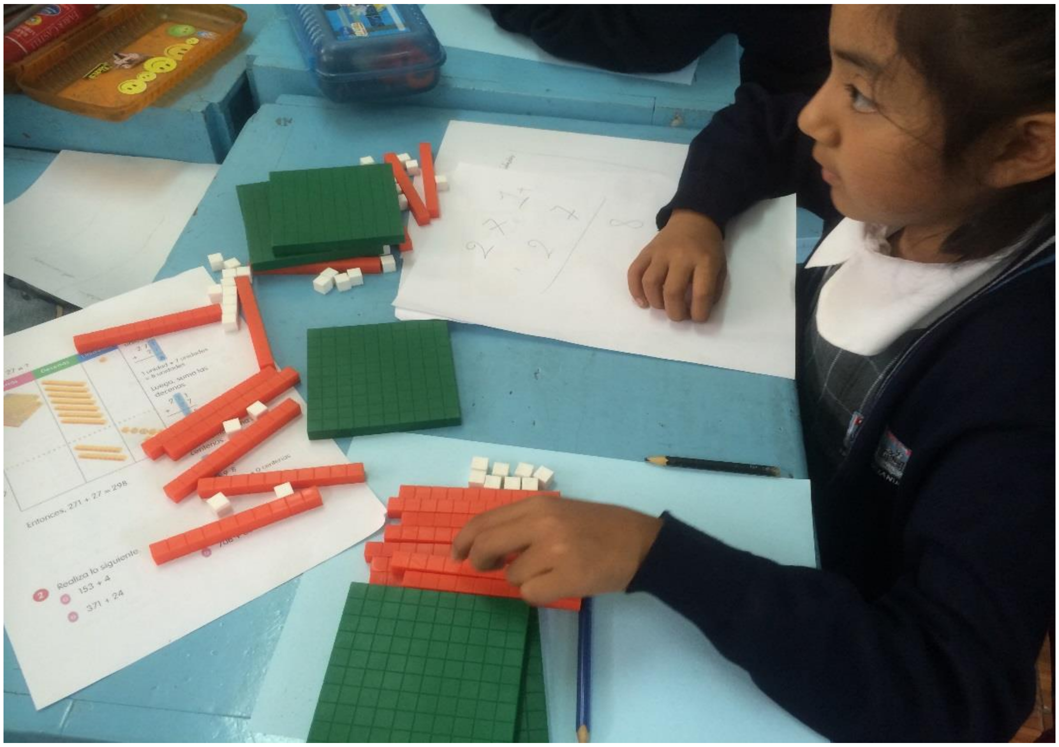
CONCRETO

Manipula materiales concretos.
Junta las dos cantidades.

PICTÓRICO

Representa cantidades matemáticas.



PICTÓRICO	**Representa la relación parte – todo.** 
ABSTRACTO	**Aplica símbolos y algoritmos matemáticos.**