UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

EL CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA Y EL APRENDIZAJE DE GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICA Y FÍSICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNHEVAL - HUÁNUCO - 2015

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESISTAS:

ALVINO MATO, Denis Orlando

MANRIQUE TUANAMA, Engels

REYES VILLANUEVA, Power

ASESOR: **TRUJILLO ATAPOMA, Pio**

HUANÚCO – PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

EL CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA Y EL APRENDIZAJE DE GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICA Y FÍSICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNHEVAL - HUÁNUCO - 2015

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESISTAS:

ALVINO MATO, Denis Orlando

MANRIQUE TUANAMA, Engels

REYES VILLANUEVA, Power

ASESOR: **TRUJILLO ATAPOMA, Pio**

HUANÚCO – PERÚ
2017

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación a mi madre Yazme Mato Céspedes y a mis hermanos, como reconocimiento de su abnegada labor e invalorables consejos.
Gracias mamá por todo lo que haces por mi te amo.

Denis Orlando

Con cariño y gratitud a mi madre y muy en especial a mi padre por brindarme su apoyo incondicional y ser la inspiración para cada uno de mis propósitos.

Engels

Dedico a mis padres quienes me han apoyado para poder llegar a esta instancia de mis estudios, ya que ellos siempre han estado presentes para apoyarme moralmente y económicamente.

Power

AGRADECIMIENTO

Nuestros sinceros agradecimientos:

A Dios por bendecirnos y hacer realidad nuestros sueños anhelados.

A nuestra alma mater Universidad Nacional Hermilio Valdizán, por acogernos y permitirnos estudiar en sus aulas.

A la acreditada Escuela Profesional de Matemática y Física por habernos permitido formarnos en su seno.

Al Dr. Melecio Paragua Morales, docente del curso de investigación por su visión crítica de muchos aspectos cotidianos de la vida, por su rectitud en su profesión como docente, por sus consejos, que ayudan a formarte como persona e investigador.

A nuestro asesor de tesis Dr. Pio Trujillo Atapoma por apoyarnos en nuestras dudas.

RESUMEN

En este trabajo de investigación se ha estudiado la efectividad del criterio de la primera derivada y segunda derivada como método de aprendizaje de la gráfica de funciones en los alumnos de la Carrera Profesional de Matemática y Física de la UNHEVAL 2015, respondiendo a la pregunta: ¿En qué medida la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones en alumnos de la carrera profesional de Matemática y Física de la UNHEVAL 2015? Esta investigación es explicativa y de diseño cuasi experimental y su finalidad ha sido: Demostrar que la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada como método, mejora los niveles de aprendizaje de la gráfica de funciones. La población de estudio ha sido 88 alumnos y la muestra empleada: GC=38 y GE=50. El instrumento utilizado ha sido la prueba de evaluación escrita, y para el procesamiento de datos se usó estadística descriptiva y estadística inferencial, obteniéndose el resultado y conclusión siguiente como el valor de la Z de Prueba = 11,22 se ubica a la derecha de z crítica = 1,96; que es la zona de rechazo, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa; como conclusión se ha probado que el uso del criterio de la primera y segunda derivada como método mejora el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones en los alumnos de la carrera Profesional de Matemática y Física de la UNHEVAL 2015.

PALABRAS CLAVES: Criterio de la primera y segunda derivada, aprendizaje gráfica de funciones.

SUMMARY

In this investigative work it has been studied the efectiveness of the criterion of the first and second derivative as a method of graphic learning of functions for the mathematicals and physics students from the UNHEVAL 2015, answering the question: ¿in what measures the application of the criterion from the first and second derivate improves the learning as graphic functions for the students of the mathematicals and physics carrer in the UNHEVAL 2015? This investigation its explanatory and almost experimental and its point has been: to demostrate the improvement of the levels of learning from the graphic functions. The study population has been of 88 students and the sample used: GC=38 and GE=50. The instrument used was the writting test and for the data processing it was used descriptive statistics and inferential, obtainig the results and following conclusión: value Z proves= 11,22 its located on the right critcal z = 1,96; which is the rejected zone, whereby the hypothesis is rejected and it is accepted the alternative hypothesis; as a conclusion it has been proved that the use of the first and second derivate as a method improves the learning of the graphic functions for the mathematicals and physics students in the universitity HERMILIO VALDIZAN 2015.

KEY WORDS: criterion for the first and second derivade, learning graphic functions.

INTRODUCCIÓN

La gráfica de funciones es un conocimiento que los alumnos de la especialidad de matemática y física, le dan por obvio que lo saben; sin embargo, ello no es real, siendo alumnos de especialidad, tienen dificultades porque el arma principal para graficar las funciones es la tabulación y ello es muy limitado porque funciona bien únicamente para números enteros, es por ello que en el estudio se propone el uso del criterio de la primera y segunda derivada para la gráfica de funciones.

Como antecedentes del estudio se tiene los siguientes:

En el estudio realizado se propuso: Determinar el nivel de saberes previos respecto a la gráfica de funciones; Determinar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada; Determinar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones al finalizar el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada; Comparar y analizar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones antes y después del proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada; Comparar, analizar y evaluar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones con y sin la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada.

En el estudio se formuló la hipótesis siguiente:

Ho: La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada no mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones en alumnos de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015.

Ha: La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones en alumnos de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015.

En el estudio propuesto se trata de solucionar un problema latente en los estudiantes, el aprendizaje mecánico, por el aprendizaje reflexivo, razonado y en el levantamiento de las gráficas mucho más analítico y en ello la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, es propicio y pertinente; en ese sentido, el informe final ha sido diseñado de la siguiente manera:

- Capítulo I, incluye todo lo referente al problema de investigación como: descripción del problema, formulación del problema de investigación, objetivos, hipótesis, justificación e importancia, viabilidad, limitaciones, etc.
- Capítulo II, incluye el marco teórico, donde está considerado: los antecedentes de la investigación, las teorías básicas y la definición conceptual de términos usados en la investigación.
- Capítulo III, en esta parte está considerado todo lo referente al marco metodológico de la investigación, que son: el tipo de investigación, diseño y esquema, población y muestra, instrumentos de recolección de datos, y las técnicas para el análisis y procesamiento de los datos.
- Capítulo IV, se considera los resultados obtenidos en el trabajo de campo, debidamente procesados con un analizador estadístico; en esta parte se presenta la aplicación de la estadística descriptiva y la estadística inferencial con la prueba de hipótesis para la diferencia de medias, dicho estadígrafo permitió el contraste del objetivo general o la hipótesis general.

Finalmente en el capítulo V se presenta la discusión de los resultados opinados con el respectivo sustento de referentes. Todo ello se concluye con la presentación de las conclusiones, sugerencias, bibliografías y anexos.

ÍNDICE

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

CAPITULO III
MARCO METODOLÓGICO

CAPITULO IV
RESULTADOS

CAPITULO V
DISCUSIONES CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Descripción del problema

Históricamente la matemática es la asignatura que presenta mayor dificultad para su aprendizaje, tanto en los niños como en los jóvenes. Además, el aprendizaje de la matemática en los alumnos de educación primaria, secundaria y superior, es complejo, convirtiéndose en un problema visible que afronta la población estudiantil. Los problemas de aprendizaje de la matemática son a nivel internacional, nacional y local.

En el Perú los estudiantes muestran problemas de aprendizajes de la matemática en altos índices, es por ello que se requieren la aplicación de estilos y estrategias de aprendizaje – enseñanza novedosas e innovadoras, de tal forma que permitan a los estudiantes lograr aprendizajes muchos más pertinentes de aquellos temas básicos para un desarrollo matemático en los futuros docentes de la especialidad de Matemática y Física de la UNHEVAL.

En la Facultad de Ciencias de la Educación se ha optado por la aplicación de un Currículum basado en competencias, lo que implica la aplicación de estrategias metodológicas constructivas en el proceso aprendizaje – enseñanza de las asignaturas de las diferentes especialidades y en especial de las matemáticas; sin embargo, los docentes aún no logran implementar las estrategias de aprendizaje constructivos, y siguen con el dictado, las exposiciones por parte de los alumno de temas previamente asignados; todos ellos anclados en el paradigma conductista.

La propuesta es que de a poco se vaya implementando estrategias o estilos de aprendizaje acorde a los temas, tal como la que se propone: el criterio de la primera y segunda derivada para graficar funciones. El criterio que prima para graficar funciones es la tabulación que no presenta ningún problema en las funciones de lineales, inclusive puede ayudar en las funciones cuadráticas para valores enteros en los máximos o mínimos; pero, si toman valores reales, ya se tienen dificultades para hacer la gráfica, además el intervalo para los valores a tabular no es fácil de asumirlos.

La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada como una alternativa para mejorar los niveles de aprendizaje de gráfica de funciones algebraicas en el área de matemática, priorizando la participación activa de los estudiantes en la clase, el mismo que permite simplificar la agitada tarea en el proceso de aprendizaje – enseñanza de las matemáticas en la que los alumnos tendrán la mayor oportunidad y libertad para realizar las operaciones matemáticas, intercambiando sus experiencias sobre estrategias para el estudio de gráfica de funciones algebraicas a través de la derivada de una función.

Las funciones en matemática se usan para indicar relación o correspondencia entre variables, en ese sentido, muchas veces los humanos hacen uso de las funciones aun sin darse cuenta. Las funciones son de gran utilidad, permite resolver problemas de finanzas, economía, geología, en general, de cualquier área donde hay que relacionar variables.

Saber graficar una situación problemática, en cualquiera de las áreas indicadas, permite entenderlo mejor, en ese sentido la gráfica de una función ayuda a interpretar mejor las relaciones entre las variables indicadas líneas arriba. Dicha gráfica los alumnos y docentes de matemática lo hacen obteniendo algunos puntos mediante una tabla de valores y representándolos en el plano cartesiano y uniendo los puntos con un trazo suave, de esa manera se está resolviendo la ecuación $y = f(x)$.

El conocimiento de las funciones es importante para cualquiera de las áreas, pues, a través de ellos se puede explicar los fenómenos que producen nexos de manera natural entre los objetos de estudio, ya que es una de las mejores formas de poner en correspondencia una cantidad con otra.

El proceso enseñanza – aprendizaje ha esquematizado en el estudiante un estilo de aprendizaje vertical, con un marcado proceso lógico; y ello, en base al dictado de una teoría, más dos o tres ejemplos de resolución de problemas tipo relacionado al tema; a esto se suma la poca identidad de las unidades de aprendizaje con la carrera profesional de matemática y física.

El aprendizaje de la matemática es importante, pues, el hombre a través de la matemática explica el mundo físico; en esta línea tuvo que pasar mucho tiempo antes de que el hombre pudiera establecer una notación útil para representar la dependencia de la característica de un objeto y otro. Fue Euler (1707-1783) quien sistematizó la notación y a la vez precisó el concepto de función; además, realizó un estudio sistemático de todas las funciones elementales, incluyendo sus derivadas e integrales; sin embargo, el concepto mismo de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que seguramente surgió desde los inicios de la matemática en la humanidad, con civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china. Cabe reconocer al matemático y filósofo francés René Descartes (1596 - 1650), quien mostró en sus trabajos de geometría que tenía una idea muy clara de los conceptos de variable y función, realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados, reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones que las representan; el mismo que en la actualidad sigue representando la mejor alternativa.

Lo adecuado en el estudio fue tener alumnos dispuestos a resolver ejercicios o problemas de aplicación con un análisis teórico que fundamenta la acción de graficar una función; el alumno debe acostumbrarse a un aprendizaje generado constructivamente

En base a la problemática analizada se propone el criterio de la primera y segunda derivada para graficar funciones en general, el mismo que permite formular la siguiente interrogante:

1.2. Formulación del problema.

1.2.1. Problema General.

¿En qué medida la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015?

1.2.2. Problemas Específicos.

- ¿Cuál es el nivel de saberes previos respecto a la gráfica de funciones polinomiales previo a la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015?
- ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015?
- ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales al finalizar el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015?
- ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales antes y después del proceso de aplicación del

criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015?

- ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales con y sin la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Determinar en qué medida la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Determinar el nivel de saberes previos respecto a la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.
- Determinar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.

- Determinar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales al finalizar el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.
- Comparar, analizar y evaluar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales antes y después de la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.
- Comparar, analizar y evaluar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales con y sin la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.

1.4. Hipótesis

Ho: La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada no mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL - Huánuco – 2015.

Ha: La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL - Huánuco – 2015.

1.5. Variables

1.5.1. Variable independiente

Criterio de la primera y segunda derivada.

1.5.2. Variable dependiente

Aprendizaje de gráfica de funciones polinomiales.

1.6. Justificación e importancia de la investigación

Se justifica la realización de la investigación y destacar su importancia, tomando en cuenta los siguientes criterios:

1.6.1. Justificación legal

El desarrollo de la investigación se encuentra en el marco legal del Reglamento de Grados y Títulos de la UNHEVAL.

1.6.2. Justificación teórico científico

El aprendizaje de gráfica de funciones polinomiales en la asignatura de Análisis Matemático, vinculado los problemas y ejercicios con los problemas de la vida real y cumpliendo los pasos del criterio de la primera y segunda derivada, justifican la realización del estudio. La importancia del aprendizaje de gráfica de funciones polinomiales permite a la persona a desarrollar un pensamiento matemático, estimulándole la creatividad, el sentido crítico, la habilidad para el cálculo, la capacidad para la toma de decisiones y estrategias; todas estas actitudes indispensables para una mejor comprensión y asimilación de las diferentes asignaturas que curse, así como para un mejor desempeño en su vida.

Los datos obtenidos y procesados en la presente investigación, permiten aportar informaciones científicas sobre la efectividad de la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada para mejorar el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL, por todo ello es que tiene importancia teórica, practica y social.

1.7. Viabilidad

La realización de la investigación es viable, pues se dispone de los recursos financieros, humanos y materiales necesarios para su ejecución. Se tuvo acceso y manejo de la muestra, las unidades de análisis fueron los compañeros de los diferentes ciclos y de promoción, en las horas de Tesis I.

1.8. Limitaciones

No existe ningún tipo de limitaciones para la realización de la investigación pues se cuenta con:

1.8.1. Recursos Económicos

El trabajo de investigación estaba auto financiado por los investigadores, el mismo que garantiza su ejecución.

1.8.2. Recurso Logístico:

Se cuenta con soporte tecnológico, asesoramiento durante el desarrollo de la asignatura de Tesis I y Tesis II.

1.8.3. Antecedentes Bibliográficos

Existe información bibliográfica sobre el tema “análisis de gráfica de funciones”, con aplicación del criterio de la primera y segunda derivada; además, existen investigaciones en la especialidad de matemática y física que proponen la aplicación de un estilo de aprendizaje para lograr mejores aprendizajes en diferentes temas de matemática.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del problema

En la revisión de bibliografía existente, se ha encontrado abundancia de libros sobre el tema de aplicaciones del criterio de la primera y segunda derivada en la gráfica de funciones; además, en la parte de investigaciones hechas en la especialidad de matemática y física existen abundancia de tesis que proponen la aplicación de un estilo o estrategia de aprendizaje, para mejorar el nivel de aprendizaje de los diferentes temas del área de matemática y física; para el trabajo se cita algunos de ellos:

2.1.1. Nivel internacional

- **Lorenzo Contreras Garduño (2000),** realizó la investigación: "Interpretación Geométrica de las Derivadas Sucesivas de una Función un Estudio Realizado con Estudiantes de Bachillerato". El tema fue desarrollado con la aplicación y análisis de gráficos y llega a las conclusiones siguientes: "Se cumplió con el objetivo propuesto, ya que se logró que el grupo de alumnos interpretara geométricamente las derivadas sucesivas de una función", "La situación didáctica aplicada o un rediseño de la misma, la consideró como una propuesta didáctica a implementar en el primer acercamiento a la derivada de una función en alumnos de Bachillerato".

- **Alejandro Salmerón Jiménez (2010)**, realizó la investigación: "Análisis y Estudio de Funciones Algebraicas a Través de la Derivada de una Función". El autor de la investigación usó la derivada para analizar la gráfica de funciones algebraicas y llega a la siguiente conclusión: "Este proyecto contribuyó a modificar la forma de dar las clases de Matemáticas, desde la planeación didáctica hasta innovar con varios enfoques y estilos de enseñanza, logrando con ello una amalgama por demás interesante y provechosa, tanto para la práctica docente como para el mejor aprovechamiento escolar de los alumnos".

2.1.2. Nivel Nacional

- **Milusca Flores Cubas (2000)**, realizó la siguiente investigación: "*Enseñanza de las Funciones Reales de Variable Real en el Tercer Año de Educación Secundaria*", tesis de Magíster en Enseñanza de la Matemática, PUCP. Aborda el problema de la enseñanza de las funciones reales en el rendimiento escolar de los alumnos del tercer año de Educación Secundaria del Colegio Nacional "José Leonardo Ortiz" de Chiclayo, a través de un modelo Autodidáctico. De sus resultados concluye que la aplicación del Modelo Auto instructivo Sobre funciones reales es un estímulo de aprendizaje eficaz, permite un mayor rendimiento.
- Además, la utilización del Modelo Autodidáctico permite un trato personal con el estudiante, observando su avance y

dificultades; ello permite orientarlos para superarlos con una comunicación interactiva entre profesor y alumno.

2.1.3. Nivel local

- **Carlos Ramírez Soria (2004)**, en la tesis: "Método de la derivada para hallar el vértice de la parábola y su influencia en el aprendizaje de los alumnos del 2° y 3° grado de Educación Secundaria del Colegio Nacional de Aplicación UNHEVAL de Huánuco-2001". Realiza una investigación de tipo explicativo y diseño cuasi experimental, legando a la siguiente conclusión: "Desde el punto de vista comparativo los alumnos del grupo experimental indicaron conocimientos entre buena y muy buena sobre la aplicación del Método de la primera derivada para hallar el vértice de la parábola a diferencia del grupo de control que indicaron regular conocimiento para hallar dicho vértice".
- **Alder Ávila Ponce (2011)**, en la tesis: "El Método de problemas y el aprendizaje de funciones en los alumnos del segundo grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa N° 32080 QUECHUALOMA- CHURUBAMBA- 2010". Realiza una investigación de tipo explicativa y diseño cuasi experimental, llegando a las siguientes conclusiones: "Al aplicar el método de problemas, se observa en el grupo experimental, una fluctuación ascendente respecto al aprendizaje de funciones a diferencia del grupo control". "De los resultados obtenidos de las pruebas de entrada y salida del GE, notamos

un mejoramiento de aprendizaje en los alumnos”. “En la prueba de hipótesis muestra el rechazo de la hipótesis nula el mismo que implica la aceptación de la hipótesis alterna por lo tanto existen indicios suficientes que nos prueban que la aplicación del método de problemas mejora el aprendizaje de funciones”.

2.2. Bases teóricas

Entre los docentes, según su formación existen dos tipos: unos son conductista y otros que están tratando de implementar el constructivismo en su forma de generar aprendizajes en los alumnos.

2.2.1. Constructivismo

El constructivismo es una teoría de aprendizaje en la filosofía, la antropología y la psicología (BROODKSY 1993).

EL conocimiento no está en el sujeto ni en las cosas; es el producto de las interrelaciones entre ambos, dinamizado por la actividad de la persona que aprende. En síntesis, si se quiere conocer algo, se debe interactuar con eso objeto, razón por la cual, en la educación es preciso explorar los diversos espacios donde se encuentran las cosas que los niños, jóvenes y adultos pretenden conocer. Este interaccionismo constituye el fundamento teórico para crear situaciones de aprendizaje en cualquier lugar y situación, sin conocer los límites que a veces se establecen por cuestiones de tiempo y de formalismo reglamentarios. Pérez (2009).

Al respecto, Carretero (1993; p: 31), argumenta lo siguiente:

“Puede decirse que es la idea que mantiene el individuo tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con que instrumento realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya poseen, es decir, con la que ya construyó en su relación con el medio que le rodea. Dicho proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales: De los conocimientos previos representación que se tenga de la nueva información, o de la actividad o tarea a resolver; y, de la actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto”.

2.2.2. La matemática y los paradigmas metodológicos

La Matemática es una ciencia exacta, que hay que practicarla con mucha disciplina durante el proceso aprendizaje – enseñanza; sin embargo, en su enseñanza se ha usado la metodología tradicional para impartir conocimientos, donde el protagonista principal era el docente, y el alumno era el elemento pasivo porque cumplía el papel de oyente. Bajo el esquema descrito se evaluaba los conceptos, los procesos matemáticos estaban sujetos a la aplicación de los algoritmos;

el proceso era propicio para el desarrollo memorístico de las unidades de aprendizaje. Contrariamente a lo descrito, en el estudio se propone la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, para que estimule la creatividad y el descubrimiento personal durante la generación de aprendizajes, desarrollando un espirito constructivo sistemático y ordenado.

El componente histórico pone al estudiante al tanto de las dificultades que han tenido los matemáticos y la humanidad para ponerlo a las matemáticas al desarrollo actual.

El componente tecnológico ha permitido que en los últimos doscientos años, la humanidad esté globalizada y dentro de ello es que se tiene que asumir el nuevo reto del proceso aprendizaje - enseñanza de la matemática.

2.2.3. Aprendizaje

El aprendizaje es el cambio relevante y permanente en el comportamiento de los organismos que tiene lugar como resultado de las prácticas de la experiencia. Meza (2008, p: 22)

El aprendizaje se fundamenta en que la actividad del alumno hace posible la creación del conocimiento: es decir, es él quien la construye, lo dicho se apoya en sus conocimientos previos, si ello es insuficiente se hace necesario una retroalimentación en la cantidad y temas pertinentes al contenido a desarrollarme como tópicos de aprendizaje. El alumno aprende cuando tiene la oportunidad de reconstruir o redescubrir el contenido o información, si ello es así, entonces el aprendizaje actual requiere la intervención de la mayor cantidad de sentidos, es por ello que se dice, que el estudiante aprende mejor y más cuando tiene oportunidades de opinar, participar, investigar, corregir y decidir.

2.2.4. Aprendizaje constructivistas

Con el constructivismo, lo primero que se cambia es el protagonismo de los actores educativos en la generación del aprendizaje; en el conductismo, es el docente el actor principal y el alumno juega un papel pasivo; por el contrario, en el constructivismo el sujeto protagonista en la generación de su aprendizaje es el alumno, para que ello se produzca el docente debe planificar todo el proceso educativo. Además, que en el constructivismo existen múltiples estilos de aprendizaje.

Con el constructivismo que da prioridad al acto de aprender se tiene el compromiso de enseñar a aprender a los estudiantes para hacer posible los inter aprendizajes y autoaprendizajes. Pérez, (2008, p: 134).

En el constructivismo se ve el aprendizaje como un proceso en el cual el alumno construye activamente nuevas ideas o conceptos basados en conocimientos presentes y pasados. Ellos pueden o deben trabajar para clarificar y ordenar sus ideas de manera individual o grupalmente; luego pasar a la etapa de intercambio, exponiendo las conclusiones a otros estudiantes y finalmente sacar una conclusión final.

2.2.5. Aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimientos mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes.

Durante el aprendizaje significativo el alumno relaciona de manera no arbitraria nueva información con los conocimientos y experiencias previas que posee en su estructura como cultura o marco teórico.

Por ello el docente tiene el rol de orientador, es él, quien debe ayudar al alumno a adquirir nuevos conocimientos y es responsable de la orientación de cómo hay que aprender.

Navarro P. (2006, pág. 98), menciona:

El aprendizaje significativo es una construcción interior a partir de las relaciones que los alumnos son capaces de establecer con lo que ya saben; es decir, con los esquemas de conocimiento que ya cuentan. La nueva información se incorpora entonces a la estructura mental y pasa a formar parte de la memoria comprensiva. Para que se produzca un aprendizaje significativo es necesario que el contenido sea potencialmente significativo y que el alumno este motivado.

2.2.6. Fases del aprendizaje significativo

a. Fase inicial de aprendizaje:

- El alumno percibe a la información como constituida por piezas o partes aisladas sin conexión conceptual.
- El alumno tiende a memorizar o interpretar en la medida de lo posible estas piezas, y para ello usa su conocimiento esquemático.
- El procesamiento de la información es global y este se basa en: escasos conocimientos sobre el dominio a aprender, estrategias generales independientes de dominio, uso de conocimiento de otro dominio para interpretar la información.
- La información aprendida es concreta y vinculada al contexto real del entorno.
- Uso predominante de estrategias de repaso para aprender la información.

b. Fase intermedia del aprendizaje:

- EL alumno empieza a encontrar relaciones y similitudes entre las partes aisladas y llega a configurar esquemas y mapas cognitivos acerca del material y el dominio de aprendizaje en forma progresiva. Sin embargo, estos esquemas no permiten aún que el aprendizaje se conduzca en forma automática o autónoma.

- Se va realizando de manera paulatina un procesamiento más profundo del tópico. El conocimiento aprendido se vuelve aplicable a otros contextos.
- Hay más oportunidad para reflexionar sobre la situación, material y dominio.
- El conocimiento llega a ser más abstracto, es decir, menos dependiente del contexto donde originalmente fue adquirido.
- Es posible el empleo de diferente estrategia organizativa como mapas conceptuales y redes semánticas, así como para usar la información en la solución de tareas.

c. Fase terminal del aprendizaje:

- Los conocimientos que comenzaron a ser elaborados en esquemas o mapas cognitivos en la fase anterior, llegan a estar más integrados y a funcionan con mayor autonomía.

2.2.7. Estrategias de aprendizaje

La puesta en marcha de una estrategia de aprendizaje implica el dominio de una serie de procedimientos y componentes. Una estrategia se compone de técnicas que se combinan de forma deliberada para alcanzar un determinado propósito de aprendizaje. Tanto los elementos componentes como su uso técnico o estratégico deben entrenarse si se quiere que los alumnos progresen en su afán de alcanzar aprendizajes sin límites.

2.2.8. Razones del aprendizaje de la matemática

La razón principal para que la matemática este considerada como asignatura principal en todo el nivel del proceso educativo del estudiante, es porque con ella se desarrolla la capacidad reflexiva, y ello permite al alumno a ser ordenado, disciplinado, perseverante, etc. Todo ello hace que el estudiante tenga un buen desenvolvimiento en su vida diaria, resolviendo problemas de su entorno.

2.2.9. La didáctica en el aprendizaje de gráfica de funciones polinomiales

La didáctica es una disciplina que aglutina un conjunto de saberes organizados, cuyo objeto de estudio es la relación entre saberes y su enseñanza o su generación como aprendizaje.

Es importante el uso del triángulo didáctico, como herramienta de análisis, considerando los tres vértices, el saber, el docente y el estudiante. El lugar de cada uno de ellos que ocupa en el proceso aprendizaje -enseñanza, define tres tipos generales de concepciones didácticas que han dado lugar a diversos métodos de enseñanza como: que el alumno manipule los objetos matemáticos; que active su propia capacidad mental, que ejercite su creatividad, que reflexiona sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, que haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.

2.2.10. Breve historia de la derivada

Leibniz y Newton, Leibniz fue el primero en publicar la teoría, pero parece ser que Newton tenia papeles escritos (sin publicar) anteriores a Leibniz. Debido a la rivalidad entre Alemania e Inglaterra esto produjo varias disputas entre los científicos.

Newton llegó al concepto de derivada estudiando las tangentes y Leibniz la velocidad de un móvil.

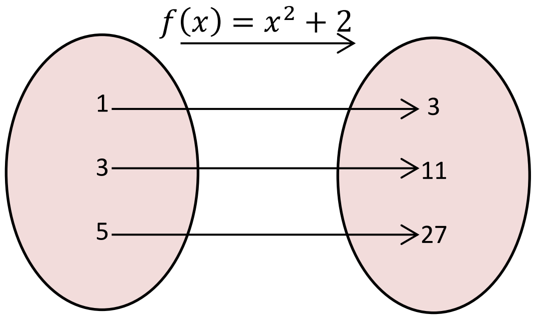
El concepto de cálculo fue desarrollado por Isaac Newton (1642-1727) nació en Lincolnshire, Inglaterra y es considerado uno de los más grandes científicos y matemáticos, además fue filósofo, alquimista y hasta político, una de los más grandes libros científicos, fue escrito por él, titulado Philosophiae naturales principia matemática, o Principios Matemáticos de Filosofía Natural. Descubrió las leyes del movimiento, de la gravedad y de la óptica; desarrolló el teorema del binomio y se le atribuye junto con Leibniz, el descubrimiento de una nueva y poderosa rama de la matemática, el Cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz, nació en Leipzig, Alemania (1646-1716), fue un genio universal, experto en leyes, religión, filosofía, literatura, política, geología, historia y por supuesto, en matemáticas, investigó un método universal que le hiciera llegar a la verdad y comprender su naturaleza, Comparte con Isaac Newton el crédito del descubrimiento del cálculo. La cuestión de quién fue el primero en llegar a estos resultados, ocasionó numerosas controversias entre los seguidores de estos dos grandes hombres.

La historia ha determinado que Newton fue el primero en concebir las principales ideas, alrededor de los años 1665-1666, pero que LEIBNITZ las descubrió independientemente durante los años 1673-1676; aunque no se le reconoció tanto como a Newton. Quizá fue el mayor inventor de símbolos matemáticos, a él se deben los nombres de análisis matemático a cerca de las derivadas e integrales, así como los símbolos estándar dy/dx para la derivada y para la integral, el término función y el uso constante del símbolo (=) para la igualdad.

2.2.11. Función

Una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia tal que a cada número del conjunto de partida le corresponde una sola imagen del conjunto de llegada. En el grafico siguiente se observa el comportamiento de la función cuadrática de un número natural: donde al lado izquierdo se observa el conjunto de partida, cuyos elementos son los valores que se le ha asignado a la variable independiente “x”, y de la misma manera, al lado derecho se observa el conjunto de llegada representado por los valores que toma la variable dependiente “y” una vez que se remplaza en la función cuadrática el valor que se le asignó a la variable “x”. Sobre la flecha que apunta de izquierda a derecha está indicada la relación matemática o la función que trasforma los valores del conjunto de partida en los valores del conjunto de llegada.



Aplicando una evaluación según la regla de correspondencia en el grafico se obtiene que $f(1) = 3$; $f(3) = 11$ y $f(5) = 21$ por lo tanto, se dice que es una función.

2.2.12. Función polinomial - clasificación

Las funciones polinomiales y su representación gráfica, tienen gran importancia en la matemática. Estas funciones son modelos que describen relaciones entre dos variables que intervienen en diversos problemas que provienen del mundo real. Una función polinomial *f* es una función de la forma:

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \ / \ C_1 \in R \ \wedge n \ \in N$$

Ejemplos:

$f(x) = 6x^2 + 7x - 2$

$f(x) = 2x + 3$

$f(x) = 6$

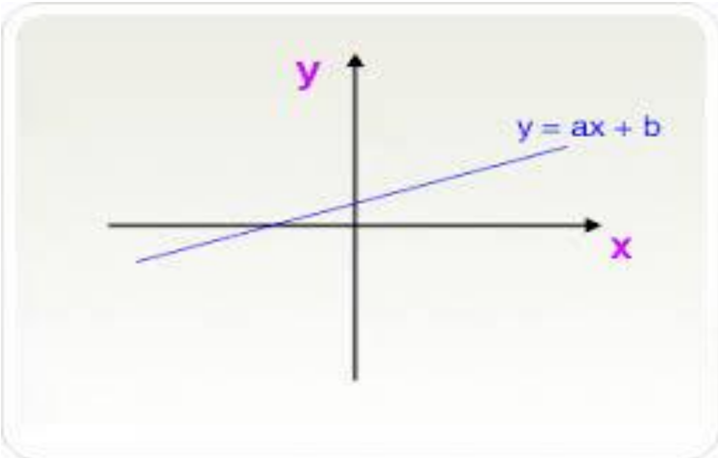
- **Función lineal.**

Función polinomial de primer grado.

$f = \{(x; y) /= ax + b ; a \neq 0\}$

Gráficamente representa una línea recta que intercepta el eje Y en b y con el eje X en –b/a.

Dominio y recorrido de la función lineal, dom: IR; Rec: IR con m ≠0



- **Función cuadrática**

Es una función polinomial de segundo grado tal como:

$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0$

La grafica de esta función son parábolas en el eje Y.

Sea $\mathrm{f(x) = ax^2 + bx + c}$, $\mathrm{a} \neq 0$ y coeficiente real $f(x) = 0$ es una ecuación de segundo grado, la naturaleza de sus raíces depende de sus discriminantes y cuyas raíces son:

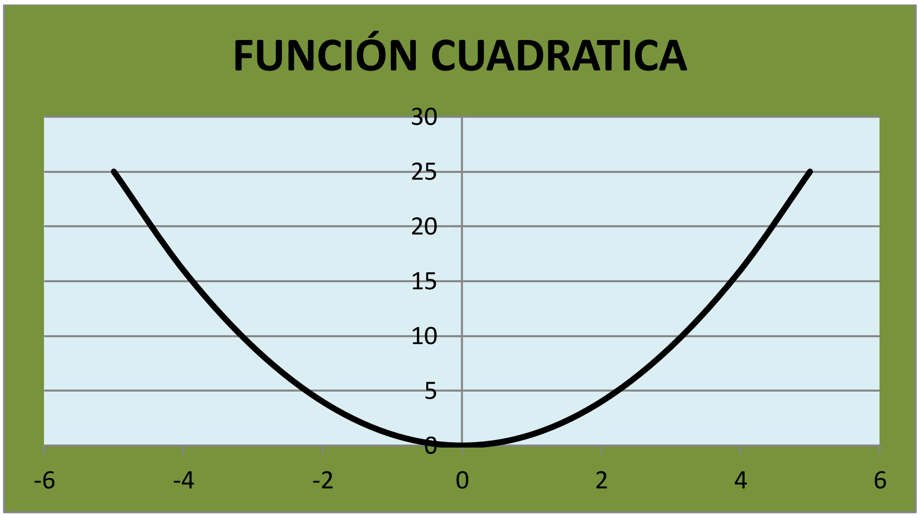
$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$Si\ \Delta > 0 \rightarrow X_1, X_2 \in R \wedge \quad X_1 \neq X_2$

$Si\ \Delta = 0 \rightarrow\ X_1\ , X_2\ \in R \wedge\quad X_1\ = X_2$

$Si\ \Delta < 0 \rightarrow\ X_1\ , X_2\ \notin R \wedge\quad X_1\ = X_2$

La parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del coeficiente del término cuadrático; en la gráfica siguiente, dicho signo es positivo, entonces se dice de pendiente positivo y la parábola se abre hacia arriba.



- **Función cubica**

Es una función polinomial de grado tres, definida por:

$$\mathrm{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ ;\quad a \neq 0}$$

Cuyo dominio es todos los reales.

Para resolverla, se sugiere la alternativa siguiente: Para hallar las raíces de una ecuación cúbica, se debe reducir a una cubica incompleta haciendo $x = t - \frac{b}{3a}$, luego transformándola en:

$\mathrm{f(t) = a[t^3 + +pt + q]}$ donde p y q están en términos de a; b; c y d.

La naturaleza de sus raíces depende de la expresión:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

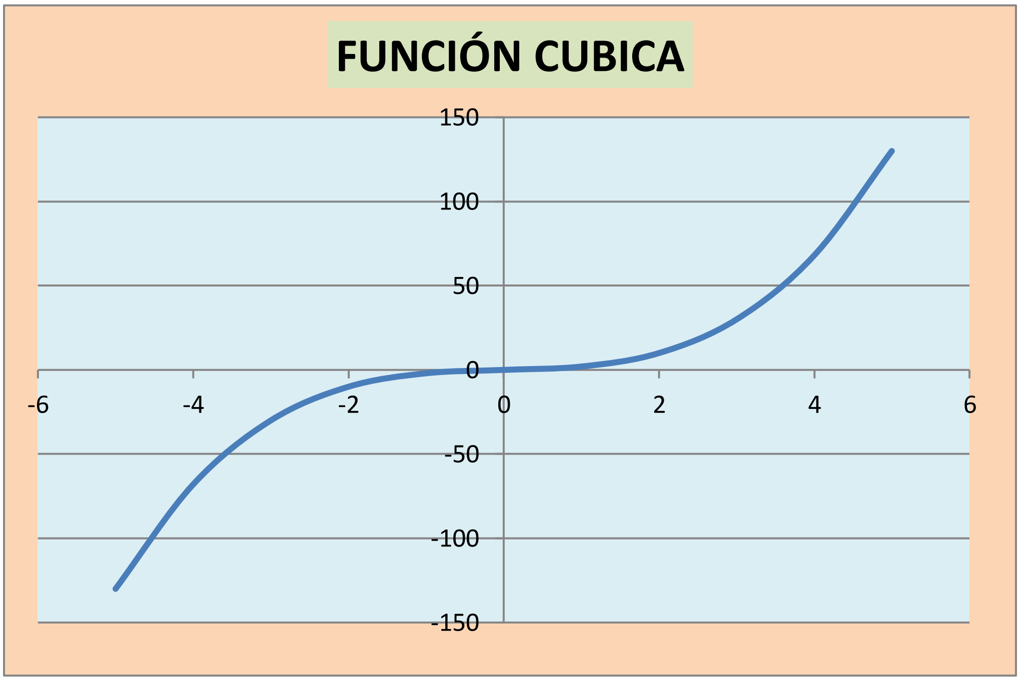
$Si\ \Delta < 0 \rightarrow\ t_1\ , t_2\ , t_3 \in R \wedge \quad t_1\ \neq t_2\ \neq t_3$

$Si\ \Delta = 0 \rightarrow\ t_1\ , t_2\ , t_3 \in R \wedge \qquad t_1\ = t_2$

$Si\ \Delta > 0 \rightarrow\ t_1\ \in R \wedge \quad t_2\ , t_3 \notin R$

La geometría de esta función cúbica $\mathrm{f(t) = a[t^3 + +pt + q]}$ depende del coeficiente y de la expresión Δ.

Gráfica de una función cúbica:



2.2.13. Definición de derivada

Sea la función $\mathrm{y = f(x)}$ uniforme y continua en el intervalo $< a;\ b >$ y

$x_0 \in < a; b >$, se llama derivada de la función $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ en el punto x_0 al límite (si existe) del **cociente incremental** cuando $\Delta x \to 0$ (x ∈ Dom f).

En este caso se dice que $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ es derivable o diferenciable en x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f}(x_0 + \Delta x) - \mathrm{f}(x_0)}{\Delta\ x}$$

Se designa con la notación $f^{´}(x_0)$, notación de Lagrange; Cauchy la denota D delante de la característica así: D $\mathrm{f}(x)$; hay además la denotación de Lebnitz que la escribe en la forma $\frac{dy}{dx}$ y también se designa por $y^{´}$

$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f(x)} - \mathrm{f}(x_0)}{\Delta x}$; x_0 ∈ Dom f

Sea $x = x_0 + \Delta x \wedge \Delta x = h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(x_0 + h) - \mathrm{f}(x_0)}{h}$$

PROPIEDADES Y REGLAS DE DERIVACION

Regla Funcional	Derivado
1° f(x)=a: a: constante	f'(x)=0
2° $f(X) = x^n$	f'(x)=n.x^{n-1}
3° f(x) = $a.x^n$; $\forall x \neq 0$	f'(x)=$a.nx^{n-1}$
4° f(x) = x	f'(x)= 1
5° f(x) = $\sqrt{x}$	f'(x)= $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6° f(x)=$\frac{1}{\sqrt{x}}$	f'(x)=$-\frac{1}{x^2}$
7° f(x)=$x^{\frac{1}{n}}$	f'(x)=$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
8° f(x)= a.f(x)	f'(x)=a. f'(x)
9° f(x)=f(x) $\pm$ g(x)	f'(x)= f'(x) $\pm$ g'(x)
10° f(y)=f(x). $g(x)$	f'(y)= f(x). $g'(x)$ − f'(x). $g(x)$
11° f(x)=$\frac{f(x)}{g(x)}$	f'(y)=$\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$
12° f(y)= f. g(x)	f'(y)= f [g(x)].g'(x)

2.2.14. Criterio de la primera derivada

- **Funciones crecientes y decrecientes:**

  Con el criterio de la primera derivada se sabe cuándo una función es creciente o decreciente.

- **Función creciente:**

  Si la función $y = f(x)$ está definida en un cierto intervalo I entonces f(x) es creciente en dicho intervalo para todo par de números x1 y x2 en el intervalo, si se cumple que f(x1) < f(x2) siempre que x1< x2.

- **Función decreciente:**

  Si la función $y = f(x)$ está definida en un cierto intervalo I entonces f(x) es decreciente en dicho intervalo para todo par de números x1 y x2 en el intervalo, si se cumple que $f(x1) > f(x2)$ siempre que $x1 > x2$.

2.2.15. Criterio de la segunda derivada

Con el criterio de la segunda derivada se sabe si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo y en qué punto cambia su concavidad, a dicho punto se le llama Punto de inflexión.

Valores extremos

Sea $y = f(x)$ una función que tiene a “c” como un número crítico, en el cual f´(c) = **Existe** y es igual a cero, entonces:

i) Si: $\boldsymbol{f}''(c) < 0$, la función posee un valor máximo en f(c) cuando x = c.

ii) Si: $\boldsymbol{f}''(c) > 0$, la función posee un valor mínimo en f(c) cuando x = c.

Ejemplo 01:

Analiza y grafica la siguiente función aplicando el criterio de la primera y segunda derivada: $f(x) = x^4 - 8x^2$

La primera derivada:

$f'(x) = 4x^3 - 16x\ Luego: \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = \{-2; 0; 2\}$ son los números críticos.

La segunda derivada:

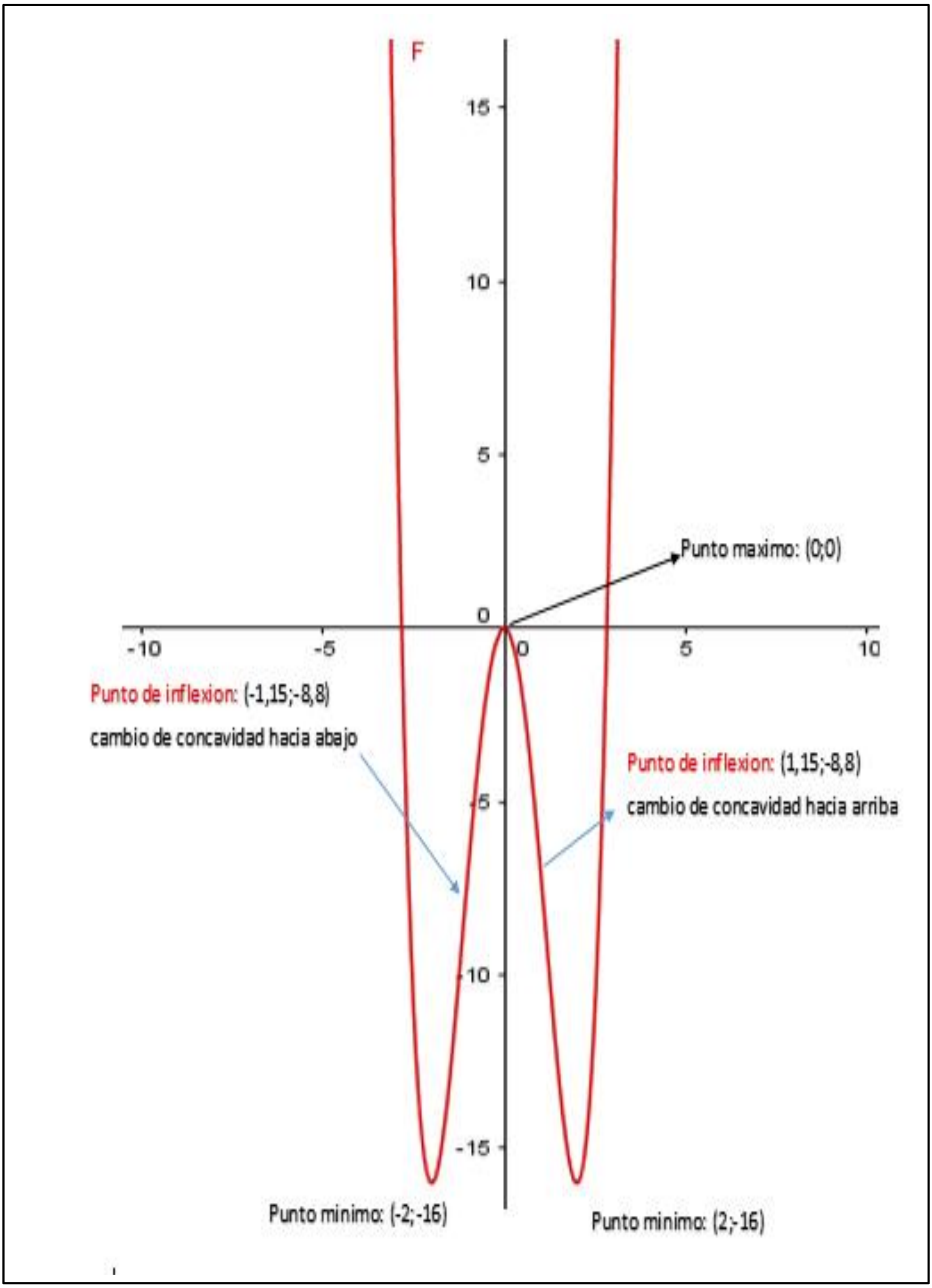
$f''(x) = 12x^2 - 16 \rightarrow 4(3x^2 - 4) \rightarrow x = \{-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\}$ Son los números críticos donde están los puntos de inflexión.

Analizando la función en cada intervalo:

Intervalos	f(x)	f´(x)	f¨(x)	Conclusiones
x<-2		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
x=-2	-16	0	+	P(-2;-16) Mínimo
-2<x<-1.15		+	+	f(x) es creciente y cóncava hacia arriba
X = -1.15	-8.8	+	0	P(-1.15; -8.8) punto de inflexión
-1.15<x<0		+	-	f(x) es creciente y cóncava hacia abajo
x = 0	0	0	-	P(0;0) Máximo
0<x<1.15		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
x = 1.15	-8.8	-	0	P(1.15; -8.8) punto de inflexión.
1.15<x<2		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
x=2	-16	0	+	P(2;-16) Mínimo
x>2		+	+	f(x) es creciente y cóncava hacia arriba

GRÁFICA N° 01

Gráfica de la función: $f(x) = x^4 - 8x^2$



Fuente: función $f(x) = x^4 - 8x^2$

Ejemplo 02

Analiza y grafica la siguiente función, aplicando el criterio de la primera y segunda derivada: $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$

La primera derivada

$f'(x) = 40x^4 - 20x^3 - 60x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 20x^2(x+1)(2x-3) = 0$

$\rightarrow x = \left\{-1; 0; \frac{3}{2}\right\}$ *son los números criticos para Máximos y Mínimos*

La segunda derivada:

$f''(x) = 160x^3 - 60x^2 - 120x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 20x(8x^2 - 3x - 6) = 0$

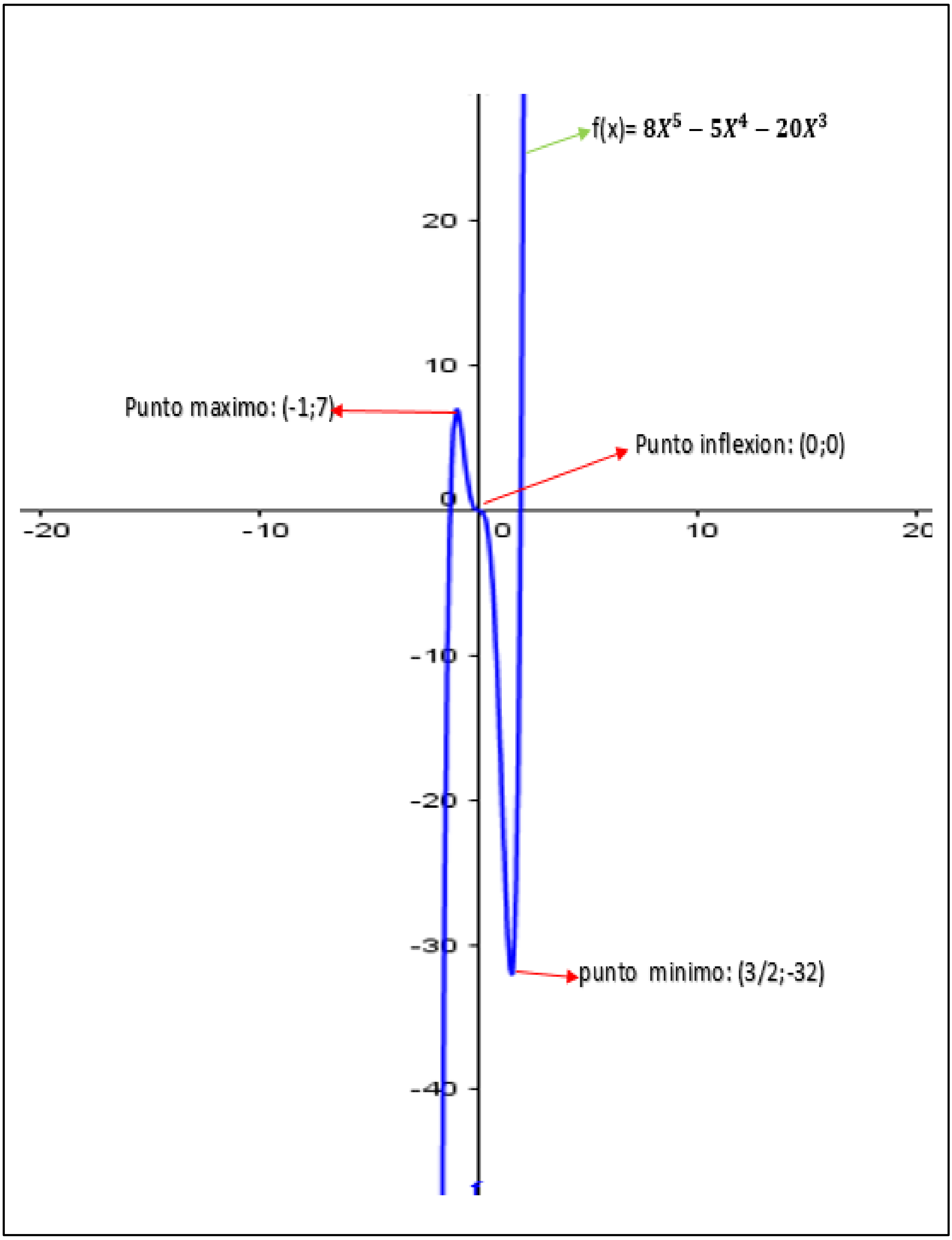
$x = \left\{\frac{3-\sqrt{201}}{16}; \frac{3+\sqrt{201}}{16}; 0\right\}$ *son números críticos para puntos de inflexión*

Analizando la función en cada intervalo:

Intervalos	f(x)	f´(x)	f¨(x)	Conclusiones
X<-1		+	-	f(x) es creciente y cóncava hacia abajo
X=-1	7	0	-	P(-1;7) Punto máximo
-1<x<$\frac{3-\sqrt{201}}{16}$		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
X=$\frac{3-\sqrt{201}}{16}$	4.29	-	0	P($\frac{3-\sqrt{201}}{16}$; 4.29) Punto de inflexión
-$\frac{3-\sqrt{201}}{16}$<x<0		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
X=0	0	0	0	P(0;0) punto de inflexión.
0<x<$\frac{3+\sqrt{201}}{16}$		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
X=$\frac{3+\sqrt{201}}{16}$	-20	-	0	P($\frac{3+\sqrt{201}}{16}$; -20) punto de inflexión.
$\frac{3+\sqrt{201}}{16}$<x<3/2		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
X=3/2	-32	0	+	P(3/2; -32) Punto mínimo
x>3/2		+	+	f(x) es creciente y cóncava hacia arriba

GRAFICA N° 02

Gráfica de la función: $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$



Fuente: función $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$

Ejemplo 03

Aplicando el criterio de la primera y segunda derivada analiza y grafica la siguiente función: $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3$

Primera derivada:

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 \rightarrow 5x^3(3x-4) = 0 \rightarrow x = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$ son los números críticos para Máximos y Mínimos.

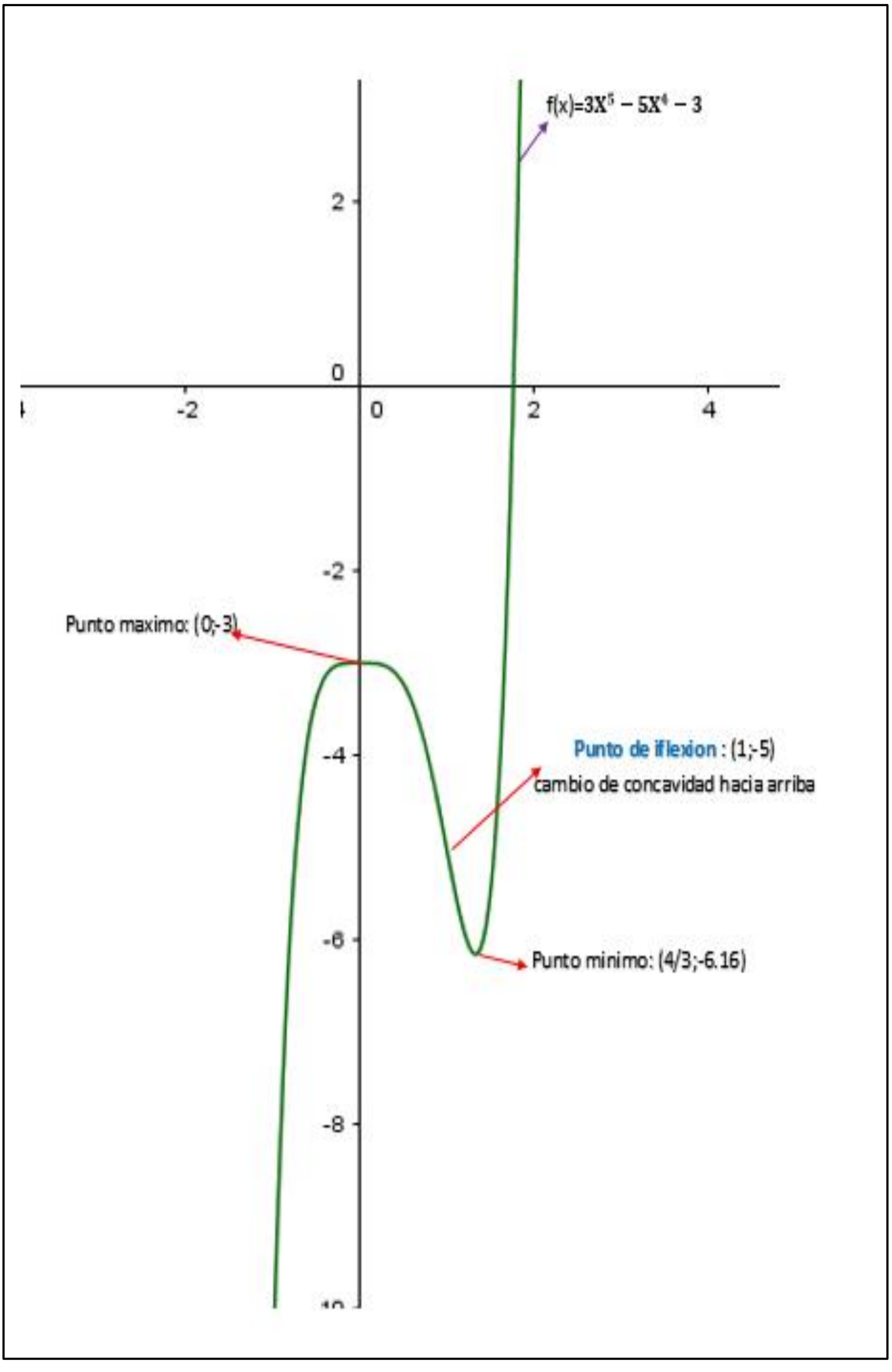
La segunda derivada:

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 \rightarrow 60x^2(x-1) = 0 \rightarrow x = \{0; 1\}$ son números críticos para puntos de inflexión.

Intervalos	**f(x)**	**f´(x)**	**f¨(x)**	**Conclusiones**
X<0		+	-	f(x) es creciente y cóncava hacia abajo
X=0	-3	0	0	P(0;-3) valor máximo relativo.
0<x<1		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
X=1	-5	-	0	P(1; -5) punto de inflexión
1<x<4/3		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
X=4/3	-0,16	-	+	P(4/3;-0,16) punto de inflexión.
x>4/3		+	+	f(x) es creciente y cóncava hacia arriba

GRAFICA N° 03

Gráfica de la función: $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3$



Fuente: Función $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3$

Ejemplo N° 04

Aplicando el criterio de la primera y segunda derivada, analiza y grafica la siguiente función: $f(x) = \boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}$

La primera derivada:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \rightarrow x = \{1; 3\}$ son los números críticos para Máximos y Mínimos.

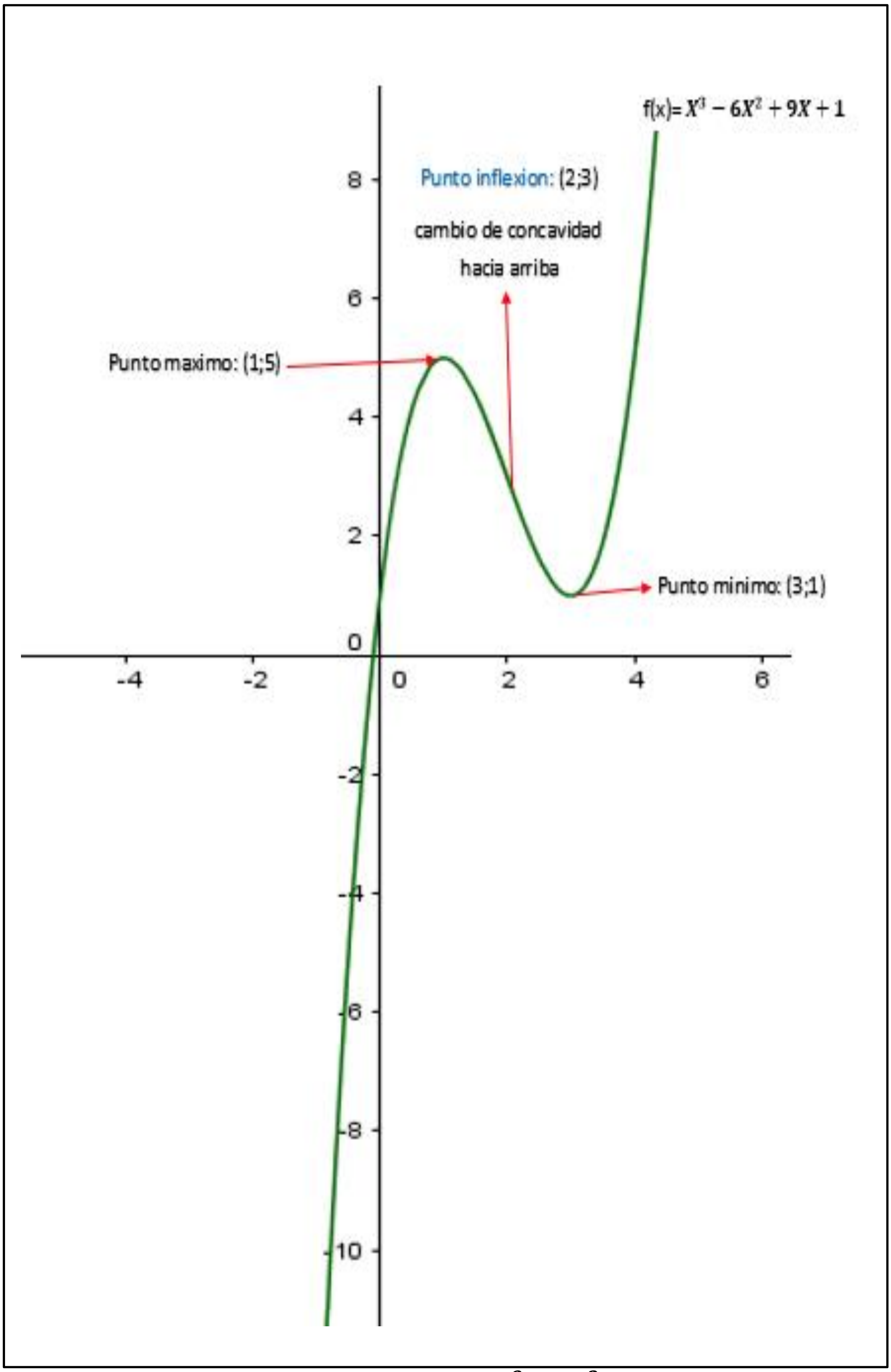
La segunda derivada:

$f''(x) = 6\mathrm{x} - 12 \rightarrow 6(\mathrm{x} - 2) = 0 \rightarrow \mathrm{x} = \{2\}$ es el número crítico para el punto de inflexión.

Intervalos	f(x)	f´(x)	f¨(x)	Conclusiones
X<1		+	-	f(x) es creciente y cóncava hacia abajo
X=1	5		-	P(1; -13) valor máximo relativo.
1<x<2		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
X=2	3	-		P(2; -33) punto de inflexión
2<x<3		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
X=3	1			P(3; -53) punto de inflexión.
x>3		+	+	f(x) es creciente y cóncava hacia arriba

GRAFICA N° 04

Gráfica de la función $f(x) = \boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}$



Fuente: Función $f(x) = \boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}$

Ejemplo N° 05

Aplicando el criterio de la primera y segunda derivada, analiza y grafica la siguiente función: $\boldsymbol{f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 4}$

Primera derivada

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20 \rightarrow 5(\boldsymbol{x^2} - 4)(\boldsymbol{x^2} + 1) \rightarrow x = \{-2;\ 2;\ \pm i\}$ los Reales son los números críticos para Máximos y Mínimos.

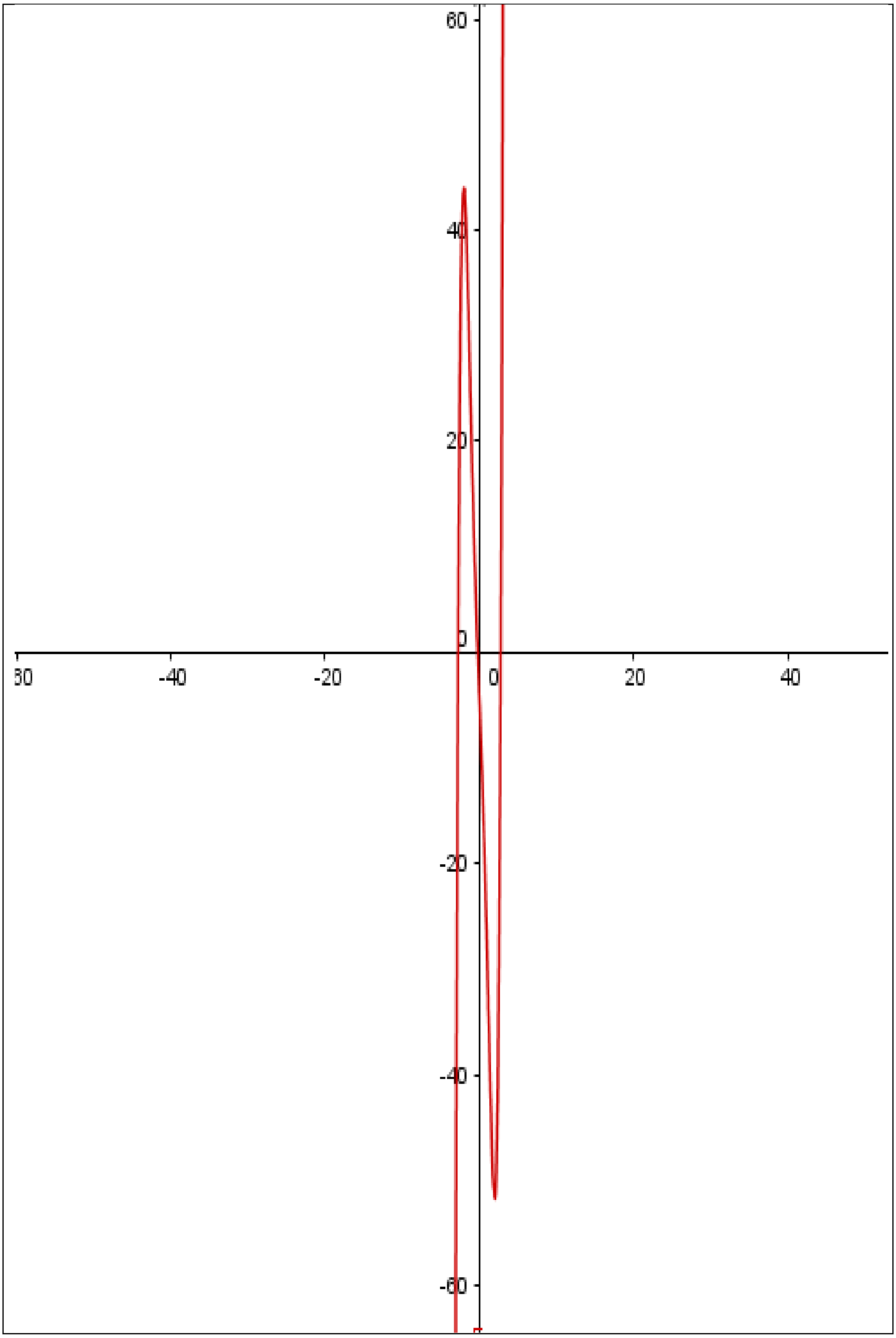
Segunda derivada

$f''(x) = 20x^3 - 30\text{x} \rightarrow 10x(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow \text{x} = \left\{0;\ \pm\sqrt{3/2}\right\}$ Son los números críticos para los Puntos de Inflexión.

Intervalos	f(x)	f´(x)	f¨(x)	Conclusiones
X<-2		+	-	f(x) es creciente y cóncava hacia abajo
X=-2	44	0	-100	P(-2;44) valor máximo relativo.
$-\boldsymbol{2}$<x<$-\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
X=$-\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$	26.1			P($-\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$; -21.9) punto de inflexión
$-\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$<x<0		-	+	f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba
X=0	-4			P(0;-4) punto de inflexión.
0<x<$\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
X=$\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$	-34.16			P($\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$;-34.16) punto de inflexión.
$\sqrt{\boldsymbol{3/2}}$ <x<2		-	-	f(x) es decreciente y cóncava hacia abajo
X=2				P(2; -52) valor mínimo relativo.
x>2		+	+	f(x) es creciente y cóncava hacia arriba

GRAFICA N° 05

Gráfica de la función: $\boldsymbol{f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 4}$



Fuente: Función $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 4$

2.3. Definición conceptual de términos.

- **Aprendizaje**

  Es el proceso de adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia. Dicho proceso puede ser entendido a partir de diversas posturas, lo que implica que existen diferentes teorías vinculadas al hecho de aprender. La psicología conductista, describe el aprendizaje de acuerdo a los cambios que pueden observarse en la conducta de un sujeto.

- **Función**

  Es una correspondencia entre dos conjuntos numéricos tal que a cada número del conjunto de partida le corresponde una sola imagen del conjunto de llegada.

  Una función f de un conjunto de A en un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el rango de la función es un subconjunto de B formados por todos los valores asignados.

- **Grafica de una función**

  Sí f es una función, entonces la grafica f es el conjunto de todo los puntos (x; y) del plano R^2 de los cuales (x; y) es un par ordenado de f.

- **Función lineal**

  Es una función polinómica de primer grado, su representación en el plano cartesiano es una línea recta y su forma básica es: $y = mx + b$

dode: “m” y “b” son constantes, “x” la variable independiente e “y” la variable dependiente.

- **Función cuadrática**

  Es una función polinómica de segundo grado; su representación en el plano cartesiano es una parábola y su forma básica es: $y = mx^2 + bx + c$ donde: m, b y c son constantes, “x” la variable independiente; además, $m \neq 0$ Además, sea f diferenciable en un intervalo abierto, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba si f' es creciente en este intervalo y cóncava hacia abajo si f' es decreciente en este intervalo.

- **Derivada**

  Es el valor límite del vínculo entre el aumento del valor de una función y el aumento de la variable independiente. Representa cómo se modifica una función a medida que su entrada también registra alteraciones. También la derivada representa, en un cierto punto, el valor de la pendiente de una recta tangente al gráfico de la función en dicho punto.

- **Criterio de la primera derivada**

  Se llama Criterio de la primera derivada al método o teorema utilizado frecuentemente en el cálculo matemático para determinar los mínimos y máximos relativos que pueden existir en una función mediante el uso de la primera derivada o derivada principal, donde se observa el cambio de signo, en un intervalo abierto señalado que contiene al punto crítico c.

- **Criterio de la segunda derivada**

  El Criterio o prueba de la segunda derivada es un teorema o método del cálculo matemático en el que se utiliza la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es convexa en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0, f(c)$ debe ser un mínimo relativo de f. De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0, f(c)$ debe ser un máximo relativo de f.

- **Extremos de una función**

  En matemáticas, los máximos y mínimos de una función, conocidos colectivamente como extremos de una función, son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región en particular de la curva (extremo local) o en el dominio de la función en su totalidad (extremo global o absoluto). De manera más general, los máximos y mínimos de un conjunto (como se define en teoría de conjuntos) son elementos mayores y menor en el conjunto, cuando existen. El localizar valores extremos es el objetivo básico de la optimización matemática.

- **Función**

  Es un conjunto de pares ordenados (x; y) en los que no existe dos pares ordenados diferentes con el mismo primer elemento. El conjunto de todos los valores admisibles de “x” se denomina dominio de la función y el conjunto de todos los valores resultantes “y” recibe el nombre del rango de la función.

- **Gráfico de una función**

  Sí f es una función, entonces la grafica f es el conjunto de todo los puntos (x; y) del plano R^2 de los cuales (x; y) es un par ordenado de f.

- **Punto máximo**

  Punto de una gráfica en donde el valor de una función es mayor que el de los puntos circundantes. Si existe un valor más alto en alguna parte de la gráfica, este punto máximo es un máximo local (o máximo relativo). En caso contrario, se trata de un máximo absoluto.

- **Punto mínimo**

  Punto en una gráfica en donde el valor de una función es menor al de todos los puntos circundantes. Si existe algún valor menor en alguna parte de la gráfica, este punto mínimo es un mínimo local (o mínimo relativo). En caso contrario, se trata de un mínimo absoluto.

- **Punto crítico**

  Un punto crítico de una función de una variable real es cualquier valor en el dominio en donde la función no es diferenciable.

- **Punto de inflexión**

  Un punto de inflexión es un punto donde los valores de *x* de una función continua pasan de un tipo de concavidad a otra. La curva "atraviesa" la tangente. Matemáticamente la derivada segunda de la función *f* en el punto de inflexión es cero, o no existe.

CAPITULO III

METODOLÓGIA

3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

El tipo de estudio realizado es explicativo según Melecio Paragua Morales (2012), puesto que se pretende utilizar el criterio de primera y segunda derivada para mejorar el aprendizaje de gráficas de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.

3.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación se encuentra en un estudio Cuasi Experimental según Hernández (2006), Melecio (2012) por que se trabaja con dos grupos: un grupo experimental (G.E.) y otro grupo de control (G.C.), donde se aplica una prueba de entrada (P.E.), una prueba de proceso (P.P.) y una prueba final (P.F.).

El esquema es el siguiente:

GE: O_1------x------ O_2 --------x-----------O_3

GC: O_1------------- O_2 -------------------O_3

Leyenda:

GE: Grupo experimental.

GC: Grupo de control

O1: Prueba inicial.

O2: Prueba de proceso.

O3: Prueba final.

X: Variable independiente**.**

3.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

3.3.1. POBLACIÓN

La población estaba constituida por todos los estudiantes de la Especialidad de Matemática y Física de la UNHEVAL, que corresponden a la matricula del año 2015, distribuidos de la siguiente manera:

CUADRO N° 01
Población Estudiantil de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015.

Ciclo	N° Estudiantes
I	16
III	17
V	17
VII	27
IX	11
Total	**88**

Fuente: Nómina de matriculados en la especialidad de matemática y física 2015-I Asuntos Académicos

3.3.2. MUESTRA

Estaba compuesto por los estudiantes matriculado en cuarto y quinto año de la especialidad de Matemática y Física de la UNHEVAL, matriculados en el año académico 2015.

CUADRO N° 02
Muestra Estudiantil de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015.

Año	Ciclo	GC	GE
Primero	I	16	
Segundo	III	17	
Tercero	V	17	
Cuarto	VII		27
Quinto	IX		11
Total		**50**	**38**

Fuente: Estudiantes matriculados de la especialidad de Matemática Física 2015 I- Asuntos Académicos

3.4. INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Se aplicó la prueba escrita con los siguientes nombres; prueba de entrada (P.E.), prueba de proceso (P.P.) y prueba final (P.F.). Las pruebas se diseñaron con 10 preguntas cada uno, cuyo valor fue de 2 puntos por pregunta, por lo que se usó la escala de calificación de 0 a 20 puntos.

La primera prueba fue de carácter diagnóstico. La segunda prueba proporcionaba datos relacionados a la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada para mejorar la gráfica de funciones polinomiales previamente clasificados, y la tercera prueba permitió opinar sobre el comportamiento grupal respecto a los niveles de aprendizaje final como determinar la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.

3.5. TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO Y PRESENTACIÓN DE DATOS

3.5.1. TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE DATOS

Se usó la estadística descriptiva, con las medidas de tendencia central y de dispersión.

Además, se usó la estadística inferencial, para la prueba de hipótesis con la prueba z de diferencia de dos medias para contrastar la hipótesis de investigación.

CAPITULO IV

RESULTADOS

Es importante recalcar que el estudio propuesto estaba encuadrado dentro de un diseño cuasi experimental, en consecuencia fueron las pruebas evolutivas: de entrada, proceso y final; debidamente validados, el principal instrumento de recolección de datos; además estaban dentro de la escala de calificación vigesimal $[0; 20]$ dividido en clases iguales con la siguiente propuesta de calificación cualitativa:

[0; 4)	Pésimo
[4; 8)	Malo
[8; 12)	Regular
[12; 16)	Bueno
[16; 20)	Muy bueno

El análisis descriptivo de los resultados se hace dentro de esta escala propuesta.

También es precisar indicar que el trabajo del campo se realizó con los alumnos de la especialidad de Matemática y Física de la UNHEVAL, tal como estaba especificado en la muestra. Se ejecutó la experiencia en las horas del curso de tesis I, donde participaba los estudiantes del VII y IX ciclo en la ejecución de la investigación que pertenecía al grupo experimental (G.E.). Para el grupo contralo solo hemos entrado aplicar las tres pruebas en los estudiantes del ciclo I, III y V.

Los resultados se han obtenido a partir de procesar los datos recogidos en el trabajo de campo con el instrumento propuesto para la investigación y como técnica de procesamiento de datos se usó la estadística, que ha permitido una interpretación por parte de los investigadores de manera adecuada sobre el problema en estudio que fue el aprendizaje de la gráfica de funciones con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, en tal sentido los resultados encontrados, fueron los siguientes:

4.1. ANÁLISIS DESCRIPTIVOS DE RESULTADOS DEL GRUPO EXPERIMENTAL

Tabla N° 03
Nivel de saberes previos sobre gráfica de funciones en los alumnos de matemática y física de la UNHEVAL-2015-G.E.

RESULTADOS: PRUEBA DE ENTRADA GRUPO EXPERIMENTAL			
Nota de los 38 estudiantes durante la prueba de entrada: 5 5 5 5 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 11 11 11 11 11 11 11 11 14 14 14 14 14 14 17 17 17 17			
Estadígrafos	**Valor**	**Calificativos**	**f i**
Media	9.08	5	4
Mediana	8.00	8	16
Moda	8.00	11	8
Desviación estándar	3.59	14	6
Varianza de la muestra	12.89	17	4
Coeficiente de asimetría	0.50		
Rango	12.00		
Mínimo	5		
Máximo	17		
n	38		

Fuente: Prueba de entrada

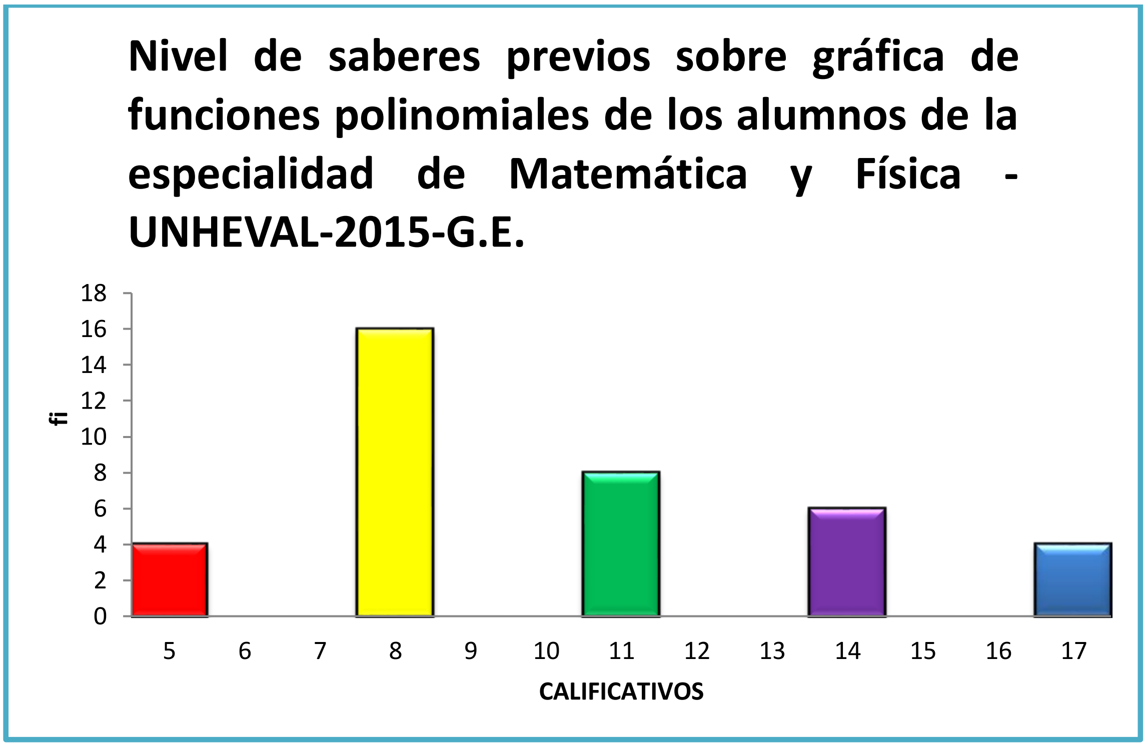
El nivel de saberes previos sobre el tema: gráfica de funciones, en los alumnos del G.E. se ubicaron en la clase Regular, con Media = 9.08; es decir, menos del 50% de temas previos para entender las clases sobre gráfica de funciones con aplicación del criterio de la primera y segunda derivada.

La Desviación estándar = 3,59 indica que, aparte de ser regular, eran bastante dispersos los saberes previos en las unidades de análisis; este fenómeno estaba corroborado por el Rango = 12.

El coeficiente de asimetría = 0,50 es positivo e indica que la mayoría de las unidades de análisis se encuentran con una fuerte tendencia hacia la nota Mínima = 5.00.

En las columnas de la distribución de frecuencias se puede observar que 20 alumnos de 38 estaban ubicados en las dos primeras calificaciones de cinco y ocho que pertenece al segundo clase y a la tercera clase respectivamente.

Gráfico N° 01



Fuente: Prueba de entrada

En el gráfico que antecede se observa que el mayor apuntamiento está sobre la calificativo 8 que pertenece a clase tres, lo que indica una asimetría positiva o una tendencia de las unidades de análisis hacia la clase mínima. Ello permite hacer el siguiente contraste:

Contraste del primer objetivo específico

Los niveles de saberes previos sobre gráfica de funciones eran regulares en los alumnos de la especialidad de matemática y física.

Tabla N° 04

Nivel de aprendizaje de gráfica de funciones durante la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015- G.E.

RESULTADOS: PRUEBA DE PROCESO GRUPO EXPERIMENTAL			
Nota de los 38 estudiantes durante la prueba de proceso: 9 9 9 9 9 9 9 9 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 13 13 13 13 13 13 15 15 15 15 15 15 17 17 17 19 19 19 19			
Estadígrafos	**Valor**	**Calificativos**	**f i**
Media	13	9	8
Mediana	12	11	11
Moda	11	13	6
Desviación estándar	3.20	15	6
Varianza de la muestra	10.24	17	3
Coeficiente de asimetría	0.33	19	4
Rango	10		
Mínimo	9		
Máximo	19		
n	38		

Fuente: Prueba de proceso

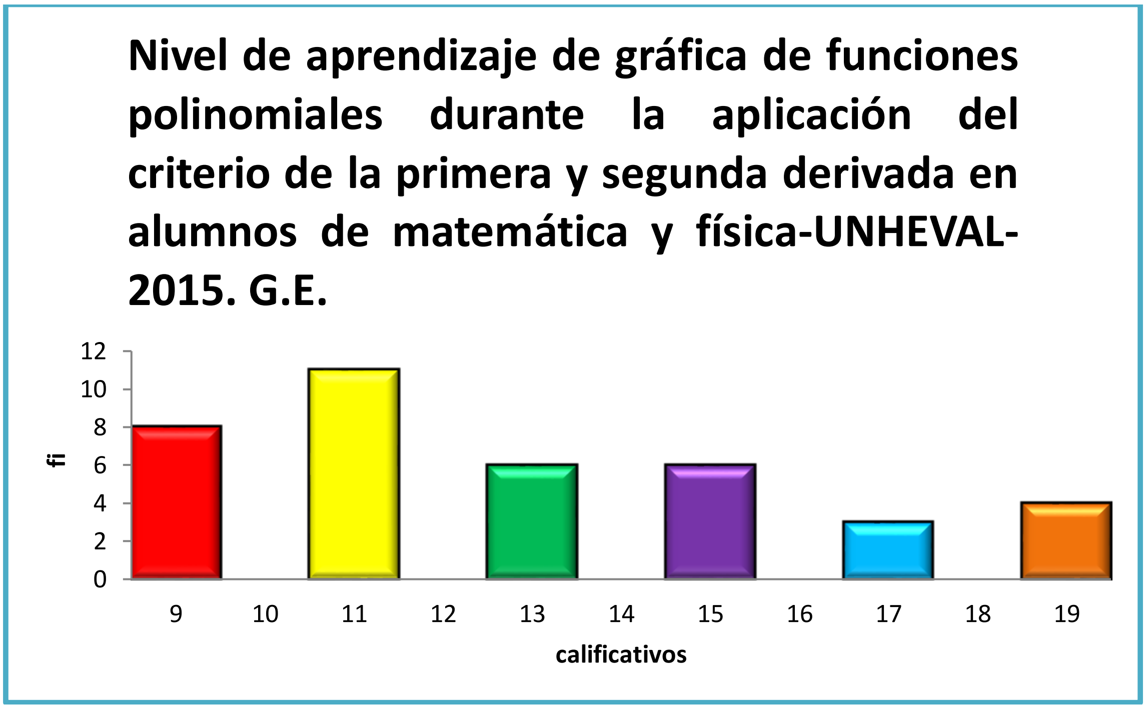
Luego de determinarse los saberes previos se aplicó una retroalimentación respecto a los temas pertinentes a gráfica de funciones en los alumnos del grupo experimental y con ello se desarrollaron las sesiones sobre gráfica de funciones con plena aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, y lo que se logró es un desplazamiento de la Media = 13 de las unidades de análisis hacia la nota Máximo = 19; es decir, se logró ingresar a la clase muy buena.

Al mismo tiempo se logró bajar el nivel de heterogeneidad de los niveles de aprendizaje individuales, indicado por Desviación estándar = 3,20 el mismo que bajó respecto a la observación inicial; con ello, se puede afirmar que los niveles de aprendizaje de gráfica de funciones de las unidades de análisis aumentaron y se homogenizaron entre ellos.

El Coeficiente de asimetría = 0,33 sigue siendo positivo; pero más bajo respecto a la primera observación; sin embargo, todo ello se está produciendo en un nuevo Rango = 10, encajado en un nuevo intervalo, con un Mínimo = 9 y un Máximo = 19; es decir, ha habido un desplazamiento de los niveles de aprendizaje de la gráfica de funciones con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada.

El mayor apuntamiento sigue en la segunda calificativo de once que pertenece a la tercera clase; 19 de 38 unidades de análisis están ubicados en las tres primeras clases, sin embargo, en las cuatro calificativos de 13, 15, 17 y 19 que pertenece al cuarto y quinto clase respectivamente, el crecimiento es notorio y eso hace que el coeficiente de asimetría sea más bajo.

Gráfico N° 02



Fuente: Prueba de proceso

En el gráfico se observa que el mayor apuntamiento está ubicado en la segundo calificativo once que pertenece a la tercera clase, de allí y hacia la izquierda se encuentran diecinueve de las 38 unidades de análisis; sin embargo, la otra mitad, está en las cuatro siguientes calificativos de 13, 15, 17 y 19 respectivamente que pertenece al cuarto y quinto clase, ello hace tender a una distribución normal.

Contraste del segundo objetivo específico

El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física indican que el rendimiento media mejora, respecto a la primera observación, con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada durante el proceso de investigación.

Tabla N° 05

Nivel de aprendizaje de gráfica de funciones al finalizar la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015- G.E.

RESULTADOS: PRUEBA DE SALIDA GRUPO EXPERIMENTAL

Nota de los 38 estudiantes durante la prueba de salida:
12 12 12 12 12 14 14 14 14 14 14 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16
18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 20 20 20 20

Estadígrafos	Valor	Calificativos	f i
Media	15.82	12	5
Mediana	16	14	6
Moda	16	16	13
Desviación estándar	2.49	18	10
Varianza de la muestra	6.21	20	4
Coeficiente de asimetría	0.01		
Rango	8		
Mínimo	12		
Máximo	20		
n	38		

Fuente: Prueba final

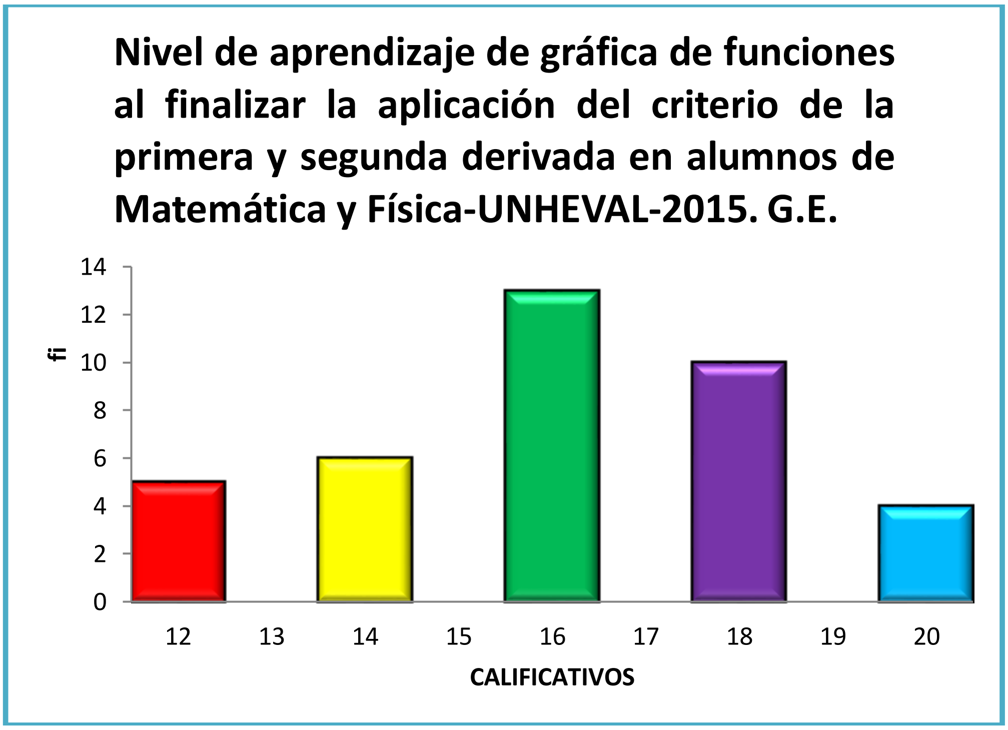
Al finalizar la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada para mejorar el nivel de aprendizaje del gráfico de funciones, el valor de la Media = 15,82 queda ubicado en el extremo superior de la clase BUENA, con una fuerte tendencia a la clase Muy buena; se interpreta que la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, favorece el aprendizaje del gráfico de funciones en los alumnos de la especialidad de matemática y física.

La Desviación estándar = 2,49 sigue con una tendencia hacia la baja respecto a la variabilidad producida en la primera y segunda observación, esto quiere decir, que las habilidades para el aprendizaje de cada uno de las unidades de análisis van homogenizándose; se va observando que no se producen muchos destaques personales, sino que todos van aprendiendo uniformemente.

El Rango = 8 baja respecto a la segunda observación, y ello se produce en un nuevo intervalo con Mínimo = 12 y Máximo = 20; es decir, lo que ha habido es un desplazamiento grupal del nivel de aprendizaje medio de gráfica de funciones con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de la especialidad de matemática y física, lo que ello indica es dos fenómenos: primero hay una mejora sustancial en los niveles de aprendizaje de gráfica de funciones; y segundo, dicha mejora se produce mejorando el nivel de homogeneidad de dicho aprendizaje entre ellos.

El Coeficiente de asimetría = 0,01 es positivo en baja y con una fuerte tendencia a cero (0), y, si ello se produce, se tendría una distribución normal. Cabe indicar, que la educación peruana en general se encuentra dibujando una asimetría positiva en diferentes niveles, es por ello que las investigaciones cuasi experimentales que aplican algún tipo de estilo de aprendizaje es con la finalidad de mejorar los niveles de aprendizaje, en este caso, de la gráfica de funciones, y lo que se ha conseguido es notorio, el valor del Coeficiente de asimetría con signo positiva va bajando de valor, llega a cero y cambia a signo negativo, pintando una asimetría negativa en los niveles de aprendizaje.

Gráfico N° 03



Fuente: Prueba final.

El mayor apuntamiento está sobre el calificativo dieciséis que pertenece al quinto clase, de allí hacia la derecha se encuentran ubicadas la mayoría de las unidades de análisis y configuran una asimetría normal; sin embargo, dicho fenómeno se produce en el intervalo $[12;\ 20]$; es decir, hubo una mejora muy notorio en el nivel de aprendizaje de gráfica de funciones con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de la especialidad de matemática y física de la UNHEVAL – 2015.

Contraste del tercer objetivo

El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física quedaron como BUENAS al finalizar la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, con una fuerte tendencia hacia la clase Muy buena.

Contraste del cuarto objetivo

El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física indican que de Media = 9.08 pasaron a Media = 15.82; es decir, se tuvo una mejora de 6.3 puntos en promedio, ello indica que la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada es efectiva para el aprendizaje de gráfico de funciones.

4.2. Análisis descriptivos de resultados del grupo de control

Tabla N° 06

Nivel de saberes previos sobre gráfica de funciones en los alumnos de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015- G.C.

RESULTADOS: PRUEBA DE ENTRADA GRUPO CONTROL			
Nota de los 50 alumnos durante la prueba de entrada de grupo control: 5 5 5 5 5 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 14 14 14 14 14 14 14 14 17 17 17 17 17			
Estadígrafos	**Valor**	**Calificativos**	**f i**
Media	9.06	5	5
Mediana	9.5	8	20
Moda	8	11	12
Desviación estándar	3.54	14	8
Varianza de la muestra	12.51	17	5
Coeficiente de asimetría	0.50		
Rango	12		
Mínimo	5		
Máximo	17		
N	50		

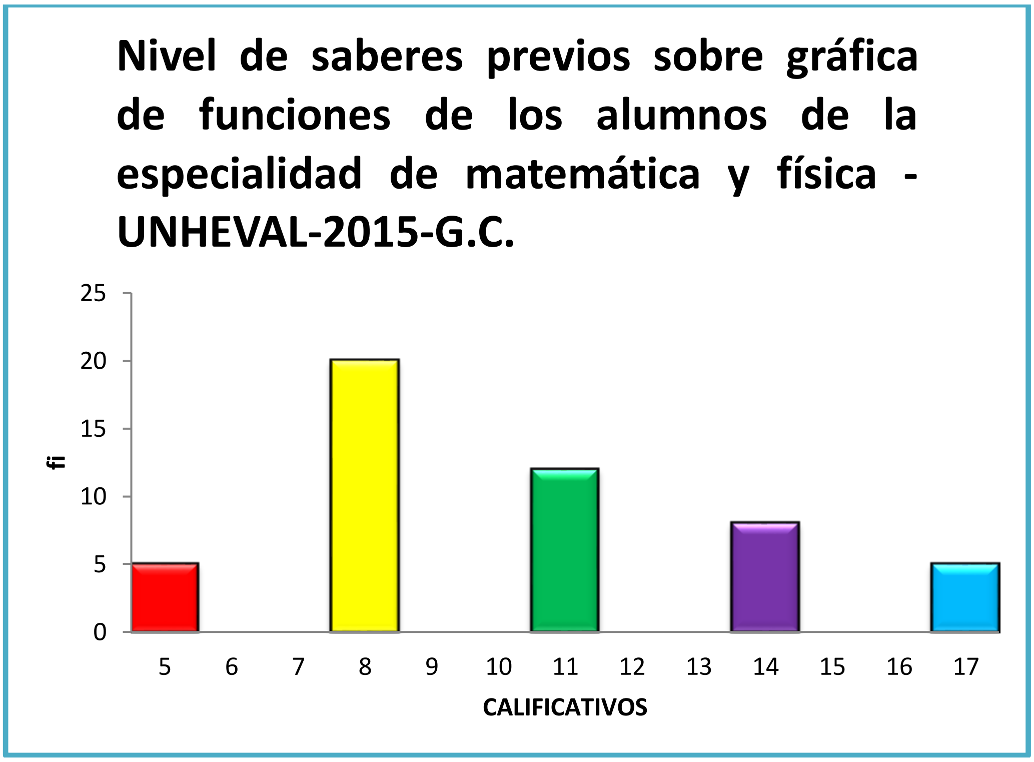
Fuente: Prueba de entrada

Al igual que en el grupo experimental, la tabla muestra la columna de los resultados con los estadígrafos y sus respectivos valores, y a la derecha la distribución de frecuencias con sus respectivas calificativos y frecuencias absolutas. En ella, la Media = 9.06 indica que los saberes previos eran comunes para ambos grupos; es decir, toda la población y estaban ubicados en la clase Regular y solo poseían aproximadamente un 50% de saberes previos para entender los temas respecto a gráfica de funciones con la aplicación de la primera y segunda derivada.

Además, la desviación estándar = 3,54 indica que dichos niveles de saberes previos eran heterogéneos; es decir, el nivel de saberes previos individuales difería entre ellos.

El Coeficiente de asimetría = 0.50 configura una asimetría positiva; es decir, el nivel de saberes previos de las unidades de análisis tiende hacia Mínimo = 5.

Gráfico N° 04



Fuente: Prueba de entrada

En el gráfico se observa que el mayor apuntamiento está sobre el calificativo 8 que pertenece a la tercera clase regular; es decir, que tan solo en las dos primeras calificativos de la izquierda se encuentran ubicadas la mitad de las unidades de análisis; o sea, más unidades de análisis con niveles de saberes previos bajos.

Tabla N° 07

Nivel de aprendizaje de gráfica de funciones durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de matemática y física de la UNHEVAL-2015- G.C.

RESULTADOS: PRUEBA DE PROCESO GRUPO CONTROL				
Nota de los 50 alumnos durante la prueba de proceso de grupo control: 5 5 5 5 5 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 14 14 14 14 14 14 14 14 14 17 17 17 17				
Estadígrafos	Valor		Calificativos	f i
Media	9		5	5
Mediana	9.50		8	20
Moda	8		11	12
Desviación estándar	3.38		14	9
Varianza de la muestra	11.43		17	4
Coeficiente de asimetría	0.38			
Rango	12			
Mínimo	5			
Máximo	17			
N	50			

Fuente: Prueba proceso

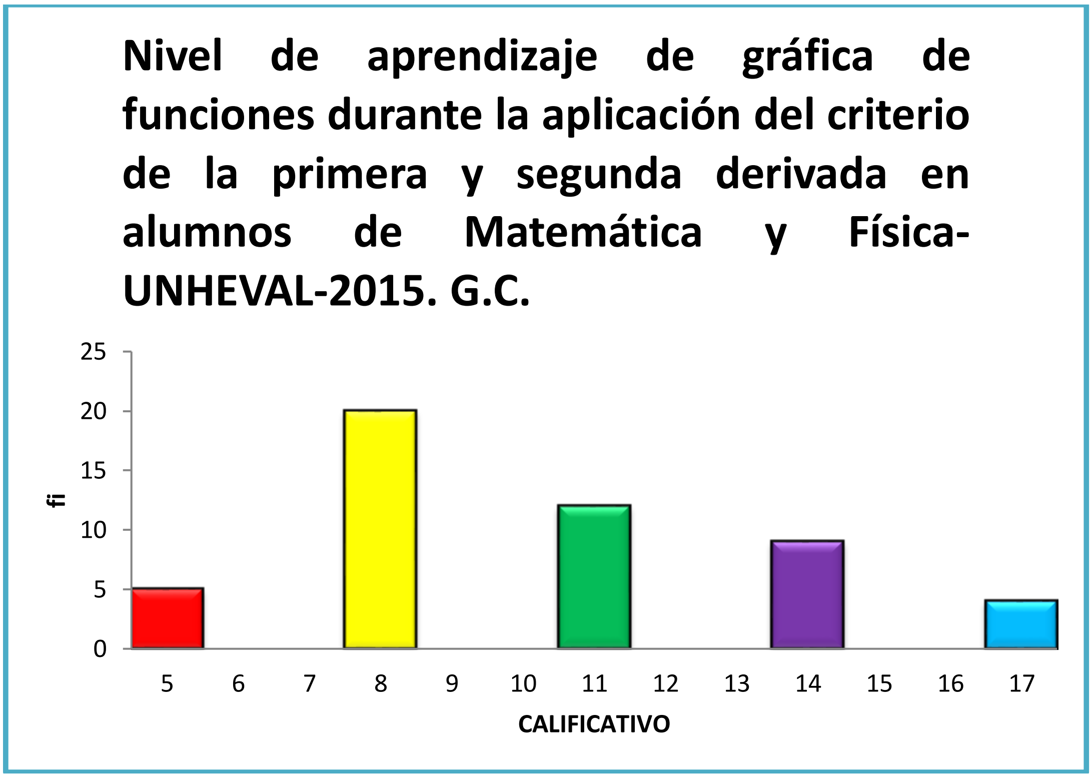
Las unidades de análisis del grupo de control no recibieron los beneficios de la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada para aprender la gráfica de funciones; en coherencia con ello, la Media = 9 indica un desplazamiento hacia Mínimo = 5 dentro de la misma clase REGULAR. Este bajón es entendible, porque se trata de alumnos de la especialidad, pues ellos estaban aprendiendo con la aplicación del método analítico y además tabulaban para levantar los gráficos.

La Desviación estándar = 3.38 indica una alta heterogeneidad entre los niveles de aprendizaje individuales de las unidades de análisis del grupo de control, cabe indicar que ellos no reciben los beneficios de la aplicación de la variable independiente.

Se observa que el Coeficiente de asimetría = 0.38 es positivo e indica una tendencia hacía Mínimo = 5

El Rango = 12,00 se produce entre Mínimo = 5 y Máximo = 17; es decir, los niveles de aprendizaje de gráfica de funciones de las unidades de análisis del grupo de control no mejoran.

Gráfico N° 05



Fuente: Prueba de proceso

La gráfica muestra una asimetría positiva; es decir, el nivel de aprendizaje de gráfica de funciones de la mayoría de las unidades de clase tiende hacia Mínimo = 5.

Tabla N° 08

Nivel de aprendizaje de gráfica de funciones al finalizar el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la UNHEVAL-2015- G.C.

RESULTADOS: PRUEBA DE SALIDA DE GRUPO CONTROL

Nota de los 50 alumnos durante la prueba de salida de grupo control:

5 5 5 5 5 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 17 17

Estadígrafos	Valor		Calificativos	f i
Media	8.94		5	5
Mediana	9		8	19
Moda	8		11	13
Desviación estándar	3,26		14	11
Varianza de la muestra	10,63		17	2
Coeficiente de asimetría	0,31			
Rango	12			
Mínimo	5			
Máximo	7			
n	50			

Fuente: Prueba final

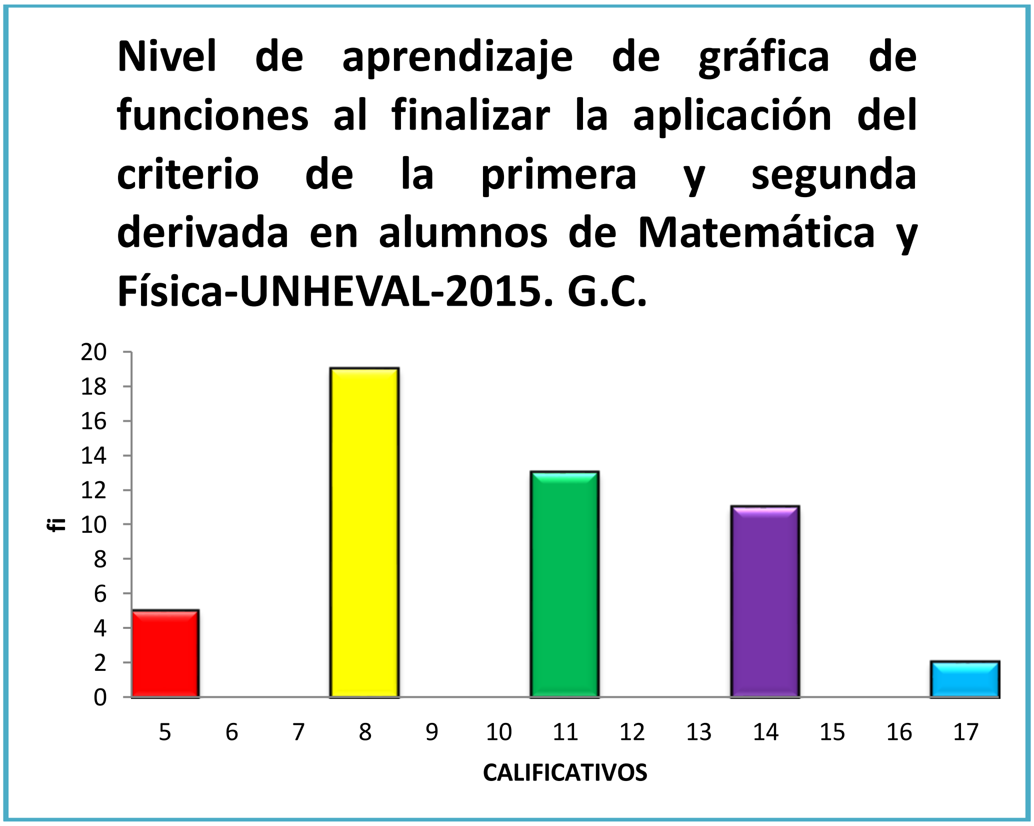
Al final de la experiencia la Media = 8.94 indica un desplazamiento hacia Mínimo = 5; ello es entendible, porque con solo tabulaciones el aprendizaje de grafica de funciones a partir del segundo grado ya es bastante complicado.

La Desviación estándar = 3.26 indica que los niveles de aprendizaje individual siguen dispersos entre ellos.

Se observa que el Coeficiente de asimetría = 0.31 en el grupo de control sigue siendo positiva.

El Rango = 12 se mantiene igual a la observación de proceso.

Gráfico N° 06



Fuente: Prueba final.

En la gráfica se observa que el mayor apuntamiento está sobre el calificativo 8 y ello configura una asimetría positiva.

Contraste del quinto objetivo específico

El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfica de funciones de los alumnos de la especialidad de Matemática y Física al finalizar el estudio con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, indica una Media = 15.92 para el grupo experimental, y una Media = 8.94 para el grupo de control; es decir, hay una diferencia de 6.98 puntos en promedio, la diferencia indica que la mejor opción para el aprendizaje de gráfica de funciones es la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada.

4.3. PRUEBA DE HIPÓTESIS

4.3.1. Datos para la prueba de hipótesis

$\mu_1 = 15{,}82$

$\mu_2 = 8{,}94$

$(\delta_e)^2 = 6{,}21$

$(\delta_c)^2 = 10{,}63$

95% de confiabilidad

E = 5% como nivel de significancia, con cola a la derecha.

Z = 1,96 para 95% de confiabilidad.

4.3.2. Formulación de hipótesis

$$H_0: \mu_E \leq \mu_C$$

$$H_A: \mu_E > \mu_C$$

4.3.3. Determinación de la prueba

La hipótesis alterna indica que la prueba es unilateral de cola a la derecha.

4.3.4. Determinación del nivel de significancia de la prueba

Se asume un nivel de significancia de 5% y un nivel de confiabilidad del 95%.

4.3.5. Determinación de la distribución muestral

La distribución muestral aplicada en el estudio es la distribución de diferencia de medias, se emplea la distribución normal ***z***.

4.3.6. Cálculo del estadístico de prueba

Fórmula: $$z = \frac{\overline{\mu_e} - \overline{\mu_c}}{\sqrt{\frac{\delta e^2}{n_1} + \frac{\delta_c^{\ 2}}{n_2}}}$$

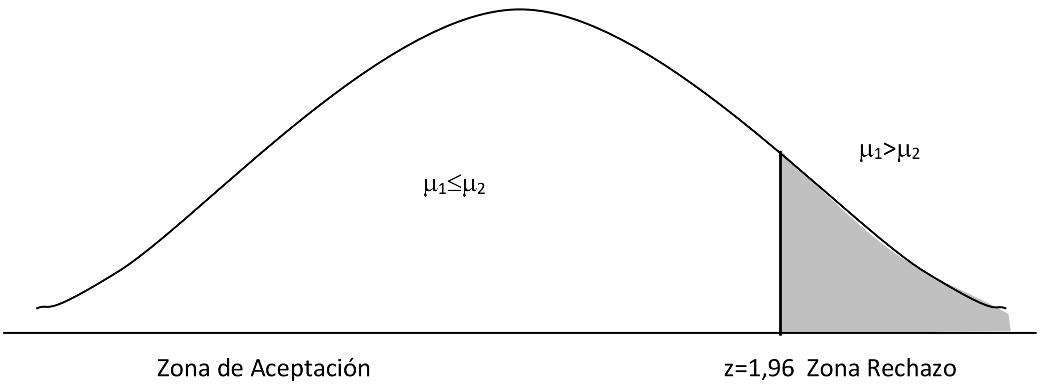
Reemplazando los datos en la fórmula.

$$z = \frac{15,82 - 8,94}{\sqrt{\frac{6,21}{38} + \frac{10,63}{50}}}$$

Luego el valor de la Z de prueba es: Z = 11,22

4.3.7. Gráfico

Gráfico Nº 07



Fuente: Distribución normal z

4.3.8. Contraste del objetivo general o hipótesis general

El valor Z = 11,22 en el gráfico que antecede, se ubica a la derecha de z = 1,96; es decir, en la zona de rechazo, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa; es decir se tiene indicios suficientes que prueban que el aprendizaje de la gráfica de funciones mejora con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de la especialidad de Matemática y Física de la UNHEVAL – 2015.

CAPITULO V

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Durante toda la secundaria y parte de la educación superior, el aprendizaje de la gráfica de funciones es a través de la tabulación de valores y hallando el mínimo de puntos debido a lo tedioso del cálculo de los mismos y más aún si no se cuenta con el apoyo de alguna tecnología, como la calculadora, por ejemplo. La gráfica de las funciones lineales no presenta ninguna dificultad, ya que, el mínimo de puntos para graficarlo es dos; lo mismo es para las funciones cuadráticas, hasta cuando los puntos máximos o mínimos sean enteros, y la gráfica está determinado por tres puntos; sin embargo, si los valores de los puntos Máximo o Mínimo son reales, ya se tienen problemas y esta dificultad aumenta si las funciones a graficar son de tercero o más grados, es debido a ello que los docentes que gestionan el aprendizaje de los alumnos sin ser docentes de matemática y muchos docentes de la especialidad inclusive, evitan el tema de gráfica de funciones o simplemente las omiten de sus contenidos silábicos.

Cuando el método para graficar es la tabulación, donde normalmente se asumen valores enteros, y los puntos críticos no siempre son enteros, es allí donde el método de tabulación presenta dificultades, es por ello que en el estudio se recomienda el uso del criterio de la primera y segunda derivadas para hallar los números críticos y de esa forma hallar y ubicar los puntos de manera adecuada.

Se usó la primera derivada para encontrar el valor máximo y mínimo relativo de las funciones; además, se determinó los intervalos en donde la función es creciente o decreciente; también se utilizó el criterio de la segunda derivada para encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de una función, y ello permite hallar los intervalos de concavidad hacia arriba o concavidad hacia abajo.

La prioridad en el estudio era hallar los valores máximos y mínimos de una función por el criterio de la primera y segunda derivada; también determinar si una función es creciente o decreciente en un intervalo; además, encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de una función utilizando el criterio de la segunda derivada, y con este mismo, determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo; en líneas generales, la aplicación del criterio de la primera y segunda deriva para levantar la gráfica de funciones, facilitó bastante; pues, el futuro docente de matemática tiene alternativas metodológicas para generar aprendizajes fáciles y coherentes para la realización de la gráfica de funciones, porque el hallar los puntos críticos y los otros elementos, permiten visualizar intuitivamente la trayectoria de la gráfica de las funciones.

Al término de la investigación se llegó a la conclusión, producto de la prueba de hipótesis siguiente: El valor Z = 11,22 se ubica a la derecha de z = 1,96; es decir, en la zona de rechazo, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa; es decir se tiene indicios suficientes que prueban que el aprendizaje de la gráfica de funciones mejoran con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de la especialidad de matemática y física de la UNHEVAL – 2015.

Se necesita formar docentes matemáticamente competentes; es decir, que tengan la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas durante la generación de aprendizajes en las unidades de análisis, y ello comprende emitir juicios bien fundados utilizando las matemáticas adecuadamente y comprometerse con ellas para satisfacer las necesidades de la vida personal como docentes constructivo, reflexivo y comprometido con la generación de aprendizajes en la unidades de análisis, ello implica que los estudiantes sean agentes activos de su aprendizaje, llevar aquellos conceptos que eran una vez abstractos y ahora forman parte de su realidad, todo ello se consigue con la aplicación del criterio de la primer y segunda derivada en el análisis y gráfica de funciones.

CONCLUSIONES

- Los niveles de saberes previos sobre gráfica de funciones eran regulares en los alumnos de la especialidad de matemática y física.
- El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física indican que el rendimiento medio mejora, respecto a la primera observación, con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada durante el proceso de investigación.
- El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física quedaron como BUENAS al finalizar la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, con una fuerte tendencia hacia la clase muy buena.
- El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física indican que de media = 9,08 pasaron a media = 15,82; es decir, se tuvo una mejora de 5,74 puntos en promedio, ello indica que la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada es efectiva para el aprendizaje de gráfico de funciones.
- El análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de grafica de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física al finalizar el estudio con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, indica una media = 15,82 para el grupo experimental, y una media = 8,94 para el grupo de control; es decir, hay una diferencia de 6,88 puntos en promedio, la diferencia

abismal indica que la mejor opción para el aprendizaje de gráfica de funciones es la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada.

- El valor Z = 11,22 en el gráfico que antecede, se ubica a la derecha de z = 1,96; es decir, en la zona de rechazo, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa; es decir se tiene indicios suficientes que prueban que el aprendizaje de la gráfica de funciones mejora con la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de la especialidad de Matemática y Física de la UNHEVAL – 2015.

SUGERENCIAS

- Se sugiere aplicar el criterio de la primera y segunda derivada para un mejor comprensión en el aprendizaje de graficas de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física como también en los diferentes asignaturas que curse.
- Se sugiere a los alumnos de Matemática y Física aplicar el criterio de primera derivada para hallar los puntos críticos intervalos decrecientes y crecientes. También aplicar el criterio de segunda derivada para hallar punto de inflexión y las concavidades.
- Se sugiere a los alumnos de Matemática y Física aplicar el criterio de segunda derivada para hallar los puntos críticos intervalos decrecientes y crecientes.
- hacer el análisis descriptivo del nivel de saberes previos sobre gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de Matemática y Física con la finalidad de determinar el nivel de saberes previos de las unidades de análisis.
- Se sugiere hacer el análisis descriptivo del nivel de aprendizaje de gráfico de funciones de los alumnos de la especialidad de matemática y física durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada.
- Se sugiere la comparación del nivel de saberes previos con el nivel de aprendizaje final en cada grupo, permite saber si la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada es efectiva para el aprendizaje de gráfico de funciones o no.

- Se sugiere la comparación del nivel de aprendizaje de gráfica de funciones al finalizar la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, de ambos grupos, permite saber la efectividad del criterio en la generación de aprendizajes en las unidades de análisis

BIBLIOGRAFÍA

- Pérez Córdoba, Rafael Ángel. (2009, p: 13). El constructivismo en los espacios educativos – Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/CA.
- Meza, Aníbal. (2010, p: 22). Tópicos básicos sobre Psicología del Aprendizaje.
- Pérez, Carlos. (2008, p: 134). Aprendizajes sin límites: Constructivismo.
- Paragua, M. & Rojas, A. (2002). Posicionamiento de los centros educativos. Delta Editores. Huánuco. Perú.
- Paragua, M. & et al. (2008). Investigación Educativa. JTP Editores E. I. R. L. Huánuco. Perú.
- Paragua, M. (2012). Investigación Científica Aplicada a la Educación Ambiental con Análisis Estadístico. Editorial: Sociedad Geográfica de Lima. Primera Edición. Ibegraf. Lima.
- Paragua, M. (2014). Investigación Científica. Educación Ambiental con Análisis Estadístico. Editorial Académica Española. OmniScriptum GmbH & Co. KG.
- Ríos, S. (1997). Iniciación Estadística. Edit Paraninfo.
- Hernández, R. & et al. (2008). Metodología de la Investigación. Edit. McGraw. Hill. Colombia.
- Tafur, R. (1995). La Tesis Universitaria. Edit. Mantaro. Lima.
- Buendía, L. (1997). Métodos de Investigación en Psicopedagogía. Edit. Mc-Graw Hill. España.
- Howard, C. (1999). Estadística paso a paso. Editorial Trillas. México.

- Webster, A. (2000). Estadística Aplicada a los Negocios y a la Economía. McGraw-Hill.
- Dikson, L. y otros. (1995). ***El Aprendizaje de las Matemáticas.*** Barcelona: MEC. Labor.
- Jiménez, V. (1990). ***Como Lograr una Enseñanza Activa de la Matemática.*** Barcelona: Ediciones CEAC.

ANEXOS

Anexo N° 01

MATRIZ DE CONSISTENCIA

EL CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA Y EL APRENDIZAJE DE GRAFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICA Y FÍSICA – UNHEVAL - 2015

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES
GENERAL **P.G.** ¿En qué medida la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015? **ESPECÍFICOS** P. E. • ¿Cuál es el nivel de saberes previos respecto a la gráfica de funciones polinomiales previo a la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015? • ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015? • ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales al finalizar el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015? • ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales antes y después del proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015? • ¿Cuál es el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales con y sin la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación	**GENERAL** **O.G.** Determinar en qué medida la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015. **ESPECÍFICOS** O.E. • Determinar el nivel de saberes previos respecto a la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015. • Determinar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales durante el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015. • Determinar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales al finalizar el proceso de aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015. • Comparar, analizar y evaluar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales antes y después de la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015. • Comparar, analizar y evaluar el nivel de aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales con y sin la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL – 2015.	**Ho:** La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada no mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL - Huánuco – 2015. **Ha:** La aplicación del criterio de la primera y segunda derivada mejora el aprendizaje de la gráfica de funciones polinomiales en los alumnos de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación – UNHEVAL - Huánuco – 2015.	**INDEPENDIENTE** Criterio de la primera y segunda derivada. **DEPENDIENTE** Aprendizaje de gráfica de funciones Polinomiales.

<table>
<tr><th colspan="6">METODOLOGÍA</th></tr>
<tr><th>Tipo de Investiga-ción</th><th>Diseño y esquema</th><th>Población</th><th>Muestra</th><th>Instrumento de recolección de datos</th><th>Técnica de procesamiento de datos</th></tr>
<tr>
<td>Explicativa</td>
<td>Diseño
Cuasi experimental

Esquema
GE:O_1 --x--O_2 –x—O_3
GC:O_1 --x--O_2 –x—O_3</td>
<td>Alumnos matriculados en el 2015 en la especiali-dad de matemáti-ca física UNHEVAL

Total 88 alumnos</td>
<td><table>
<tr><td>Ciclo</td><td>G.C.</td><td>G.E.</td></tr>
<tr><td>I</td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td>III</td><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>V</td><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>VII</td><td></td><td>27</td></tr>
<tr><td>IX</td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>50</td><td>38</td></tr>
</table></td>
<td>Prueba de Entrada. (PE)

Prueba de Proceso. (PP)

Prueba de Salida. (PS)</td>
<td>Estadística Descriptiva con medidas de tendencia central y de Dispersión.

Estadística Inferencial para la Prueba de Hipótesis</td>
</tr>
</table>

Anexo N° 02

PRUEBA DE ENTRADA (P.E.)

1. Grafica una función polinomial de grado cero.

2. Grafica una función identidad.

3. Grafica una función valor absoluto.

4. Grafica una función raíz cuadrada.

5. Grafica la función $Y = X^2$

6. Grafica $Y = X^2 - 4$

7. Grafica $Y = X^4 - 8$

8. Grafica $Y = X^5 + X^2 - 1$

9. Grafica $Y = X^2 + X^2 - 1 + 4$

10. Grafica $Y = 2X^3 - X^3 - 1$

Anexo N° 03

PRUEBA DE PROCESO (P.P.)

GRAFICAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES POLINOMIALES.

1. $Y = 3X^2 - 5X + 2$

2. $Y = X^5 + X + 1$

3. $Y = X^2 + \frac{1}{2}X + 1$

4. $Y = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 2$

5. $Y = X^3 + 5X^2 + 3X - 4$

6. $Y = X^4 - 8X^2$

7. $Y = X^5 + X + 7$

8. $Y = X^2 + \frac{1}{4}X + 5$

9. $Y = X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 4X + 4$

10. $Y = X^6 - 5X^3 - 3X + 8$

Anexo N° 04

PRUEBA FINAL (P.F.)

GRAFICAR LAS FUNCIONES UTILIZANDO EL CRTERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA.

1. $y = X^2(X\_4)^2 + 7X$

2. $Y = 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 12X - 4$

3. $Y = X^3 + 9X^2 + 27X + 9$

4. $Y = 3X^4 + 5X^3 + 21$

5. $Y = 6X^4 - 8X^3 + 7X - 6$

6. $Y = 8X^5 - 5X^4 + 20X^3$

7. $Y = 3X^5 - 5X^4 - 3$

8. $Y = X^3 - 6X^2 + 9x + 1$

9. $Y = X^5 - 5X^3 - 20x - 4$

10. $Y = 8X^7 - 5X^5 - 20X^2 - 10$

Anexo N° 05
SESIONES DE APRENDISAJE

TITULO DE LA SESION: Hallando la pendiente de una recta

II. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN DE CUERPOS	Elabora y usa estrategias	▪ Genera nuevas relaciones y datos basados en expresiones analíticas para reproducir movimientos rectos.
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	▪ Justifica la obtención de la pendiente de una recta, dadas las coordenadas de dos puntos.

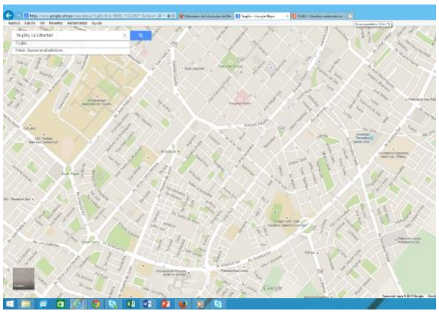
III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (20 minutos

- **El docente da la bienvenida a los estudiantes. Luego, plantea las siguientes preguntas:**
    - **¿Recuerdan las gráficas de las funciones fundamentales recta, parábola, cubica, etc?**
- **A través de un dialogo dirigido, los estudiantes responden a las preguntas. El docente coloca el modelo matemático a un costado de la pizarra.**
- **El docente presenta la siguiente situación problemática:**

Con la ayuda de la ubicación satelital GPS, hemos detectado la ciudad de Trujillo (anexo 1) y el desplazamiento de tres personas: Alicia, Bertha y Diego. Alicia se encuentra ubicada entre la avenida Alfonso Ugarte y el jirón Francisco Pizarro; y se desplaza por dicho jirón hasta el cruce con la avenida Jirón Diego de Almagro. Bertha se encuentra entre el jirón Miguel Grau y la calle Huayna Cápac; y desplaza por este último hasta el cruce con el jirón Bolívar. Daniel se encuentra ubicado entre la avenida Los Incas y la calle Atahualpa; y se desplaza por esta última hasta el cruce con el jirón Ayacucho.

- ¿Cómo podríamos determinar la pendiente de la recta que pasa por cada uno de dichos desplazamientos?
- ¿Qué representa dicha pendiente?



http://www.entrujillo.com/mapas/mapa-trujillo/

Nota: El docente puede utilizar el mapa de una ciudad de su región.

- **Los estudiantes dialogan e intercambian opiniones al interior del grupo.**
- **El docente hace referencia a las actividades en las cuales centrará su atención para el logro de los aprendizajes esperados. Centrará la atención en:**

  - La ubicación de las coordenadas de la posición inicial y la posición final en el plano cartesiano.

  -La distancia recorrida por cada uno de los personajes de la situación planteada.

  -La representación gráfica de los desplazamientos a través de la recta.

  -La determinación de la pendiente de cada una de las rectas.

- **El docente plantea las siguientes pautas de trabajo que serán consensuadas con los estudiantes:**

  - Se organizan en grupos de trabajo y acuerdan una forma o estrategia de comunicar los resultados.
  - Al interior de cada grupo de trabajo, se organizan de tal manera que todos los integrantes tengan el mismo nivel de participación en los procesos de resolución de la situación significativa.
  - Respetan los acuerdos y las normas de convivencias del grupo.

Desarrollo: (60 minutos)

- **En grupos, los estudiantes desarrollan la actividad 1 de la ficha de trabajo (anexo 2). La actividad consiste en dibujar el plano cartesiano sobre el mapa de la ciudad de Trujillo (anexo 1) y ubicar las coordenadas de la posición inicial y la posición final de cada uno de los personajes de la situación problemática planteada. Además, los estudiantes trazan la recta que pasa por dichos puntos.**

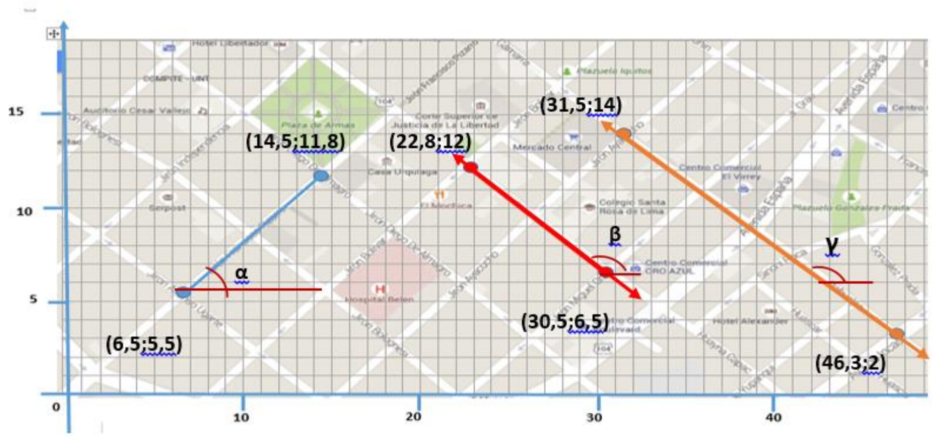
- **Cada grupo presenta sus representaciones gráficas argumentando en cada caso.**
- **Los estudiantes continúan con el trabajo de la ficha y desarrollan la actividad 2, la cual consiste en responder a las siguientes preguntas teniendo en consideración los resultados de la actividad 1.**

a. ¿Cómo determinamos el grado de inclinación de las rectas obtenidas en la actividad anterior?

Procesos que se evidencian en los estudiantes con mediación del docente.

-Los estudiantes ubican el ángulo de inclinación en cada uno de los casos.

Ejemplo:



b. **¿Cómo determinamos la pendiente de la recta?**

c. **¿Cómo podemos generalizar dicha expresión para dos puntos cualesquiera de la recta?**

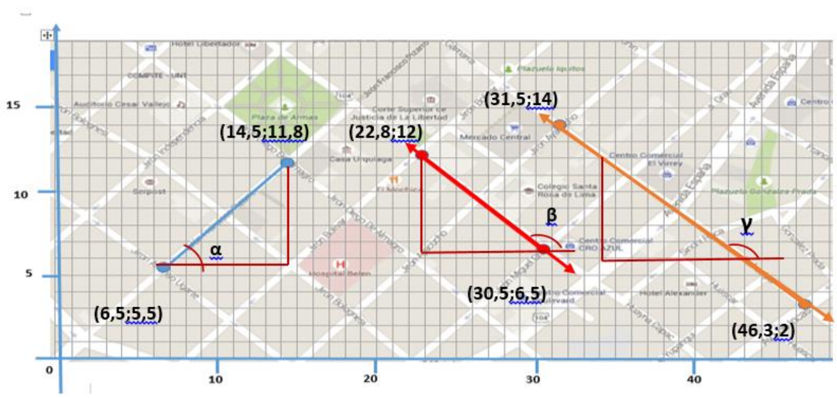
-Con la ayuda de un transportador, los estudiantes ubican el ángulo de inclinación de la recta determinada en la pregunta a. A continuación, hallan su pendiente.

Procesos que se evidencian en los estudiantes con la mediación del docente

- **Los estudiantes analizan que la pendiente de la recta está determinada por la tangente del ángulo de inclinación con respecto a la horizontal.**
- **Forman el triángulo rectángulo, considerando dos puntos de la recta y hallan el valor de la tangente del ángulo de inclinación en cada uno de los casos.**
- **Identifican a la tangente del ángulo de inclinación como la pendiente de la recta.**

Nota: Para el ejemplo, en el primer y segundo desplazamiento, se considera el punto de posición inicial y final y; en el tercero, dos puntos cualesquiera.

Ejemplo:



- **Pendiente del primer desplazamiento:**

$$\tan\ \propto = \frac{11,8-5,5}{14,5-6,5} = \frac{6,3}{8} = 0,788$$

$$m = tan\alpha = 0,79$$

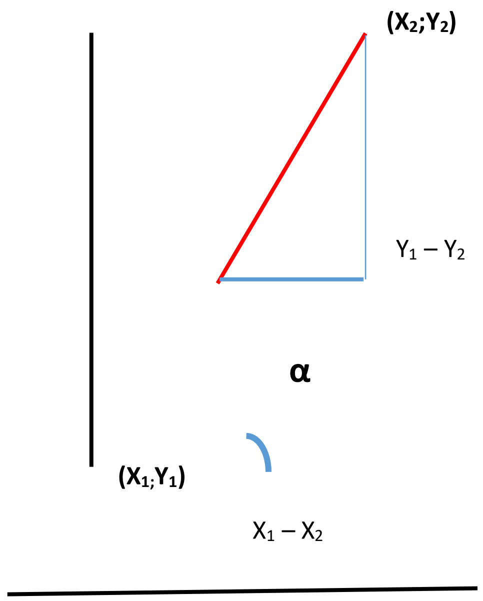
- **Pendiente del segundo desplazamiento:**

$$\tan\ \propto = \frac{6,5-12}{30,5-22,8} = \frac{-5,5}{7,7} = -0,714$$

Los estudiantes, con la mediación del docente, justifican en qué casos la pendiente es negativa.

- <u>Pendiente del tercer desplazamiento</u>: Siguen el mismo procedimiento.

- Hallan el modelo matemático para encontrar la pendiente de una recta considerando dos puntos cualesquiera de la misma.
- Los estudiantes generalizan la expresión matemática para hallar la pendiente para dos puntos cualquiera en el plano cartesiano:



$$m = Tan \propto = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

d. Con la ayuda de un transportador, los estudiantes miden cada uno de los ángulos. Luego, utilizando tablas, ubican la tangente de dicho ángulo. Corroboran con los valores obtenidos al emplear el modelo matemático. Para terminar, anotan en la tabla ambos resultados.

Pendiente con modelo matemático	Pendiente con medida del ángulo y tabla
1.	1.
2.	2.
3.	3.

- **El docente plantea las siguientes preguntas de la actividad 2:**

  e. ¿Por qué se evidencia un margen de error en ambas cantidades?

  f. ¿Cómo se podría disminuir el margen de error?

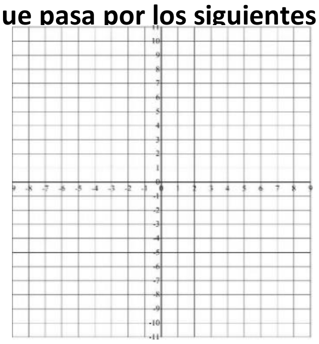
- **Los estudiantes dialogan al interior del grupo, el docente promueve el diálogo y la reflexión y concluyen en lo siguiente:**

  “Todo resultado experimental -o medida hecha en el laboratorio- es susceptible de tener algún margen de error por qué no es posible la exactitud sino se trabaja con estimaciones”.

- **A continuación, los estudiantes desarrollan la actividad 3 de la ficha de trabajo.**

  A. Los estudiantes dibujan la recta que pasa por los siguientes pares ordenados y hallan la pendiente para cada caso.

  a) (1, 4) y (7, 4)
  b) (-3, -2) y (1, 2)
  c) (-4, 2) y (3, 2)
  d) (2, 4) y (2, 3)



  B. Los estudiantes observan y analizan la interpretación geométrica de cada uno de los casos de la actividad anterior (A) y realizan la interpretación geométrica. Completan el siguiente cuadro:

	Pendiente (positivo o negativo)	Tipo de recta (ascendente o descendente)
a		
b		
c		
d		

C. Los estudiantes deducen la ecuación de la recta a partir de su pendiente:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

-Se asume que uno de esos puntos es un punto genérico (*x*, *y*) que puede ser cualquier punto en la recta; y el otro, un punto específico (x_1, y_1) **.**

-Los estudiantes sustituyen estas coordenadas en la fórmula, obtienen:

$$m = \frac{Y - Y_1}{X - X_1}$$

$$\boxed{Y - Y_1 - m(X - \ X_1)\text{.........(1)}}$$

- **Los estudiante, considerando el ejercicio anterior (C), analizan el siguiente caso :**

  D. Si el punto (x_1, y_1) **corta al eje "y", ¿cómo quedaría la ecuación de la recta?**

  Para que corte al eje "y", entonces $X_1 = 0$

$$Y - Y_1 = m\ (X - 0)$$

  - **Los estudiantes analizan y concluyen que si corta al eje "y", entonces la abscisa es cero.**

    Escriben la nueva expresión:

$$Y_2 - Y_1 = m(X_2 - X_1)$$

- **Los estudiantes, en grupos, desarrollan la actividad 4 de la ficha de trabajo.**

  i. Los estudiantes dibujan las rectas que pasan por los siguientes pares ordenados:

  a) (-3 , -3) y (2, -3)

  b) (0, 4) y (2, -4)

  c) (-2, -1) y (1, 2)

  d) (-3, 2) y (-3, -1)

  ii. Hallan la pendiente de cada una de las rectas.

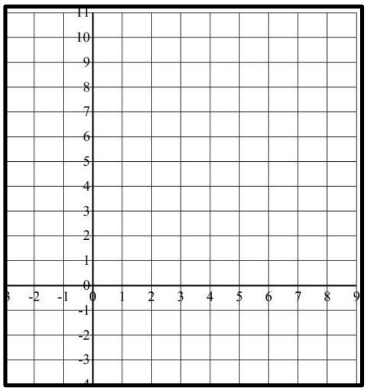
  iii. Ubican un punto en ella y determinan su ecuación de punto pendiente.

- **Los estudiantes presentan sus trabajos en papelógrafos utilizando la técnica del museo. Un integrante de cada grupo argumenta sus respuestas.**

Cierre: (10 minutos)

- **Los estudiantes resuelven la actividad 5 de la ficha de trabajo, la cual presenta la siguiente situación:**

“Una persona se desplaza de un punto A hacia un punto B. Si se sabe que la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos es 0,75, ¿cuál sería el posible desplazamiento?



- **Cada grupo presenta el posible desplazamiento en un plano cartesiano. Un integrante de cada grupo sustenta su respuesta.**
- **El docente plantea la siguiente conclusión:**

-La pendiente “m” de una recta es un número que proporciona información sobre la inclinación de la recta en el plano.

-Una recta queda perfectamente determinada por su inclinación y por un punto contenido en ella.

- **El docente plantea algunas preguntas metacognitivas:**

¿Qué aprendimos el día de hoy? ¿Cómo lo aprendimos? ¿De qué manera lo aprendido nos ayuda en nuestra vida cotidiana?

- **Los estudiantes responden a través de lluvia de ideas.**

Observación: La sesión presenta la adaptación de la estrategia: “Aprendizajes basado en problemas de modelación matemática” – Rutas del Aprendizaje 2015, ciclo VII, página 74

Título de la sesión: Graficando la función cuadrática de maximización de ganancias.

II. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE REGULARIDAD, EQUIVALENA Y CAMBIO	Elabora y usa estrategias	▪ Emplea procedimientos y estrategias, recursos gráficos y otros al resolver problemas relacionados a funciones cuadráticas.
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	▪ Generaliza utilizando el razonamiento inductivo, una regla para determinar las coordenadas de los vértices de las funciones cuadráticas de la forma f(x)=a(x-p)2+q, ∀ a≠0, utilizando el razonamiento inductivo.

7j

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (20 minutos)

- **El docente da la bienvenida a los estudiantes y pregunta: ¿Qué actividades realizamos la clase anterior? ¿Qué aprendizajes logramos?**
- **El docente coloca en la pizarra las expresiones de las de funciones cuadráticas, en su forma polinómica, realizadas la clase anterior y sus respectivas tablas (1 y 2 de la clase anterior):**

$$\boxed{Y = -40x^2 + 250x +}$$

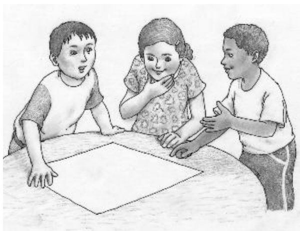
$$\boxed{Y = -40x^2 +}$$

- **Los estudiantes, de forma voluntaria, explican los procesos realizados para determinar dichos modelos.**
- **Los estudiantes identifican los elementos de la función cuadrática.**

- **Los estudiantes responden a las siguientes interrogantes:**

  - ¿Cómo representamos gráficamente una función cuadrática?
  - ¿Todas tienen las mismas características o se diferencian según el modelo?
  - ¿Tiene algún nombre en particular?
  - ¿Cómo determinan los valores de los coeficientes de la

- **Los estudiantes dialogan en equipo sobre las preguntas planteadas.**



- **Luego, el docente presenta el propósito de la sesión, escribiéndola en la pizarra, (el docente puede llevar anotado el aprendizaje esperado en un papelote o en una diapositiva).**

- **Representar una función cuadrática.**
- **Identificar e interpretar los elementos de una función cudrática."**

Desarrollo: 50 minutos

- **Los estudiantes desarrollan la actividad 1 de la ficha de trabajo 1 (anexo 1). Considerando la tabla 1, identifican los pares ordenados y los organizan en una tabla identificando variables:**

Entrada adultos: S/ 10 Soles	
Descuento (x)	**Ingresos (Y)**
0	1500
0,5	1650
1	1710
1,5	1785
2	1840
2,5	1875
3	1890
3,125	1890,625
3,25	1890
3,5	1885
4	1860
4,5	1815
5	1750

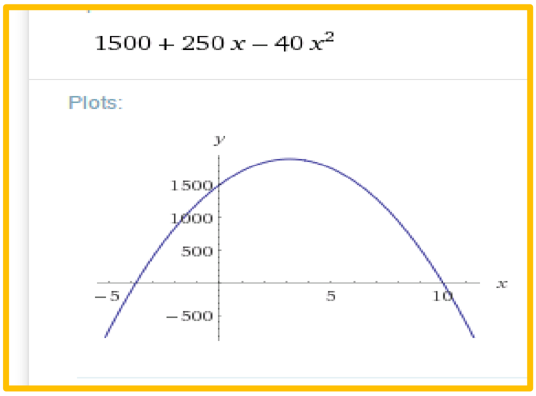
- **Los estudiantes ubican los pares ordenados en un plano cartesiano. El docente hace énfasis en la precisión de la ubicación de los puntos. Luego, los estudiantes unen los**

puntos con un adecuado trazo.

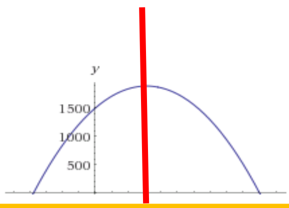
- **El docente pregunta: ¿Qué sucede si tabulamos valores negativos para “x”? ¿Qué sucede con la gráfica? ¿Pueden darse valores negativos para “x” en el problema planteado?**

-Los estudiantes analizan e intercambian opiniones y se espera que concluyan que en la vida real no puede darse el caso de una rebaja negativa, pero en términos puramente matemáticos si es posible.

-Agregan algunos valores negativos para la variable “x” en la tabulación y completan el gráfico, prolongando hasta cortar al eje “x”.



Todas las funciones parabólicas tienen un eje de simetría vertical, que siempre pasa por el vértice, es una línea imaginaria que divide en dos mitades la forma de U y son imágenes de espejo una de la otra. Cualquier par de puntos con el mismo valor de *“y”* estarán a la misma distancia del eje.



NOTA: Si el colegio cuenta con internet puede utilizar este link para graficar la función:

http://www.wolframalpha.com/input/?i=1500%2B250x++%E2%80%93+40x%5E2

Otra opción es descargar el *Graphmatica* u otro programa alternativo.

- **A partir de la gráfica, los estudiantes responden las preguntas de la ficha de trabajo 1.**

1. **¿Qué características tiene la gráfica obtenida?**

   -Se espera que los estudiantes identifiquen a la parábola como la representación gráfica de la función cuadrática.

   -Identifican el vértice como el punto más alto o el punto más bajo según sea el caso. Se especifica que:

   El vértice, es el punto más alto de la parábola si ésta se abre hacia abajo, pero será el punto más bajo si la parábola se abre hacia arriba.

   -El docente hace énfasis en la simetría de la parábola.

2. **¿Cuáles son las coordenadas del vértice de nuestra gráfica? ¿Qué interpretación tiene para la situación planteada?**

   -Se espera que los estudiantes identifiquen las coordenadas del vértice en la gráfica realizada: (3,125; 1890,625)

   -Reconocen que la abscisa representa el descuento realizado y la ordenada el ingreso máximo obtenido (punto más alto de la parábola).

3. **¿Se podrían obtener las coordenadas del vértice a partir de la ecuación general de la función cuadrática? Explique.**

   -Se espera que los estudiantes -con la mediación del docente- lleguen a expresar la función cuadrática en su forma canónica: $f(x) = a(x - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$ **para determinar las coordenadas de los vértices.**

   -Para ello, es necesario completar cuadrados.

-Dividen toda la expresión por -40, luego simplifican.

$$\frac{y}{-40} = \frac{-40x^2}{-40} + \frac{250x}{-40} + \frac{1500}{-40}$$

$$\frac{y}{-40} = x^2 - \frac{25x}{4} - \frac{75}{2}$$

Se completan cuadrados:

$$\frac{y}{-40} = x^2 - 2\left(\frac{25x}{8}\right) + (\frac{25}{8})^2 - (\frac{25}{8})^2 - \frac{75}{2}$$

Se homogenizan los dos últimos términos para operar

$$\frac{y}{-40} = (x^2 - \frac{25}{8})^2 - (\frac{625}{64}) - \frac{2400}{64}$$

$$\frac{y}{-40} = (x^2 - \frac{25}{8})^2 - (\frac{3025}{64})$$

Se multiplica a toda la expresión por -40

$$y = -40(x^2 - \frac{25}{8})^2 + (\frac{121\,000}{64})$$

$$\boxed{f(x) = -40(x - 3,125)^2 + (1890,625)}$$

- **Cada equipo presenta sus procedimientos y los cálculos realizados.**
- **El docente resalta que esta forma de expresar la función cuadrática es equivalente a la expresión general determinada anteriormente. ¿Encuentran valores conocidos por ustedes en dicha expresión?**
- **Los estudiantes se percatan que aparecen las coordenadas del vértice de la parábola.**
- **Los estudiantes comprenden que esta forma de representar la función cuadrática permite obtener, de manera directa, las coordenadas del vértice.**

- **G**

$\boldsymbol{f(x) = a(x-h)^2 + k}$ **Forma canónica de la función**

e

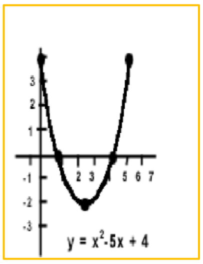
ralizan con la mediación del docente:

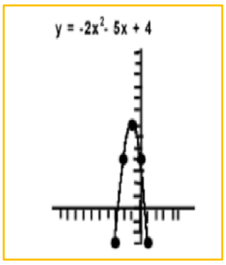
(h;k) $\boldsymbol{son\ los\ vérices\ de\ la\ parábola}$

$\boldsymbol{a: parámetro\ de\ la\ parábola\ que\ le\ da\ la\ orientación.}$

- Cuando a >0, la parábola se abre hacia arriba.
- Cuando a <0 la parábola se abre hacia abajo.

- **El docente presenta los siguientes ejemplos:**





- **Los estudiantes, con la mediación del docente, generalizan la expresión matemática para hallar el vértice de la parábola.**

A partir de la forma polinómica de la función cuadrática:

1. **Dada la función f (x)**
   f (x) = ax ^{2} + bx + c
2. **Factorizar "a" de los términos en x ^{2} y x**
   f (x) = a [x ^{2} + (b / a) x] + c
3. **de sumar y restar (b/2a) ^{2} dentro de los paréntesis**
   f (x) = a [x ^{2} + (b / a) x + (b/2a) ^{2} - (b/2a) ^{2}] + c
4. **Tenga en cuenta que**
   x ^{2} + (b / a) x + (b/2a) ^{2}

5. puede ser escrito como
   [x + (b/2a)] ^{2}
6. Ahora escribir f de la siguiente manera
   f (x) = a [x + (b/2a)] ^{2} - a (b/2a) ^{2} + c
7. que puede ser escrito como
   f (x) = a [x + (b/2a)] ^{2} - (b ^{2} / 4a) + c
8. Esta es la expresión matemática para determinar las coordenadas del vértice a partir de su forma polinómica:

h = b / (2a)   k = c $-\frac{b^2}{4a}$

- OTRA FORMA DE DETERMINAR LOS VÉRTICES DE LA PARÁBOLA:

A partir de su forma polinómica $ax^2 + bx + c$, se obtiene la primera derivada y se iguala cero: $2ax + b = 0$ $x = \frac{-b}{2a}$ (abscisa del vértice), y la ordenada se obtiene reemplazando en el modelo matemático inicial

4. ¿Cómo podemos determinar el dominio y rango de nuestra función? ¿Cómo generalizar?

   -Los estudiantes con la ayuda de su gráfica determinan el dominio de la función:

$Dmf =< -\infty; \infty >$ Es decir todos los reales.

-Para determinar el rango se espera que los estudiantes hagan referencia a la posición de la parábola:

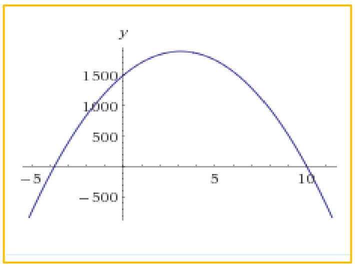
Si se abre hacia arriba: $Rnf = [Yv; \infty >$

Si se abre hacia abajo: $Rnf =< -\infty: Yv]$

5. ¿Qué representan los puntos de corte con los ejes del plano cartesiano para el problema? ¿Cómo podemos hallar los puntos de corte a partir del modelo

matemático?

-El docente solicita a los estudiantes que observen la gráfica y pregunta: ¿Cuándo se da el caso que la gráfica corta al eje x? Se espera que los estudiantes se den cuenta que esto sucede cuando "y" toma el valor de 0.



-Los estudiantes proceden a igualar a cero el modelo matemático de la función inicial:

$$0 = -40x^2 + 250x + 1500$$

Aplicando la formula general, se obtiene: X = 10 y x= -3.75

-Ubican en la gráfica los puntos de corte obtenidos: (10;0) y (-3,75; 0)

6. ¿Qué significa el punto (10; 0) y (-3,75; 0) para el problema?

-Los estudiantes relacionan las variables y deducen que: "Una rebaja de 10 soles implicaría que el costo de la entradas se reduciría a S/. 0,0 por lo tanto no habría ingresos. Esto representa el punto (10; 0).

-Los estudiantes intentan dar una interpretación similar al punto (-3,75; 0), pero reflexionan y observan que el punto está en el segundo cuadrante y los valores de x son negativos, no podría darse el caso de una rebaja negativa; pero concluyen que matemáticamente cuando "x" toma el valor de -3,75 el valor de "y" se reduce a "0".

7. ¿Qué significa el punto de corte con el eje "y" para el problema?

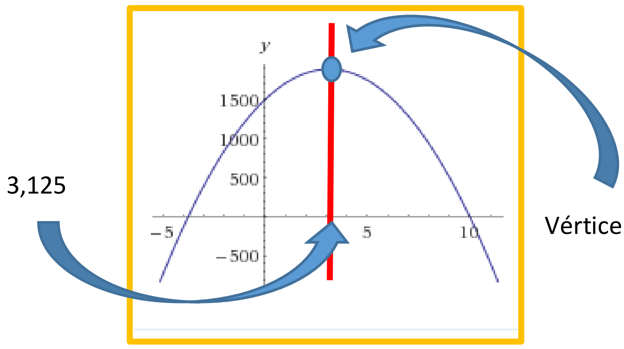
-Los estudiantes ubican en la gráfica el punto de corte con el eje Y: (0, 1500), y deducen que: Si la rebaja es S/ 0,0 Soles (no hay rebaja), entonces el ingreso es S/ 1500 Soles. Concluyen que el punto de corte con el eje Y se da cuando X toma el valor de cero.

-El docente hace referencia que estos puntos de corte son considerados las raíces de la función cuadrática.

8. ¿Qué distancia hay entre los dos puntos de corte en el eje x? ¿Podrías determinar el valor medio de dicha distancia? Este valor medio, ¿qué relación tiene con el vértice?

-Los estudiantes hallan la distancia media (dm) entre los dos puntos de corte, el docente sugiere trazar una línea vertical que pase por dicho punto medio:

$$dm = \frac{-3,75 + 10}{2} = 3,125$$



- Los estudiantes observan que la distancia media entre las raíces de la función punto de corte con el eje x coincide con la abscisa del vértice de la parábola.

9. ¿Por qué se da este caso?

- Los estudiantes concluyen que esto se da por la simetría que guarda toda parábola.

10. Se podría afirmar que: ¿A mayor descuento mayor ingreso? Fundamenta tu respuesta.

- Los estudiantes, ayudados de su gráfica, analizan cada uno de los puntos. Se espera que llegue a la conclusión (con mediación del docente) que: "En la parte

real de la gráfica, a medida que la curva asciende se cumple que a mayor descuento mayor ingreso, hasta alcanzar su punto máximo. Luego, la curva desciende indicando que se sigue incrementando la rebaja pero los ingresos disminuyen hasta llegar a ser cero (punto de corte).

Cierre: (20 minutos)

- **Los estudiantes grafican la segunda función del problema (costo de la entrada S/ 5,00 Soles). Hallan el vértice, los puntos de corte con los ejes y sus interpretaciones con respecto al problema.**
- **Cada equipo presenta su trabajo con la técnica del museo.**
- **El docente sistematiza y despeja dudas, llegando a la siguiente conclusión:**

-Las funciones cuadráticas son muy útiles para resolver diversas situaciones que responden a algún tipo de regularidad entre dos variables.

-Las funciones cuadráticas son útiles cuando trabajamos con situaciones donde se evidencia algún tipo de regularidad, para determiner áreas máximas, y frecuentemente aparecen en problemas de movimiento que implican gravedad o aceleración.

-El vértice de la parabola representa el punto más alto o punto

El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas:

- **¿Qué pasos has seguido para desarrollar cada una de las actividades?**
- **¿Cuáles de estos pasos te presentaron mayor dificultad?**
- **¿Cómo lograste superar estas dificultades?**

Observación: Esta sesión es una adaptación de la estrategia "Aprendizajes basado en problemas de modelación matemática" – Rutas del Aprendizaje 2015, ciclo VII, página 74.

Titulo de la sesión: Examinando ecuaciones de la parábola

II. APRENDIZAJES ESPERADOS		
COMPETENCIA	**CAPACIDADES**	**INDICADORES**
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN.	Matematiza situaciones.	▪ Examina propuestas de modelos analíticos de la parábola al plantear y resolver problemas.

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (20 minutos)

- **El docente da la bienvenida a los estudiantes y presenta la siguiente situación**

Todos los años se descubren varios cometas que no han sido observados con anterioridad, bien por ser la primera vez que se acercan a las regiones internas del Sistema Solar, o porque su periodo sea de miles de años. De hecho, algunos cometas sufren perturbaciones por parte de los planetas que les obligan a adoptar órbitas hiperbólicas o parabólicas, catapultándolos fuera del Sistema Solar para no regresar jamás.

Si consideramos que la trayectoria de este tipo de cometa es la que aparece en la imagen y que pasa por el origen de coordenadas, ¿cuál sería su ecuación? ¿Se podría determinar (con aproximación) la posición del foco?

- **Los estudiantes dialogan e intercambian opiniones al interior del grupo.**

- **El docente hace referencia a las actividades en las cuales centrará su atención para el logro de los aprendizajes esperados.**

  -La ubicación de una parábola en el plano cartesiano con centro en el origen y fuera de ella.

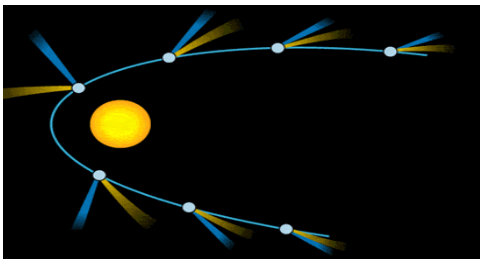
  -La verificación de la ecuación que cumple con las condiciones del problema.

- **El docente plantea las siguientes pautas de trabajo que serán consensuadas con los estudiantes:**

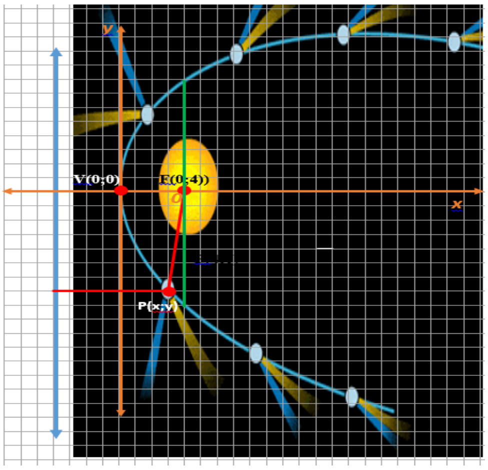
  - Se organizan en grupos de trabajo.
  - Acuerdan una forma o estrategia para comunicar los resultados.
  - Se respetan los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad garantizando un trabajo efectivo.
  - Se respetan las opiniones e intervenciones de los estudiantes y se fomentan los espacios de diálogos y reflexión.

Desarrollo: (60 minutos)

- **Los estudiantes desarrollan la actividad 1 de la ficha de trabajo. Para ello, observan la gráfica de la trayectoria de un cometa de órbita parabólica en el Sistema Planetario (anexo 1) y ubican los ejes cartesianos de tal manera que el centro de la parábola sea el origen de coordenadas.**



A. Ubican las coordenadas del centro, las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco y la directriz.



B. Hallan el valor de "p" y ubican un punto

V (0; 0) F (0; 4) d: x=-4 ***d***: P=4

cualesquiera.

C. Luego, los estudiantes escriben la ecuación canónica de la parábola con los datos proporcionados por la gráfica.

D. Los estudiantes determinan cuál de las ecuaciones que se muestran a continuación responde a las condiciones del problema:

$\boldsymbol{a)\ y^2 - 8x = 0}$

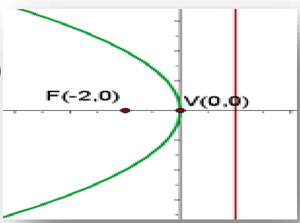
$\boldsymbol{b)\ y^2 - 4x = 0}$

$\boldsymbol{c)\ y^2 - 2x = 0}$

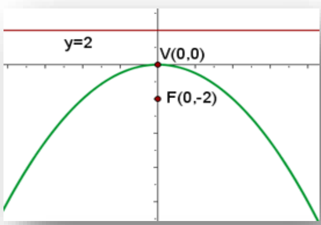
$\boldsymbol{d)\ y^2 - 16x = 0}$

- **Los estudiantes desarrollan la actividad 2 de la ficha de trabajo, la cual consiste en relacionar la gráfica con su modelo correspondiente:**

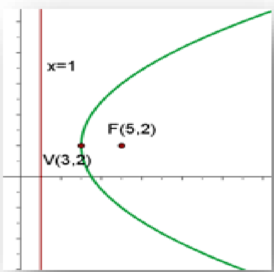
a)



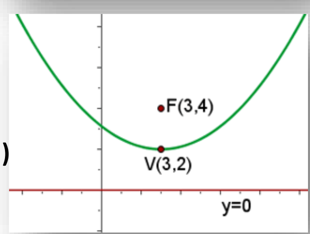
b)



c)



d)



1)$y^2-4y-8x+28=0$

2)$y^2+8x=0$

3)$x^2+8y=0$

4) $x^2-6x-8y+25=0$

Procesos que se evidencian en los estudiantes con la mediación del docente

-Identifican en la gráfica las coordenadas, el vértice de la parábola y el valor de "p". Escriben la ecuación canónica de la parábola con los datos obtenidos.

-Transforman la ecuación canónica a una expresión general, realizan operaciones.

Ejemplo: De la gráfica c):

V(3;2) p= 2

$$(y-2)^2=4(2)(x-3)$$

-Desarrollan el cuadrado del primer miembro y la propiedad distributiva en el segundo miembro: $y^2-4y+4=8x-24$

-Reducen e igualan a cero: $y^2-4y+4-8x+24=0$

$$y^2-4y-8x+28=0$$

-Ubican la alternativa equivalente.

- **Los estudiantes socializan sus respuestas. El docente promueve el dialogo a través de preguntas para que el estudiante analice y saque conclusiones con respecto a los modelos establecidos.**

Cierre: (10 minutos)

- **Los estudiantes desarrollan la actividad 3 de la ficha de trabajo, la cual consiste en resolver la siguiente situación problemática: Las coordenadas del vértice de una parábola son (5;2) y su foco (3;2). ¿Cuál de las ecuaciones responden a las características de dicha parábola?**

$a)(y-2)^2=8x(x-5)$

$b)(y+2)^2=-8x(x+5)$

$c)y^2-4y-8x+44=0$

$d)$ $y^2-4y+8x-36=0$

- **El docente con la participación de los estudiantes llegan a las siguientes conclusiones:**

- El valor de $p>0$ si:
a) La parábola se abre hacia arriba.
b) La parábola se abre hacia la derecha.
- El valor de $p<0$ si:
a) La parábola se abre hacia abajo.
b) La parábola se abre hacia la izquierda.
- La ecuación canónica y ecuación general son equivalentes

- **El docente plantea algunas preguntas metacognitivas:**

¿Qué aprendimos el día de hoy? ¿Cómo lo aprendimos? ¿De qué manera lo aprendido nos ayuda en nuestra vida cotidiana?

Anexo N° 06
Resultados de la Prueba de entrada, Prueba de proceso y Prueba de salida del Grupo Experimental y Grupo de Control

	Grupo experimental			Grupo de control					
N°	PE	PP	PS	PE	PP	PS	PE	PP	PS
1	16	18	20	16	14	12	6	6	6
2	7	10	12	7	7	7	8	8	8
3	6	9	13	6	6	6	9	9	9
4	4	8	12	4	4	4	13	13	13
5	6	11	15	6	6	6	10	10	10
6	8	10	12	8	8	8	11	11	11
7	9	13	16	9	9	9	12	12	12
8	13	16	18	13	13	13	16	15	14
9	10	13	16	10	10	10	7	7	7
10	11	15	18	11	11	11	6	6	6
11	12	15	18	12	12	12	4	4	4
12	16	18	20	16	16	16	6	6	6
13	7	10	12	7	8	9			
14	6	9	13	6	6	6			
15	4	8	15	4	4	4			
16	6	11	15	6	6	6			
17	8	10	12	8	8	8			
18	9	13	16	9	9	9			
19	13	16	18	13	13	13			
20	10	13	16	10	10	10			
21	11	15	18	11	11	11			
22	12	15	18	12	12	12			
23	16	18	20	16	16	16			
24	7	10	15	7	7	7			
25	6	9	13	6	6	6			
26	4	8	14	4	4	4			
27	6	11	15	6	6	6			
28	8	10	14	8	8	8			
29	9	13	16	9	9	9			
30	13	16	18	13	13	13			
31	10	13	16	10	10	10			
32	11	15	18	11	11	11			
33	12	15	18	12	12	12			
34	16	18	20	16	15	14			
35	7	10	16	7	7	7			
36	6	9	13	6	6	6			
37	4	8	17	4	4	4			
38	6	11	15	6	6	6			

Fuente: Prueba de Entrada, Prueba de Proceso y Prueba de Salida.