UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

ESCUELA DE POSGRADO

INFLUENCIA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO REMOTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: EDUCACIÓN DE CALIDAD, DESARROLLO Y COMPETITIVIDAD

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESISTA: JIMMI JONATAN DIAZ SOLANO

ASESOR: DR. ARTURO LUCAS CABELLO

HUÁNUCO – PERÚ

2022

DEDICATORIA

Para mi madre Victoria Solano por el apoyo incondicional en todos los aspectos de mi vida.

AGRADECIMIENTO

A mis buenos y recordados maestros de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú (Huancayo) quienes contribuyeron enormemente en mi formación académica. También a los maestros y colegas de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Nacional Enrique Guzmán y Valle, La Cantuta, por sus buenos deseos y sus palabras de aliento que me permitieron seguir adelante, no obstante, las dificultades. Del mismo modo, a mis colegas matemáticos de la Universidad San Ignacio de Loyola, por contagiarme la pasión por esta ciencia y por sus conocimientos inspiradores. Asimismo, a los Maestros del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán quienes sumaron con su visión y sus recomendaciones en el logro de mis propósitos profesionales.

RESUMEN

La presente investigación se ha realizado en el sistema de clases remotas en el marco de la pandemia del Covid-19, con todas las limitaciones que ello supuso, pues el aprendizaje matemático, como de cualquier otra disciplina, demanda nuevos enfoques estratégicos que movilicen el desarrollo de estas competencias. En tal sentido, nuestra investigación tuvo como objetivo determinar el nivel de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, periodo lectivo 2021-I. Se trata de una investigación con enfoque cuantitativo, de tipo experimental, nivel aplicativo y con diseño cuasi experimental, trabajada sobre una muestra censal de 26 estudiantes, distribuidos en grupo de control y grupo experimental de forma aleatoria, y con equivalencia de medias, cada grupo constituido por13 estudiantes. Se aplicó la Ingeniería Didáctica en el grupo experimental, a través del análisis preliminar y del análisis a priori, cuyos resultados se procesaron mediante la prueba t de Student, cuyo p-valor fue $p = 0.000 < 0.05$, que se rechaza la hipótesis nula; mientras que en el grupo control la misma prueba generó el p-valor igual a $p = 0.059 > 0.05$, por lo cual se acepta la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%. Por lo que dichos resultados permitieron concluir que la Ingeniería Didáctica tiene un efecto significativo en el aprendizaje significativo de la Integral Definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, durante el periodo lectivo 2021-I.

Palabras Clave: Representaciones, conceptos, proposiciones, análisis preliminar, análisis a priori.

ABSTRACT

This research has been conducted in a context of virtual classroom due to the pandemic generated by Covid-19; however, Meaningful Learning in Mathematics demands new strategic approaches for the improvement of pedagogical practice. In addition, the present research aims to determine the level of influence that Didactic Engineering has on the Meaningful Learning of the Definite Integral in the students of the VII semester of the Faculty of Education of the Universidad Nacional del Centro del Perú, in 2021-I. This research has a quantitative approach, experimental, applicative level and quasi-experimental design on a census sample of 26 students, from which the control and experimental groups were formed randomly and prioritizing the equivalence of average, each with 13 students. Didactic Engineering was applied in the experimental group, through preliminary analysis and a priori analysis, so that the results were processed by Student's t-test and p-value was $p = 0.000 < 0.05$, so that the null hypothesis is rejected; while in the control group the same test generated the p-value equal to $p = 0.059 > 0.05$, so that the null hypothesis is accepted with a confidence level of 95%. For that reason, these results allow us to conclude that Didactic Engineering has a significant effect on the Meaningful Learning of the Definite Integral in the students of the VII semester of the Mathematical Sciences and Computer Science Career of the Faculty of Education of the Universidad Nacional del Centro del Perú, in 2021-I.

Keywords: Representations, concepts, propositions, preliminary analysis, and a priori analysis.

RESUMO

A presente pesquisa foi feita em contexto de aulas remotas devido à pandemia gerada pelo Covid-19, no entanto, a Aprendizagem Significativo em Matemática exige novas abordagens estratégicas para melhorar a prática pedagógica. Nesse sentido, a presente pesquisa tem como objetivo determinar o nível de influência que a Engenharia Didática tem na Aprendizagem Significativo da Integral Definida nos alunos do VII semestre da Faculdade de Educação da Universidad Nacional del Centro del Perú, durante o período letivo 2021-I. Esta pesquisa tem uma abordagem quantitativa, de tipo experimental, de nível de aplicação e com desenho quase-experimental em uma amostra censitária de 26 alunos, dos quais os grupos controle e experimental foram formados aleatoriamente e priorizando a equivalência de médias, cada um com 13 alunos. A Engenharia Didática foi aplicada no grupo experimental, através da análise preliminar e da análise a priori, para que os resultados fossem processados por meio do teste t de Student e cujo p-valor foi $p = 0.000 < 0.05$, então a hipótese nula é rejeitada; enquanto no grupo controle o mesmo teste gerou o p-valor igual a $p = 0.059 > 0.05$, portanto, a hipótese nula é aceita com um nível de confiança de 95%. Portanto, esses resultados permitem concluir que a Engenharia Didática tem um efeito significativo na Aprendizagem Significativo da Integral Definida nos alunos do VII semestre da Carreira de Matemática e Ciências da Computação da Faculdade de Educação da Universidade Nacional del Centro del Perú, durante o período letivo 2021-I.

Palavras chave: Representações, conceitos, proposições, análise preliminar, análise a priori.

ÍNDICE

DEDICATORIA ii

AGRADECIMIENTO iii

RESUMEN iv

ABSTRACT v

RESUMO vi

ÍNDICE vii

INTRODUCCIÓN ix

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 11

1.1. Fundamentación del problema 11

1.2. Justificación e importancia de la investigación 12

1.3. Viabilidad de la investigación 13

1.4. Formulación del problema 14

1.4.1. Problema general 14

1.4.2. Problemas específicos 14

1.5. Formulación del objetivo 15

1.5.1. Objetivo general 15

1.5.2. Objetivos específicos 15

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO 17

2.1. Antecedentes de la Investigación 17

2.2. Bases teóricas 25

2.3. Bases conceptuales 47

2.4. Bases filosóficas 48

2.5. Bases epistemológicas 49

2.6. Bases antropológicas 53

CAPÍTULO III. SISTEMA DE HIPÓTESIS 56
3.1. Formulación de las hipótesis 56
3.1.1. Hipótesis general 56
3.1.2. Hipótesis específicas 56
3.2. Operacionalización de las variables 56
3.3. Definición operacional de las variables 58
CAPÍTULO IV. MARCO METODOLÓGICO 59
4.1. Ámbito 59
4.2. Tipo y nivel de investigación 59
4.3. Población y muestra 60
4.4. Diseño de investigación 64
4.5. Técnicas e instrumentos 65
4.5.1. Técnicas 65
4.5.2. Instrumentos 66
4.6. Técnica para el procesamiento y análisis de datos 71
4.7. Aspectos éticos 109
CAPÍTULO V. RESULTADOS 111
5.1. Análisis descriptivo 111
5.2. Análisis inferencial y/o contrastación de hipótesis 123
5.3. Discusión de resultados 136
5.4. Aporte científico de la investigación 138
CONCLUSIONES 141
SUGERENCIAS 143
REFERENCIAS 144
ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Para esta investigación se ha partido de un análisis del contexto actual y de algunas circunstancias personales que nos condujeron a optar por este tema. El contexto dado en torno a la modalidad educativa establecida en el país debido a la emergencia sanitaria mundial y la experiencia profesional como docente en la Facultad de Educación, Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Universidad Nacional del Centro del Perú, con estudiantes del VII semestre en la asignatura de Análisis Matemático II durante el periodo lectivo 2021-I, propiciaron el emprendimiento de la presente investigación.

La experiencia docente nos permitió observar la realidad problemática: las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático. Esta asignatura tiene que ver principalmente con el cálculo diferencial e integral, que genera la idea de resolución de ejercicios mediante la aplicación de fórmulas y que se deja de lado el aprendizaje de los conceptos matemáticos; esto muchas veces, obedece a las características propias de la asignatura, sin embargo, es importante la intervención del docente para generar situaciones de clase que conduzcan a la comprensión de los conceptos desarrollados. Pero ello no puede realizarse de forma arbitraria, sino que debe tenerse en cuenta una manera de planificación de la secuencia de clase; en ese sentido se ha considerado a la Ingeniería Didáctica, como una metodología de enseñanza, para elaborar secuencias de clase para el aprendizaje significativo de la integral definida, entendiéndose el término significativo, en concordancia con Ausubel, al aprendizaje de representaciones, de conceptos y de proposiciones.

El presente informe está organizado en cinco capítulos, en el primero se presenta el sustento y razones que tuvo el investigador para la realización de la investigación, además se explicita el problema de investigación y los objetivos que se pretendieron lograr.

En el segundo capítulo se muestran los acercamientos de otros autores al problema de investigación, también se detalla el marco teórico, así como la fundamentación filosófica, epistemológica y antropológica.

En el tercer capítulo se presentan las hipótesis de investigación, así como el proceso de operacionalización de variables, este último, necesario para la elaboración de instrumentos de recolección de datos.

En el cuarto capítulo se expone la metodología empleada en la investigación, la población y muestra, así como los instrumentos de recopilación de información, el análisis de validez y confiabilidad de acuerdo al tipo de investigación.

En el quinto capítulo se presenta el análisis con pruebas paramétricas y no paramétricas, así como la discusión de los resultados, también se considera el aporte científico de la investigación.

Finalmente se mencionan las conclusiones de la investigación, las sugerencias, las referencias y los anexos correspondientes, siendo estos últimos en los que se adjuntan materiales, documentos y evidencias del proceso de investigación.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Fundamentación del problema

La Organización Mundial de la Salud (OMS, 2020) el 31 de diciembre del 2019 ha mencionado que “La Comisión Municipal de Salud de Wuhan (provincia de Hubei, China) notifica un conglomerado de casos de neumonía en la ciudad. Posteriormente se determinan que están causados por un nuevo coronavirus”, luego el 10 de enero del 2020, la OMS (2020) publica en línea un amplio conjunto de orientaciones técnicas con recomendaciones para todos los países sobre el modo de detectar casos, realizar pruebas de laboratorio y gestionar los casos posibles.

El Gobierno del Perú (2021) a través de su plataforma digital única del Estado Peruano ha mencionado que “el viernes 6 de marzo de 2020, se confirmó el primer caso de coronavirus en el Perú”, en los días posteriores se generarían una serie de medidas preventivas por parte del gobierno en diferentes sectores. En virtud de ello el Ministerio de Educación (MINEDU, 2020) ha resuelto en su primer artículo “Aprobar las Orientaciones para la continuidad del servicio educativo superior universitario, en el marco de la emergencia sanitaria, a nivel nacional […]”, entre dichas orientaciones se hace mención a la adaptación no presencial respecto uno o más cursos, generando con dicha disposición una serie de cambios en las diferentes universidades del país y en sus programas ofrecidos.

La Universidad Nacional del Centro del Perú (UNCP) ubicada en Huancayo, región Junín, no ajena al contexto sanitario nacional y mundial, dispuso, a través de sus autoridades, la ejecución de las medidas planteadas por el gobierno, para ello se realizaron las gestiones necesarias para facilitar y capacitar a los docentes, estudiantes y personal administrativo en el manejo de la plataforma Microsoft Teams, además de brindar equipos de telefonía celular con servicio de internet para aquellos estudiantes que presentan recursos económicos insuficientes para esta nueva modalidad. Posterior al inicio de las labores académicas del ciclo 2020 – I, tanto docentes como estudiantes notaron diversas necesidades respecto a las asignaturas de Matemática en las diferentes

Facultades de la Universidad, en particular, en la Facultad de Educación y la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática se notó que los recursos virtuales existentes o conocidos por los docentes eran insuficientes para el desarrollo de las clases, por ejemplo, el cambio de una pizarra acrílica y de una digital propias de un aula de clase presencial hacia una pizarra virtual manejada con el mouse iba generando una diferencia notable en la escritura, el uso de colores, la elaboración de gráficos, entre otras cuestiones de característica didáctica. En este contexto han ido surgiendo distintas inquietudes entre docentes, en referencia a si existe la posibilidad que dicho cambio también dificulte el aprendizaje de los estudiantes en las diferentes asignaturas de matemática superior en la carrera en mención y, en particular en la asignatura de Análisis Matemático II.

Las últimas tendencias en educación resaltan el carácter conceptual de las Matemáticas y la importancia que tiene relacionar los conceptos a aprender con los que el estudiante ya posee previamente (Alfaro et al., 2003), en tal sentido "el dominio de los conceptos matemáticos es una parte esencial de la formación matemática de un estudiante. Tales conceptos constituyen una clase especial y como tales deben ser tratados". (Angulo et al., 2020, p. 299). Estas afirmaciones dan sustento a la problemática que se ha venido observando en el aprendizaje de las Matemáticas, muestra de ello, como afirman Alfaro et al. (2003), "los primeros cursos de cálculo diferencial no enfatizan el significado o aplicaciones de conceptos como los de la derivada o la integral, sino la colección enorme de reglas de derivación o métodos de integración" (p. 286), esto sumado a la modalidad virtual representan un problema y a la vez un reto para nuevas propuestas que aporten en el aprendizaje de conceptos al aprender las Matemáticas.

1.2. Justificación e importancia de la investigación

La existencia de cursos virtuales ofrecidos por diferentes universidades a nivel mundial ya era utilizada por considerable número de usuarios de las principales ciudades del mundo, sin embargo, a causa de la emergencia sanitaria por la que ha venido atravesando el Perú y el mundo, se ha generalizado su difusión. La Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU, 2020) resuelve en su primer artículo la aprobación de los “Criterios para la Supervisión de la adaptación de la educación no presencial, con carácter excepcional, de las asignaturas por parte de universidades y escuelas de posgrado como consecuencia de las medidas para prevenir y controlar la COVID-19” (p. 2), esta disposición insta a las universidades del país al uso de los diferentes recursos virtuales para la continuidad de las labores académicas. Por ello, la presente investigación se ha justificado en la necesidad de que la universidad asegure que la modalidad remota no sea un obstáculo en el proceso de aprendizaje, al contrario, que brinde la posibilidad a todos los estudiantes para continuar los estudios universitarios en esta nueva normalidad.

Los recientes avances de la tecnología sumados a la población estudiantil universitaria que en su mayoría son nativos digitales, implican cada vez mayor manejo de los recursos virtuales para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, pero que representan un terreno importante para el desarrollo de nuevas investigaciones, por eso, los resultados obtenidos serán importantes y relevantes para el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de la educación matemática. Por lo tanto, el propósito que contempla este trabajo consistió en poder brindar un soporte a la planificación y ejecución de las sesiones de clase a través del análisis de la Ingeniería Didáctica y analizar la influencia que tiene sobre el aprendizaje significativo en la modalidad remota o virtual, para ello se tuvo en cuenta la aplicación en la asignatura de Análisis Matemático II, y en uno de los tópicos principales, que es la integral definida.

1.3. Viabilidad de la investigación

El desarrollo de la investigación ha sido viable debido a que no se ha atentado contra la disposición de la no presencia de los estudiantes en las aulas de clase, debido a que todo el proceso de seguimiento, monitoreo, observación, así como los instrumentos de recopilación de la información, su validación y aplicación se realizaron de forma virtual con los diversos recursos virtuales existentes.

También la investigación se ha viabilizado debido a la elección de la asignatura de Análisis Matemático II, la cual fue asumida como curso en el periodo lectivo 2021 – I por el investigador, de modo que mediante la aprobación de las autoridades universitarias correspondientes sumado a la colaboración con la investigación por parte de los estudiantes como parte de la muestra, se ha podido evitar mayores dificultades.

También ha permitido el normal desarrollo de la investigación la concordancia con las líneas de investigación planteadas por el Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica (CONCYTEC) como con las líneas de investigación planteadas a nivel de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán (UNHEVAL).

En cuanto a las limitaciones que se han tenido durante la investigación, se considera al acceso restringido a las fuentes de información digital de algunas universidades del país y a la escasez de trabajos de investigación similares a nivel regional y local.

1.4. Formulación del problema

1.4.1. *Problema general*

¿De qué manera influye la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?

1.4.2. *Problemas específicos*

¿Cómo influye la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la

Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?

¿De qué modo influye la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?

¿De qué manera influye la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?

1.5. Formulación del objetivo

1.5.1. *Objetivo general*

Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

1.5.2. *Objetivos específicos*

Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el Aprendizaje de Conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la Investigación

2.1.1. *A nivel internacional*

Josefina Marcolini Bernardi (2003). Tesis doctoral: *Ingeniería didáctica en Física Matemática*. Universidad de Granada, España.

En esta investigación se ha utilizado a la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, fundamentándose en la Teoría de Situaciones Didácticas y en la de Transposición Didáctica. El objetivo propuesto consiste en estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del cálculo infinitesimal cuando se enseña a estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería, para ello se ha buscado dichas causas no solo en la forma como se da la transmisión del conocimiento sino fundamentalmente en la manera en que se articula el contenido matemático que se pretende enseñar. En tal sentido se resignifica el concepto de derivada (como aplicación de una regla, como razón de cambio, como un factor en la serie de Taylor), para esto se ha diseñado una situación didáctica dirigida a los alumnos de primer curso de la Universidad, esto conjuntamente con el análisis a priori. A partir de la investigación desarrollada, se ha mostrado que partiendo de supuestos es posible desarrollar en el alumno la noción de predicción, además al seguir las líneas de investigación del grupo se diseña una secuencia didáctica para solventar las deficiencias detectadas en los conocimientos de los alumnos.

Angelina Alvarado Monroy (2003). Tesis doctoral: *El estatus de la demostración matemática en el aula de una noción paramatemática al diseño de una ingeniería didáctica.* Universidad de Salamanca, España.

Se parte de la afirmación que consiste en que la demostración matemática no está considerada como objeto de estudio en los diferentes niveles educativos. Para ello se ha desarrollado una indagación en torno a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática, teniendo una visión de ella tanto como concepto y como proceso, en el inicio de la educación universitaria; también se ha trabajado en la forma de mejorar la comprensión de los estudiantes, a través de una Ingeniería Didáctica enfocada en el análisis de los procesos por los cuales se produce una construcción social de dicho conocimiento. El propósito principal de este trabajo por una parte consistió en el análisis de los procesos del pensamiento matemático avanzado que se involucran en el aprendizaje y uso de la demostración matemática, teniendo en cuenta las dificultades y errores más comunes surgidos y, por otra parte, el desarrollar una secuencia de clase que promueva un aprendizaje profundo en las habilidades necesarias para poder realizar, interpretar y comunicar demostraciones matemáticas. Esta investigación ha permitido ser una alternativa diferente a la noción paramatemática de la demostración matemática en el nivel universitario, también permitió observar y documentar el aprendizaje y la evolución de los estudiantes, con sus dificultades y errores, además de ayudar a determinar estrategias para mejorar el proceso de demostración por parte de los estudiantes.

Myriam Melo Hernández (2018). Tesis doctoral: *La Integración de las TIC como vía para optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje en la educación superior en Colombia*. Universidad de Alicante, España.

Este trabajo se enfoca en analizar la situación de la implementación y el uso de las Tecnología de la Información y la Comunicación [TIC] en las instituciones de Educación Superior en Colombia, para este propósito se consideró como problema ¿Cómo contribuir desde un enfoque pedagógico, holístico y sistémico a la elevación de la calidad del proceso enseñanza-aprendizaje de la educación superior? En el desarrollo de la investigación se han detectado amenazas para la integración de las TIC que se dan desde cuatro direcciones: (i) la no planificación del proceso desde lo pedagógico, (ii) la disponibilidad o acceso a las herramientas tecnológicas, (iii) el uso en el proceso formativo, la pertinencia y efectividad de la herramienta para el proceso formativo y (iv) la escasa capacitación de los docentes. El análisis realizado ha permitido que la investigadora afirme que el uso apropiado de las TIC en las instituciones de educación superior es una mediación de gran valor; por ello lo descrito en el informe de investigación demuestra que es importante que los docentes se capaciten en el uso técnico de los dispositivos, para que luego comprendan y apliquen de manera consiente las posibilidades reales de interrelacionar y dar salidas coherentes como una pedagogía renovada.

Guillermina Marcos Lorenzón (2008). Tesis doctoral: *Un modelo de competencias matemáticas en un entorno interactivo*. Universidad de la Rioja, España.

Se destacan tres aportes principales de este trabajo: (i) respecto a la capacidad de Comunicación Matemática, (ii) respecto al aprendizaje de la Geometría y (iii) en relación al diseño de entornos virtuales. En cuanto al primer aporte, la investigadora afirma que el modelo con formato bimodal (presencial y virtual) para las interacciones ha resultado beneficioso y ha mejorado la capacidad de comunicación tanto matemática como personal por parte de los estudiantes, esto ha sido posible debido a que este formato le brinda una dimensión real al proceso. En cuanto al segundo aporte, afirma que resulta posible y motivador la enseñanza de la Geometría en Educación Secundaria Obligatoria [ESO] a través de un entorno interactivo de aprendizaje que incluya el uso de TIC debido a su característica dinámica y la representación gráfica de situaciones contextuales. En relación al tercer aporte, afirma que es posible diseñar e implementar entornos virtuales de aprendizaje que permitan atender a la diversidad en el salón de clase, en el sentido de posibilitar el máximo beneficio, en el aspecto cognitivo, a cada estudiante.

Elías Irazoqui Becerra (2015). Tesis doctoral: *El Aprendizaje del cálculo diferencial: Una propuesta basada en la modularización*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. España.

Esta investigación parte de la pregunta ¿Existen diferencias significativas en el aprendizaje del cálculo diferencial bajo un diseño curricular modular frente a un modelo tradicional de enseñanza? Para este estudio se ha tenido en cuenta a estudiantes de las facultades de Ingeniería de la Universidad de Bio-Bio en Chile, de modo que, en función a la problemática planteada, el investigador ha utilizado una serie de fases para la experimentación para el normal desarrollo de su propuesta de aprendizaje del cálculo diferencial; es así que concluye que dicho aprendizaje se vio favorecido al usar el diseño curricular modular como base para implementar la propuesta didáctica; sin embargo, sugiere que para que sea sostenible en el tiempo el funcionamiento de la propuesta es muy importante el convencimiento de los docentes de la validez de ella, de modo que incluso puede ser mejorada por ellos; en este sentido describe al diseño curricular modular como la unificación de todas las unidades didácticas que comprende un curso normal y la vuelve a dividir en dos módulos consecutivos, de manera que el estudiante que reprueba el módulo 1, inmediatamente debe cursar el mismo módulo mientras se dicta el segundo módulos y si reprueba el segundo módulo, se genera la reprobación de la asignatura. También sugiere que el cálculo integral es una de las tareas inmediatas en siguientes investigaciones que consideren a al diseño curricular modular.

2.1.2. *A nivel nacional*

Alejandro Huanca Quenaya (2015). Tesis doctoral: *Fortalecimiento de las capacidades básicas para el logro de aprendizajes significativos en el área de Matemática en el quinto grado de educación secundaria de la institución educativa Telésforo Catacora de Juli - 2013*. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima.

Esta investigación ha planteado como objetivo fundamental el hecho de determinar los efectos del fortalecimiento de capacidades en el área de Matemática para el logro de aprendizaje en los estudiantes de quinto grado del nivel e institución detallados en el título. El tipo de investigación es experimental con diseño cuasi experimental. La muestra estuvo conformada por dos secciones de 20 estudiantes cada una, para los grupos control y experimental. El instrumento que se aplicó para la variable independiente consistió en un programa de fortalecimiento de capacidades comprendido por el Ministerio como recuperación académica; se ha incidido en el enfoque de resolución de problemas mediante el método heurístico propuesto por Polya. Luego del análisis comparativo, el investigador, concluye que existen diferencias significativas entre ambos grupos, es decir, mediante este procedimiento los estudiantes logran aprendizajes significativos en el área de Matemática, ya que permite de forma adecuada que el estudiante utilice adecuada las propiedades de los sistemas numéricos, aplique el método heurístico para resolver problemas algebraicos y aplicar las propiedades de sistemas numéricos y algebraicos en la resolución de problemas de Geometría y Medida. Mostrando como evidencia versátil los promedios obtenidos por los estudiantes.

Regina Fuentes Echegaray (2017). Tesis doctoral: *Estilos de aprendizaje y su relación con los logros de aprendizaje significativo en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Privada Sergio Bernales de Cañete en el año 2017*. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima.

Esta investigación ha planteado como objetivo identificar la relación existente entre los estilos de aprendizaje y el logro del aprendizaje significativo en estudiantes de las facultades de Ingeniería de la Universidad Sergio Bernales. Se desarrolló a través del enfoque cuantitativo, utilizando para ello una investigación de tipo descriptiva correlacional, de modo que dimensiona al aprendizaje significativo en experiencias previas, nuevos conocimientos y la determinación de una tipología de los estilos de aprendizaje de los estudiantes de dicha universidad. Para la determinación de la relación entre las variables estilos de aprendizaje y logro de aprendizaje significativo, la investigadora elaboró cuestionarios dirigidos a 85 estudiantes de Ingeniería, de modo que, para el análisis de validez y confiabilidad de los instrumentos, así como la sistematización y el tratamiento de datos utilizó el software SPSS V-22. Los valores obtenidos mediante la prueba no paramétrica rho de Spearman ha permitido a la investigadora evidenciar que los estilos de aprendizaje se encuentran relacionados de forma significativa con el aprendizaje significativo, distinguiendo incluso que los estilos de aprendizaje más usuales en los estudiantes de la universidad Sergio Bernales de Cañete, son el reflexivo y el pragmático.

Elizabeth Advíncula Clemente (2010). Tesis de maestría: *Una situación didáctica para la enseñanza de la Función Exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

El objetivo al cual apunta esta investigación es elaborar una propuesta de situación didáctica, que permita que estudiantes que presentan poco gusto por esta ciencia interactúen de manera activa con el saber matemático, en particular, ha pretendido que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial, para ello ha utilizado como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica y como marco teórico a la Teoría de Situaciones Didácticas. Luego del diseño de la situación didáctica y su posterior aplicación, permitió que la investigadora identifique los obstáculos que presentan con frecuencia los estudiantes, por ejemplo, el proceso de graficar funciones exponenciales a partir de su formulación analítica o pasar de un tipo de representación de funciones a otra. En tal sentido, la investigadora afirma que es posible que la población en estudio logre construir el conocimiento de la función exponencial al enfrentarse a esta situación didáctica, además, la situación fue diseñada gracias al análisis preliminar con sus diferentes dimensiones, además, el registro de las observaciones durante la experimentación en aula permitió rediseñar la situación didáctica inicial de modo que luego se generó una nueva y mejorada versión que ha permitido que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de función exponencial.

Rocío Figueroa Vera (2013). Tesis de maestría: *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de Situaciones Didácticas*. Pontifica Universidad Católica del Perú, Lima.

Este trabajo de investigación tiene como propósito diseñar una propuesta didáctica para fortalecer en los alumnos las habilidades de resolución de problemas relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, en tal sentido muestra al detalle el proceso de elaboración, la aplicación y el análisis de los resultados de una secuencia didáctica, para lo cual utiliza la Teoría de

Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, además, se ha utilizado la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación y, por último, utilizó también la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval en el análisis de los resultados. Como conclusiones de esta investigación se puede notar que las situaciones didácticas diseñadas contribuyeron a consolidar los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas que involucran a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, también dichas situaciones generaron estímulos positivos en los estudiantes respecto a su habilidad de crear problemas, lo cual no es muy usual en educación básica, además, por el hecho de utilizar situaciones de contexto real o simulado como la aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales a la Economía (oferta y demanda) . De manera complementaria, el uso del software GeoGebra, tanto para resolver problemas como para su representación gráfica tuvo un papel importante en la creación de problemas tanto de la investigadora como por parte de los estudiantes.

Álex Espinoza Espinoza (2017). Tesis de maestría: *Aprendizaje de coordenadas polares en estudiantes en formación de profesores por medio de los registros de representación semiótica*. Universidad Nacional del Centro del Perú, Huancayo.

En este trabajo se ha tenido como propósito analizar la coordinabilidad de los registros de representación semiótica que los estudiantes de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación desarrollan cuando representan puntos en el sistema de coordenadas polares, esto a través de una secuencia de actividades. El marco teórico que sustenta el estudio es la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Reymond Duval, mientras que la Ingeniería Didáctica fue utilizada como metodología de investigación, de modo que ayudó a verificar al investigador que algunos textos no muestran un desarrollo con criterios didácticos de los temas relacionados a coordenadas polares. Por otro lado, el uso de los tratamientos en cada uno de los registros de representación semiótica ha permitido el desarrollo de cierto nivel de autonomía en la elaboración de procedimientos y del aprendizaje de los estudiantes, esto en referencia al trabajo experimental y para el proceso de validación de conjeturas propuestas por el investigador; además, los registros de representación semiótica ayudaron a que los estudiantes construyeran gradualmente el concepto de puntos en coordenadas polares a través de la secuencia de actividades diseñadas y estructuradas en función a los principios de la Ingeniería Didáctica y a través del uso de los instrumentos de trazado de manera física. Finalmente, se concluye que la teoría desarrollada por Duval y aplicada en este estudio ha permitido que los estudiantes construyan transformaciones (tratamientos y conversiones), de modo que los estudiantes construyen gradualmente el concepto de puntos en coordenadas polares mediante una secuencia de actividades estructuradas y fundamentadas en concordancia con los principios de la Ingeniería Didáctica.

Nataly Espinoza Márquez (2018). Tesis de maestría: *Las Tecnologías de la Información y Comunicación y su incidencia en el desarrollo académico de las universidades públicas de Lima Metropolitana y Callao en el año 2017*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.

Las tecnologías de la información y comunicación [TIC] en la educación superior representan un área de interés para la investigación, debido a ello, en este trabajo de investigación se resalta, de manera inicial, los beneficios generados por las TIC en la gestión educativa, principalmente en la optimización del tiempo en los procesos de las Universidades Públicas de Lima Metropolitana y Callao. En tal sentido, la investigadora ha utilizado herramientas estadísticas y de recolección de datos de fuentes primarias, tal es el caso de las encuestas, así como la obtención de datos de fuentes secundarias. Con los datos obtenidos y el análisis estadístico respectivo, se demuestra que las dimensiones: Diseño de las TIC, Diseño Pedagógico de las TIC y el Equipamiento de las TIC tienen relación e influencia en el desarrollo académico de las universidades púbicas de Lima y Callao, principalmente en la mejora de las competencias y conocimientos de los estudiantes a fin de que en el futuro sean profesionales competitivos en su desempeño profesional y laboral. Como consecuencia de ello, la investigadora afirma que la adecuada implementación y aplicación de las tecnologías de información y comunicación elevan las competencias, conocimientos y capacidades del estudiante.

2.2. Bases teóricas

Ingeniería didáctica

Durante los últimos años ha venido ganando importancia y preocupación a nivel mundial la investigación en educación matemática y/o didáctica de la Matemática. La escuela francesa ha tenido aportes importantes en este terreno, Alpízar et al. (2003) afirman que "la didáctica matemática francesa establece nuevos conceptos: por ejemplo, el de situación didáctica" (p. 3), el cual fue desarrollado por Guy Brousseau, quien parte de la idea de definir una situación inicial o fundamental, con la cual el conocimiento se va construyendo en los estudiantes a partir de ciertas restricciones adicionales propuestas por el profesor durante el desarrollo de la situación, para llegar finalmente a la institucionalización o formalización del conocimiento. La postura de Brousseau sigue vigente y goza de gran reconocimiento, aunque una de las pocas debilidades que muestra es la suposición que todo conocimiento matemático puede surgir a partir de una situación fundamental. Alpízar et al. (2003) mencionan también que "un segundo concepto en esta orientación es el que se da con la idea de 'transposición didáctica' [entendida como el paso de un objeto de saber científico a un objeto de enseñanza]" (p. 4). Esta propuesta fue desarrollada por Yves Chevallard y puede entenderse como el estudio o análisis del proceso de cambio o transposición que se da sobre un conocimiento científico para que este pueda ser enseñado en el aula y puede denominarse a este último como saber didactizado, el conocimiento científico se descontextualiza y se transforma en objeto, en este punto el docente debe tener el conocimiento para recontextualizarlo y no pueda representar una debilidad; por eso es importante que el saber a enseñar no esté alejado del saber científico y ello requiere que el profesor domine aquello que va a enseñar. Una tercera propuesta es la Ingeniería Didáctica, Alpízar et al. (2003) mencionan que "propone una orientación metodológica con la ejecución de cuatro fases consecutivas" (p. 8). Estás fases son:

Los análisis preliminares

Artigue et al. (1995) afirman que “la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos […], sino también en un determinado número de análisis preliminares” (p. 38). En este sentido, propone tres dimensiones desde las cuáles pueden ser abordados dichos análisis:

Dimensión epistemológica, Artigue et al. (1995) caracterizan a esta dimensión como “asociada a las características del saber en juego” (p. 40). Además, a partir del ejemplo que cita Artigue, se puede inferir que consiste en analizar el contenido desde su esencia o raíz, para esto es factible apoyarse en la Historia de la Matemática, de modo que se observe el proceso de cambio o evolución del concepto, el tiempo que pasó hasta que un concepto logró formalizarse, los problemas que originaron algún determinado concepto y quienes fueron partícipes de esto, sin otorgarle mayor importancia a los personajes respecto al concepto. Este análisis inicial es importante debido a que si no se le tiene en cuenta se pueden generar obstáculos epistemológicos que luego pueden traer problemas en la enseñanza.

Dimensión cognitiva, Artigue et al. (1995) caracterizan a esta dimensión como “asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza” (p. 40). Es decir, a qué grupo de estudiantes va a dirigirse la enseñanza, para ello se analizan los procedimientos que hacen previamente los estudiantes, las posibles fortalezas y debilidades procedimentales, de representación, entre otros, de modo que luego se decide qué partes del contenido se deben o no incluir en el proceso de enseñanza; se trata de una descripción al detalle de los estudiantes que serán parte de la clase. A esta dimensión también puede considerarse, según Artigue et al. (1995), como “un análisis detallado de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y de los errores más frecuentes” (p. 42).

Dimensión didáctica, Artigue et al. (1995) caracterizan a esta dimensión como “asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza” (p. 40). Es decir, se analiza cómo se desarrollará el proceso de enseñanza, partiendo del concepto, por ejemplo, el sistema educativo en el cual está inmerso un país o, en particular, una institución educativa, también los libros o materiales que se utilizan para la enseñanza del contenido, los programas de una institución o del docente, se mira la enseñanza del tema en el nivel en el que uno esté pensando realizarla (educación básica, educación superior, entre otros). Si bien es cierto, la Ingeniería Didáctica surge con una teoría de base para el desarrollo de las actividades de la clase, la cual es la Teoría de Situaciones, Artigue et al. (1995) menciona que “no se enfatiza un cuadro teórico general” (p. 41), lo cual implica que es necesaria una teoría, pero no una en específica.

El análisis a priori

Este análisis, según Artigue et al. (1995) comprende una parte de descripción y una de predicción, centrándose en las características de una situación fundamental o a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los estudiantes:

- Se describen las selecciones del nivel local en relación eventual con las selecciones globales, también las características de la situación didáctica que se puedan desprender de dichas selecciones.

- Se analiza todo lo que podría ser útil en esta situación para un estudiante, en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él pueda disponer, esto cuando el estudiante se ponga en práctica, en un funcionamiento casi aislado de la guía del docente.

- Se trata de predecir los tipos de comportamiento o actitudes que puedan surgir en los estudiantes, además se busca tratar de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar el significado y asegurar, en particular, que los comportamientos que se esperan, si intervienen, es decir, a través de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

De Faria (2008) afirma que, en esta fase, se toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no están fijadas por restricciones del medio donde se va a dar la realización didáctica. Estas variables son denominadas por Artigue como variables de comando, las cuales son:

- Variables macro-didácticas o globales, en relación a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas o locales, en relación a la organización de la secuencia de clase.

Se entiende que en esta fase se elabora el diseño de la secuencia de clase que se va a utilizar para la misma, además de la descripción detallada de las actividades que se van a realizar, los tiempos de ejecución de dichas actividades, predecir los posibles errores que los estudiantes puedan tener durante las actividades, así como el rol específico que tendrá el docente en función a dichos errores o a las intervenciones de los estudiantes. Por tanto, se infiere que los análisis preliminares servirán como insumos para la elaboración del diseño de la secuencia de clase. Por otro lado, en la Ingeniería Didáctica el análisis a priori toma como fundamento teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau para la elaboración de la secuencia de actividades, puesto que de esa manera surgió, sin embargo, como se infiere de lo mencionado por Artigue, no está limitada a solamente usar dicho enfoque.

Experimentación

Este análisis, según Artigue et al. (1995) consiste en "las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase" (p. 48). Se entiende esta fase como la ejecución de la secuencia de clase que se diseñó en la fase anterior, para lo cual se debe tener un registro detallado de cada una de las participaciones de los estudiantes durante todo el desarrollo de la secuencia. Según De Faria (2008) la experimentación supone explicitar los objetivos de la investigación, establecer el contrato didáctico, aplicar los instrumentos de investigación y registrar las observaciones realizadas durante la investigación.

Análisis a posteriori

De acuerdo con Artigue et al. (1995) esta fase comprende a los datos obtenidos en la experimentación, los cuales “se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso” (p. 48). Es decir, los datos recabados en la experimentación sirven de insumo principal y se completan con metodologías externas como las mencionadas en la cita anterior, de modo que luego se encuentra un proceso importante que, de acuerdo con Artigue et al. (1995), con “la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación” (p. 48). Es decir, los datos a priori se contrastan con los datos a posteriori, de modo que al existir cierta correspondencia se dará validez al método, esto muestra que la validación no se basa en criterios estadísticos, puesto que esta metodología tiene mayor pertinencia para un estudio de casos.

Es importante también tener en cuenta que la ingeniería Didáctica, según De Faria (2008) es “al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase” (p. 2). Esta doble mirada da a entender que se entiende como producto cuando es utilizada para el diseño de secuencias de clase, utilizando para ello las fases de análisis preliminar y el análisis a priori y, se entenderá como proceso cuando es utilizada como metodología de investigación, para lo cual se deben utilizar las 4 fases propuestas.

Tecnologías de la información y comunicación

Técnica y tecnología

Hacer referencia a tecnología, genera necesidad también el conocimiento del término técnica, el cual, según González y Hernández (2000) “supone un saber práctico (saber cómo) que puede estar constituido por un plan de actividades, operaciones, procedimientos, destrezas, pertinentes para lograr un fin determinado" (p. 7). Es decir, este saber práctico no necesariamente está fundamentado científicamente en teorías o sistematizado luego de un proceso de investigación, es probable que técnicas que han existido en el pasado se hayan perdido justamente porque el saber que hacia posible su desarrollo no quedó escrito en un documento que posibilite su conservación.

Por su parte, la tecnología según Quintanilla (1998) se entiende como "un conjunto de conocimientos de base científica que permiten describir, explicar, diseñar y aplicar soluciones técnicas a problemas prácticos de forma sistemática y racional" (p. 50). Aquellos saberes que se tenían sobre algo ahora se ven explicados de manera científica convirtiéndose en conocimientos, lo cual permite la creación continua de nuevas herramientas para los fines que se requieran, aunque en la actualidad Padrón (2002) menciona que "Bunge sostiene que la tecnología moderna toma parte del conocimiento científico y hace uso de él para desarrollar su propio conocimiento con un sentido eminentemente utilitario" (p. 32). En ese sentido se puede entender a la tecnología como la aplicación de los conocimientos científicos para la resolución de problemas concretos y a la técnica como la forma de utilizarla o aplicarla.

Información, conocimiento y comunicación

De manera análoga a técnica y tecnología, para hablar de conocimiento se hace necesario también hablar de información y al hablar de la transferencia de información o conocimiento es necesario hablar de comunicación. En ese sentido, Paoli (1990) afirma que "por información se entiende al conjunto de mecanismos que permiten al individuo retomar los datos de su ambiente y estructurarlos de una manera determinada, […]. En la información no es necesario tener en común una representación mental" (p. 15). En cuanto se refiere al conocimiento, Rendón (2005) menciona que:

> Para que se produzca el conocimiento es indispensable realizar no sólo la estructuración e interpretación de símbolos, sino otra serie de actividades más complejas. Es indispensable no sólo la decodificación de símbolos, sino la

> memorización, el análisis, que permite identificar los elementos constituyentes de lo que se está conociendo y sus relaciones como parte del todo. (p. 53)

Se infiere que tener información sobre un determinado tema no implica tener el conocimiento de dicho tema, ya que el conocimiento se logra luego de la interiorización de las características concretas, abstractas, además de la esencia de los datos contenidos en la información, de alguna manera, la información se entiende como un conjunto de datos relativamente estructurados de algún ente material o no, pero sobre el cual no necesariamente se ha realizado un proceso mental para su representación.

En cuanto a la comunicación, puede ser vista como un proceso posterior a la información, ya que Domínguez y Vera (2006) afirman que:

> El paso de la información a la comunicación se da cuando a partir de los datos obtenidos del medio ambiente se "ponen en común" con otros de manera que se comparta el mismo significado; es decir, son fenómenos ligados que se complementan. (p. 209)

Se desprende de ello que la comunicación es un proceso por el cual la información que posee uno o más individuos se transmita a los demás con el mismo significado.

Tecnologías de la Información y comunicación (TIC)

Marker (2020) afirma que un bit "es la menor unidad de información de una computadora. Un bit tiene solamente un valor (que puede ser 0 o 1). Varios bits combinados dan origen a otras unidades, como 'byte', 'mega', 'giga', 'tera' ". (párr. 3); lo cual lleva a definir el término digital como "un dispositivo o sistema: Que crea, presenta, transporta o almacena información mediante la combinación de bits" (Real Academia Española [RAE], 2021).

Al hablar actualmente de TIC se hace referencia a tecnologías digitales, además, la mayoría de concepciones sobre las TIC poseen cierta similitud y sus ligeras diferencias pueden darse de acuerdo al contexto o al estudio que se pretenda realizar con ellas. Al respecto, Belloch (2012) define a las TIC como “tecnologías para el almacenamiento, recuperación, proceso y comunicación de la información” (p. 2). Si bien se trata de una definición corta, cada uno de los términos engloba diversidad de características de las TIC, además considera con el término tecnología a la tecnología digital. Por su parte el Ministerio de Tecnologías de Información y Comunicaciones (MINTIC, 2009) en la Ley 1341 define a las TIC como “el conjunto de recursos, herramientas, equipos, programas informáticos, aplicaciones, redes y medios, que permiten la compilación, procesamiento, almacenamiento, transmisión de información como voz, datos, texto, video e imágenes” (p. 6).

En este sentido, se entiende a las TIC como el conjunto de tecnologías digitales que permiten el acceso, almacenamiento, tratamiento, transferencia y recuperación de datos auditivos y/o visuales relativamente estructurados de un individuo o comunidad en beneficio de él o ellos mismos como el de otros individuos o comunidades para la resolución de problemas concretos. Por ejemplo, a partir de la situación actual a causa de la Covid-19, el uso de las TIC en la Educación Básica (EB) como en el nivel superior técnico y universitario ha jugado un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, gracias a ellas se pudo llevar a cabo en el Perú el programa “Aprendo en Casa” con estudiantes de Educación Básica, así como también se pudo notar las redes sociales con mayor contenido educativo que, en algunos casos, antes era de acceso restringido.

Las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje remoto

Sin duda alguna, las TIC han jugado un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje no presencial o remoto, entendiéndose como remoto según la RAE (2021) a aquello lejano. Es decir, a un proceso de enseñanza-aprendizaje que no requiere de la presencia física de los participantes en el mismo lugar, pudiendo ser en el mismo tiempo en simultáneo (sincrónico) o en el tiempo en el que cada participante pueda acceder (asincrónico). Pero, no solo a causa de la crisis sanitaria se vino dando cada vez mayor importancia al uso estratégico de las tecnologías digitales para el proceso de enseñanza aprendizaje, puesto que ya existían cursos ofrecidos de forma virtual por diferentes plataformas, algunas de ellas pertenecientes, incluso, a

Universidades, tanto en modalidades semipresenciales como también completamente virtuales. Pero, es necesario tener en cuenta que como cualquier estrategia, medio, material o recurso en general, al momento de utilizar las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje no se debe confundir con un fin, sino como un medio que posibilita el aprendizaje.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2019) afirma que "las tecnologías de la información y comunicación (TIC) pueden complementar, enriquecer y transformar la educación" (párr. 1); para ello, debemos entender que es necesario utilizar conocer la mayor variedad de recursos TIC y saber utilizarlos con la mayor eficiencia posible. En cuanto a los principales recursos se tienen:

Los repositorios educativos digitales, entendidos como sitios web centralizados donde se almacena y mantiene información digital, habitualmente bases de datos o archivos informáticos. Actualmente, un gran número de universidades en el mundo cuentan con repositorios digitales en los que se muestran los trabajos de investigación, artículos científicos y diversidad de materiales de importancia académica; no obstante, también existen repositorios que no pertenecen a una universidad y que también almacenan información académica de distintas universidades. Algunos grandes repositorios son Europeana, Globe, Hispana, Merlot II, entre otros.

Las plataformas educativas, según Goodwill Community Foundation (GFC, 2021) las plataformas educativas virtuales "son sistemas informáticos creados para la realización de un proyecto educativo virtual, conocidos normalmente como LMS (Learning Management Systems)" (párr. 1). Entre las plataformas virtuales, Gómez (2018) considera ATutor, Chamilo, Claroline, Moodle, Blackboard.

Las aulas virtuales, según la Universidad Internacional de Valencia (VIU, 2015) son "un poderoso dispositivo de comunicación y de distribución de conocimientos que, además, ofrece un espacio para atender, orientar, y evaluar a los participantes" (párr. 2). Al respecto, Belluchi (2020) menciona:

> A falta de una línea institucional clara, muchos formadores, por decisión propia, empezaron a utilizar Zoom, que parecía la solución más práctica. Pero a medida que se extendía el encierro, se fueron visibilizando nuevas propuestas, que ofrecían un perfil más pedagógico, sin costo ni limitaciones. Google Classroom, Microsoft Teams, Moodle, Aula en Casa y Zoho Classes. (párr. 5)

Las aulas virtuales son plataformas o espacios dentro de una plataforma online, de modo que para propósitos de esta investigación se considerarán como aulas virtuales a aquellas plataformas educativas de videoconferencia que poseen la comunicación mediante videochat de forma sincrónica y asincrónica.

Las pizarras virtuales o en línea, según ViewSonic (2019) son "herramientas educativas comunes que hacen que las funciones de la misma estén disponibles en cualquier lugar con una conexión a internet" (párr. 1). Su uso se ha extendido por la necesidad educativa durante la crisis sanitaria en el Perú, entre sus principales características destacan el permitir trabajar de forma colaborativa con otros usuarios que están en otra ciudad. Se pueden clasificar a las pizarras virtuales en dos grupos, aquellas que son parte de los programas de videoconferencia (Zoom, Microsoft Teams, entre otros) y aquellas que son externas o independientes (Jamboard, Openboard, entre otros). Sánchez (2017) menciona que "su uso más frecuente es el formativo o educacional. Si impartes algún tipo de formación online, no olvides tener en cuenta que disponer de una pizarra virtual es altamente beneficioso tanto para ti como para tus alumnos" (párr. 3). También se ha visto que muchos que ya han impartido clases con ellas sugieren el beneficio adicional que trae consigo el uso de las tabletas o laptops con lápiz óptico, sin dejar de prever la variación del tamaño que puede tener el texto respecto a la fuente original.

Las nubes informáticas, son recursos informáticos de gran utilidad debido a las características y ventajas que posee respecto a no utilizarlas, de acuerdo con Melo (2018) "la nube permite almacenar y acceder a datos y programas a través de internet en lugar del disco duro de su computadora. La nube es solo una metáfora de internet. […]. Para entender cómo funciona la nube, tienes que olvidarte del disco duro" (párr. 1-2). Existen diferentes tipos de nubes, pero por la naturaleza de este estudio se centrará la atención sobre aquellas que ofrecen algunas de sus funciones de forma gratuita; la idea del uso de las nubes radica en que mediante el uso de internet se puede guardar información en ellas para luego poder acceder a dicha información desde cualquier lugar, cualquier ordenador (o dispositivo móvil) y de manera instantánea; esto facilita la formación a través de cursos virtuales, el trabajo colaborativo sobre un mismo archivo y guardado automático. Entre las nubes informáticas de mayor uso se destacan OneDrive, GoogleDrive, Dropbox, entre otras.

Evaluación virtual, se entiende como el proceso de evaluación desarrollado en entornos virtuales. Respecto a la evaluación, Tyler (1950) la concibe como el "proceso que determina hasta qué punto se han conseguido los objetivos educativos" (p. 69); esta forma de ver a la evaluación es denominada por la psicología educativa como evaluación sumativa. Por su parte, Cronbach (1972) considera a la evaluación como "el proceso de recopilación y utilización de la información para tomar decisiones" (p. 224); esta perspectiva se alinea mejor con la evaluación formativa, quizá esto es descrito mejor por Flores (1999), quien menciona que "evaluar no es una técnica general y abstracta, sino una actividad ligada a la enseñanza. […] se realiza sobre lo que el alumno alcanza respecto a su logro anterior" (p. 137). Respecto a la evaluación en ambientes virtuales, Devlin et al. (como se citó en Cano y Hernández, 2009) describen su postura respecto a las principales ventajas y desventajas:

Tabla 1

Ventajas y desventajas de la evaluación en ambientes virtuales

Incentiva el desarrollo de destrezas importantes en los actuales contextos económicos y sociales, como la comunicación, el trabajo en equipo y el pensamiento crítico.
Reduce tiempos y costos, al facilitar el uso de técnicas para evaluar grupos más numerosos y diversificados.
Posibilita el desarrollo de nuevas formas de evaluación y su integración con otras actividades del aprendizaje, así como una retroalimentación inmediata de sus resultados.
Ofrece mayores oportunidades para practicar los conocimientos y destrezas adquiridas.
El principal problema de la evaluación en un ambiente virtual o a distancia suele ser el de la fiabilidad, dado que "puede inducir al plagio".

Nota. Adaptado de Cano y Hernández (2009).

Además, la Universidad Galileo (2020) menciona algunas alternativas de evaluación en línea, tales como las pruebas cortas, ensayos, investigaciones, presentación oral, trabajo en grupo, resolución de casos, elaboración de proyectos y participación en foros. Para estos planteamientos brindados por dicha universidad se pueden utilizar diversas plataformas y recursos, por ejemplo, los formularios de Google u otras páginas web que permitan elaborar cuestionarios; se pueden utilizar las redes sociales para las presentaciones orales, los documentos compartidos para la elaboración de proyectos e investigaciones, entre otros recursos digitales.

Correo electrónico y otros recursos de apoyo, el correo electrónico facilita la comunicación y la transferencia de archivos, sin embargo, su importancia actual radica en la vinculación y acceso a otros recursos como las nubes informáticas, pizarras, plataformas, repositorios, entre otros. También se han vuelto importantes los recursos de grabación de pantalla de equipos móviles, esto se debe a que, algunas plataformas generan consumo de datos de internet al momento de reproducir grabaciones de las sesiones, sobre todo para aquellos estudiantes que poseen un acceso limitado al mismo, frente a esto se han vuelto importantes para dispositivos móviles aplicaciones como InShot, XRecorder, entre otros, que permiten grabar una sesión de clase desarrollada a través del celular y que, incluso comprimen el tamaño normal de modo que se facilita para el proceso de compartir por las redes sociales, tales como Facebook y WhatsApp, este último es otros de los recursos muy importantes de comunicación escrita, telefónica y que permite el envío de mensajes (texto, imágenes, video, documentos, entre otros) de manera versátil e inmediata a cualquier lugar del mundo mediante la vinculación con un número de teléfono.

Aprendizaje significativo

El aprendizaje

Aunque podría considerarse como proceso inmediato a la enseñanza, existen posturas como la de Bruner que sugieren que el docente no necesariamente debe cumplir la función de enseñar. Desde una visión del aprendizaje como una forma de procesar la información, Gagné (1979) afirma que “es un cambio en las disposiciones o capacidades humanas, que persiste durante cierto tiempo y que no es atribuible solamente a los procesos de crecimiento” (p. 2). Desde una visión de actividad, Serrano (1990) la define como un proceso en el cual “cumplen un papel fundamental la atención, la memoria, la imaginación, el razonamiento que el alumno realiza para elaborar y asimilar los conocimientos que va construyendo y que debe incorporar en su mente en estructuras definidas y coordinadas” (p. 53).

Si bien es cierto, no existe una definición que englobe a la totalidad de posturas que la sugieren como el cambio de conducta, adquisición de conocimientos, desarrollo de habilidades, entre otros, sin embargo, una aproximación a la definición de Aprendizaje es sugerida por Zapata (2015), quien menciona que:

> El Aprendizaje es el proceso o conjunto de procesos a través del cual o de los cuales, se adquieren o se modifican ideas, habilidades, destrezas, conductas o valores, como resultado o con el concurso del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento o la observación. (p. 5)

Esta aproximación engloba a varias posturas, no obstante, podría adicionase a ello la adquisición de conocimientos presente en todo proceso de enseñanza aprendizaje. En ese sentido, como afirma la UNESCO (2017) el aprendizaje se define como “un proceso que reúne las experiencias e influencias personales y ambientales para adquirir, enriquecer o modificar conocimientos, habilidades, valores, actitudes, comportamiento y visiones del mundo” (párr. 1).

El aprendizaje significativo

La psicología cognitiva se desarrolló desde fines de 1950, según la UNESCO (2017) este enfoque menciona que “las personas ya no son vistas como colecciones de respuestas a los estímulos externos -como es entendida por los conductistas- sino como procesadores de información” (párr. 3). Es en este contexto que se hacen presente los términos “aprendizaje significativo” bajo diferentes miradas, por ejemplo, la de Bruner (1988) quien afirma que “el conocimiento verdaderamente adquirido es aquel que se redescubre” (p. 247).

Para Bruner, es más significativo el aprendizaje obtenido por medio del propio descubrimiento que por medio de la repetición mecánica; por su parte, luego de un análisis del aprendizaje por descubrimiento, Ausubel et al. (1983) afirman que:

> El aprendizaje por descubrimiento simplemente no constituye un método factible primario de transmitir grandes cuerpos de conocimientos relativos al contenido de las materias de estudio (para los alumnos que son capaces de aprender conceptos y principios a través de la enseñanza basada en exposiciones) que justifique los esfuerzos y el tiempo excesivos empleados en él. (p. 448)

Como se puede inferir, Ausubel no niega la posibilidad de que se logre el aprendizaje significativo por medio del descubrimiento como sostiene Bruner, pero considera que el tiempo que toma para ello es mayor en comparación a un aprendizaje por recepción; tampoco desecha del todo el aprendizaje mecanicista, ya que considera que pueden ser utilizados como saberes previos para lograr el aprendizaje significativo de una nueva información, además es justamente a este hecho de conectar los saberes previos con la nueva información lo que Ausubel denominaría “puente cognitivo”.

De acuerdo con Acuña et al. (2016) el aprendizaje significativo, desde la postura de Ausubel, se define como aquel que “se vuelve consciente e importante porque articula conocimiento e inquietudes anteriores de la persona con el nuevo contenido a abordar, haciendo que dicho contenido tenga sentido y con ello gane mayor probabilidad de ser incorporado en los acervos del sujeto” (p. 54) Además, Acuña et al. (2016) afirman que el aprendizaje significativo “influye de manera general a todas las pedagogías de la pregunta […] y, de manera indirecta, a todos los marcos de la didáctica” (p. 54); con los términos “pedagogía de la pregunta” se entiende a algunos enfoques actuales como la enseñanza para la comprensión, aprendizaje basado en problemas, pedagogía por proyectos, entre otros.

Asimilación cognoscitiva

De acuerdo con Manterola (1998), Ausubel plantea que el individuo aprende al recibir información verbal, para luego vincularla con los conocimientos que el mismo individuo ya había adquirido previamente, de modo que la información nueva y antigua adquieren una significación especial, es decir, nueva. En ese sentido, afirma que la "asimilación corresponde al resultado de la interacción entre el nuevo conocimiento que se va a aprender y la estructura cognoscitiva existente" (p. 184), es decir, las nuevas ideas interactúan con las ideas preexistentes, esto es la asimilación, y a partir de ella se produce el aprendizaje; de modo que la asimilación podrá asegurar el aprendizaje de tres maneras:

- Al proporcionar un significado adicional a la información nueva.
- Al reducir la probabilidad que se olvide la idea nueva.
- Al hacer que recuperar la información sea más accesible.

Manterola (1998) menciona que desde la postura de Ausubel, la asimilación cognoscitiva puede realizarse de tres formas o procesos diferentes:

Aprendizaje subordinado o inclusivo, las nuevas ideas están subordinadas a la idea o ideas ya existentes y de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Estos conceptos previos son de mayor generalidad son llamados inclusores, de modo que se distinguen dos tipos básicos de inclusión:

Inclusión derivativa, en este caso, las ideas nuevas son comprendidas como ejemplos específicos de las ideas previas. En un contexto matemático podrían ser ejemplos: el estudio de la naturaleza de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, así como la suma y producto de raíces de una ecuación cuadrática, entre otros, se derivan del estudio de las ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

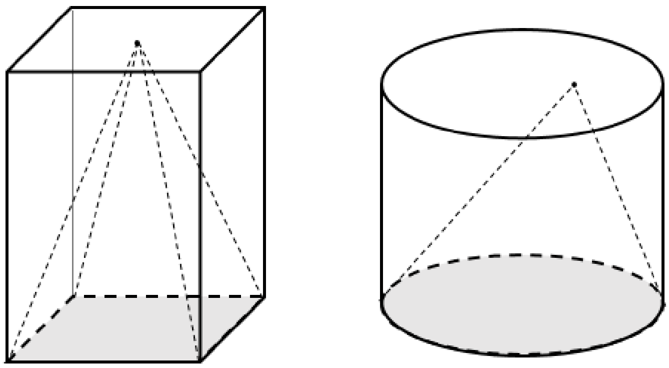
Inclusión correlativa, en este caso, las ideas nuevas son una extensión, modificación o limitación de las ideas previas. Por ejemplo, si el docente realiza las demostraciones de algunos productos notables a través de una multiplicación algebraica, de manera implícita quedará en el estudiante la idea de que todo producto notable se demuestra únicamente mediante la multiplicación algebraica, de modo que al aprender la demostración de los productos notables condicionales tendrá una modificación o extensión de la idea preexistente.

Aprendizaje supraordinado, las nuevas ideas son inclusoras de las ideas previas (las incluyen o las contienen), de modo que estas últimas son ejemplos más específicos y se vinculan a la nueva idea. Por ejemplo, la derivada de una función que surge como la solución al problema de la tangente a una curva es un concepto que incluye a los conceptos de la ecuación de la recta y la pendiente de la misma.

Aprendizaje combinatorio, la nueva idea no es inclusora ni tampoco más específica que las ideas previas, sino al mismo nivel, en una rama diferente pero relacionada. Es observable cuando se aprende algo por analogía. Por ejemplo, una pirámide, que comparte la base y posee altura congruente a la de un prisma, posee la tercera parte del volumen de dicho prisma; esta analogía puede ser utilizada para el caso de un cono y un cilindro.

Figura 1

Área de la región bajo una curva



$\mathbb{V}_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{V}_{prisma}$ $\qquad$ $\mathbb{V}_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{V}_{cilindro}$

Nota. Elaborado en Ms PowerPoint

Tipos de aprendizaje significativo

Se distinguen tres principales tipos o dimensiones del aprendizaje significativo:

Aprendizaje de representaciones, Ausubel et al. (1983) mencionan que "consiste en hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabras) o de lo que éstos representan" (p. 52). Es necesario tener en cuenta que, en algunos casos, las palabras pueden significar o representar un objeto, pero en otros casos símbolos distintos a palabras podrían servir de representación, como los símbolos matemáticos, físicos, químicos, entre otros.

El hecho de que el estudiante se apropie del significado de los símbolos o de lo que estos representan, representa la importancia de la adquisición del vocabulario que se da de forma previa a la adquisición de conceptos y posterior a haberlos adquirido. En el aprendizaje de representaciones se vinculan de forma inmediata los procesos de codificación (cambio de información en símbolos que lo representan) y decodificación (traducción de símbolos a lenguaje usual), entendiéndose "usual" como lo entendible de acuerdo al contexto. Las actividades usuales de un aprendizaje de representaciones se distingue en un nivel inicial con acciones de nombrar, clasificar, definir, describir, entre otras afines. Este tipo de aprendizaje representa la base del aprendizaje significativo, ya que en algunos casos se conecta con la realidad concreta del estudiante.

En el terreno matemático, las representaciones no necesariamente se conectan con la realidad concreta del estudiante, pero si con cuestiones previamente aprendidas en esta misma área, por ejemplo, la representación $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ no representa una realidad concreta del estudiante, pero se notará que hay un aprendizaje de representaciones, si el estudiante logra distinguir el significado de cada símbolo por separado ($\forall$: para todo, x: número, $\in$: pertenece, $\mathbb{R}$: números reales, …) e ir construyendo un significado conjunto con dichos símbolos, por ejemplo: "todo número real elevado al cuadrado es 0 o mayor a cero", la construcción de la idea no necesariamente significa que el estudiante la comprenda, ya que solamente la ha decodificado.

Aprendizaje de conceptos, Ausubel et al. (1983) define a los conceptos como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo" (p. 61) Estos conceptos pueden o no tener una definición, además se limitan dentro de un ámbito de estudio o naturaleza del área o curso, por ejemplo, en Matemática el término “número” es un concepto primitivo que no tiene definición pero se concibe como representación de una cantidad (en caso de los números naturales), de una parte en relación a un todo (en caso de los números racionales), entre otros, pero en una reunión de personas (ceremonia, actuación, evento, entre otros) el mismo término tiene una connotación muy diferente, dando la idea de una presentación, un acto o algo similar. Manterola (1998) destaca los dos métodos propuestos por Ausubel para el aprendizaje de conceptos en los estudiantes:

- Los atributos de criterio de conceptos se adquieren a través de la experiencia directa, al generar hipótesis, comprobarlas y generalizarlas.

- La asimilación de conceptos, que es la forma dominante del aprendizaje de conceptos, en este caso los estudiantes los aprenden en sus centros de formación y de su contexto.

Con base en investigaciones realizadas por Deutsche, Gubrud, Hoffman, Elkind, Olson, Duncan, entre otros, Ausubel et al. (1983) fundamentan los factores que influyen en el aprendizaje de conceptos, entre ellos el grado de experiencia, la edad cronológica, el aumento del vocabulario o inteligencia verbal, disposición del estudiante, heterogeneidad de instancias, entre otros; en cuanto se refiere a la heterogeneidad de instancias es importante mencionar que un concepto es aprendido con mayor prontitud cuando se encuentra en gran número de contextos diferentes. También hay factores que no influyen como el género, como también son menos efectivas las informaciones sutiles que las informaciones obvias en cuanto a la pertinencia.

Castro et al. (2016) sostienen que “comprender un concepto matemático es dotarlo de significado, es decir, conocer su definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, su interpretación y aplicación” (p. 237). Por ejemplo, si se parte de la determinación de conjuntos por comprensión, como $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x < 5\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 3\}$; el estudiante que ha logrado aprender las representaciones de la Teoría de Conjuntos, y los conceptos de conjunto, número entero positivo, desigualdad (en A), además de par ordenado, plano cartesiano, ecuación de la recta (en B), entonces tendrá la capacidad, previamente a escribir palabra alguna a modo de procedimiento, de asegurar que los elementos del conjunto A serán números enteros positivos, mientras que del conjunto B serán pares ordenados que representan puntos del plano cartesiano. Además, con una mayor destreza podrá afirmar que el conjunto B tiene infinitos elementos a diferencia de A, que cuenta con una cantidad limitada de elementos; el conocimiento de los conceptos anteriores se materializa en el hecho de que el estudiante realice un procedimiento correcto o, como se conoce en Matemática, elegante.

Aprendizaje de proposiciones, la idea "todo número real elevado al cuadrado es 0 o mayor a cero" tiene equivalencia representativa a $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$, este ejemplo se vuelve necesario para cuestiones de entendimiento, puesto que respecto al Aprendizaje de proposiciones, Ausubel et al. (1983) mencionan:

> Que no consiste en hacerse de lo que representan las palabras solas o en combinación, sino más bien en captar el significado de nuevas ideas expresadas en forma de proposiciones. […] el significado de proposiciones verbales que expresen ideas diferentes a las de equivalencia representativa. Esto es, el significado de la proposición no es simplemente la suma de los significados de las palabras componentes. (p. 53)

Ausubel et al (1983) mencionan que se aprende el significado de una nueva idea compuesta si:

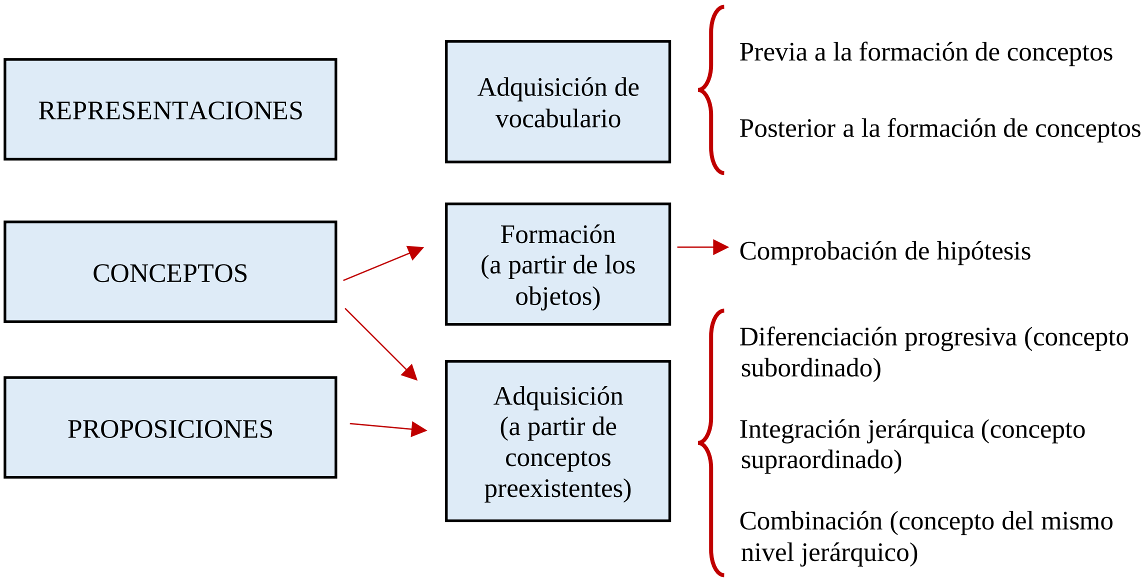
- Se genera la nueva proposición combinando o relacionando unas con otras muchas palabras individuales, cada una de las cuáles representan un referente unitario.
- Las palabras individuales se combinan (generalmente en forma de oración) de modo que la idea resultante es más que la suma de los significados de las palabras componentes individuales.

Obviamente, antes que se pueda aprender los significados de proposiciones verbales se deben conocer los significados de los términos que la componen o de lo que representan.

En Matemáticas, a partir del conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 3\}$ se puede enunciar la siguiente proposición "la gráfica de todos los elementos del conjunto B es una línea recta de pendiente -1 y cuya intersección con el eje de las ordenadas está en el punto $(0; 3)$", incluso, dependiendo del nivel de avance que el estudiante haya alcanzado, las proposiciones pueden alcanzar el carácter de conjeturas, hipótesis, o incluso, corolarios, teoremas, lemas, entre otros.

Figura 2

Tipos básicos de aprendizaje significativo en la teoría de Ausubel



Nota. Adaptado de Manterola (1998). *Psicología Educativa*

Enfoque por competencias

La ingeniería didáctica surgió con la Teoría de Situaciones, aunque no se limita a ella, de modo que es importante tener en cuenta el enfoque actual por competencias que es el asumido por las autoridades educativas de nuestro país, que también rige para el proceso de acreditación universitaria sustentada en el estándar 11 del Modelo de

Acreditación del Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa [SINEACE].

Tobón (2006) afirma que las competencias ingresaron a la educación, en gran medida, por influencia de factores externos como la competencia empresarial, la globalización, entre otros, sin que la comunidad educativa reflexione y realice un análisis crítico y/o discusión sobre ello, a tal punto que en la actualidad se ha convertido en una moda, donde toda situación o acción educativa se ha vuelto importante relacionarla a dicho término, sin importar la rigurosidad con la cual se haga, debido a que solamente la mención de dicho término valida cualquier acción, estrategia, material, entre otros, porque está inmerso en el discurso socialmente aceptado; en tal sentido hace un análisis desde diferentes perspectivas, teniendo en cuenta su diferencia y similitud con competitividad y otras categorías. En tal sentido, Tobón (2006) define a las competencias como:

> Procesos complejos que las personas ponen en acción-actuación-creación, para resolver problemas y realizar actividades (de la vida cotidiana y del contexto laboral-profesional), aportando a la construcción y transformación de la realidad, para lo cual integran el saber ser (automotivación, iniciativa y trabajo colaborativo), el saber conocer (observar, explicar, comprender y analizar) y el saber hacer (desempeño basado en procedimientos y estrategias), teniendo en cuenta los requerimientos específicos del entorno, las necesidades personales y los procesos de incertidumbre, con autonomía intelectual, conciencia crítica, creatividad y espíritu de reto, asumiendo las consecuencias de los actos y buscando el bienestar humano. (p. 49)

En el nivel superior, Tobón (2006) propone 5 modelos que describen las competencias.

Tabla 2

Modelos de descripción y normalización de competencias

Tipo de modelo	Énfasis en la descripción
Basado en el enfoque de unidades de competencia laboral-profesional	- Unidades de competencia - Elementos de competencia
Basado en niveles de dominio y rúbricas	- Niveles de dominio en cada competencia y rúbricas
Basado en niveles de solamente dominio	- Solo niveles de dominio en cada competencia
Sistémico-compleja: problemas y criterios	- Problemas - Competencias - Criterios
Basado en criterios de desempeño	- Competencias - Criterios en cada competencia

Nota. Adaptado de Tobón (2008). *La formación basada en competencias en la educación superior*

Además, Tobón (2008) menciona que el modelo complejo normaliza las competencias con base en cinco principios:

- Las competencias se determinan partiendo de identificar problemas sociales, profesionales y disciplinares, actuales o futuros.
- Los problemas se asumen como retos que sirven para orientar la formación.
- Cada competencia se caracteriza por ser íntegra e integral, responde a un para qué.
- Con el fin de orientar la formación, evaluación y certificación, se determinan criterios en cada competencia.
- Cada criterio busca dar cuenta de un diferente saber integrado en la competencia, por ello, se tienen criterios para el saber ser, saber conocer y para el saber hacer.

2.3. Bases conceptuales

Aprendizaje

Proceso que reúne las experiencias e influencias personales y ambientales para adquirir, enriquecer o modificar conocimientos, ideas, habilidades, destrezas, valores, actitudes, comportamiento y visiones del mundo, como resultado del estudio, de la experiencia, la instrucción, el razonamiento o la observación.

Aprendizaje significativo

Tipo de aprendizaje que se vuelve consciente e importante porque articula conocimiento e inquietudes previas de la persona con el nuevo contenido a abordar, haciendo que dicho contenido tenga sentido y con ello gane mayor probabilidad de ser incorporado como parte de la nueva estructura mental del individuo.

Competencia

Proceso complejo que las personas ponen en acción-actuación-creación, para resolver problemas y realizar actividades cotidianas, laborales o profesionales, aportando a la construcción y transformación de la realidad, para lo cual integran el saber ser, el saber conocer y el saber hacer, teniendo en cuenta los requerimientos específicos del entorno, las necesidades personales y los procesos de incertidumbre, con autonomía intelectual, conciencia crítica, creatividad y espíritu de reto, asumiendo las consecuencias de los actos y buscando el bienestar humano.

Ingeniería didáctica

Propuesta vigente que tiene dos perspectivas; la primera consiste en una línea de educación matemática dentro de la escuela francesa que mediante sus dos primeras fases sirve para elaborar secuencias de clase, concibiéndose, como un producto; la segunda consiste en servir como una metodología de investigación, como un proceso, de modo que mediante sus cuatro fases sirve para validar una investigación, generalmente del enfoque cuantitativo, basado en un estudio de casos.

TIC

Conjunto de tecnologías digitales que permiten el acceso, almacenamiento, tratamiento, transferencia y recuperación de datos auditivos y/o visuales relativamente estructurados de un individuo o comunidad en beneficio de él o ellos mismos como el de otros individuos o comunidades para la resolución de problemas concretos.

2.4. Bases filosóficas

En el positivismo, como afirma Kremer (2010), el sujeto de la ciencia "subordina su pensamiento a los materiales objetivos y sus imágenes interiores a las imágenes exteriores" (p. 16), y en eso se sustenta este estudio en el que se ha realizado el análisis del grado de influencia que tiene la Ingeniería Didáctica (como método para elaborar secuencias de clase) sobre el Aprendizaje Significativo de la Integral Definida, de modo que los instrumentos validados han implicado la medición objetiva del Aprendizaje Significativo de forma previa y de forma posterior (preprueba y posprueba). Por su parte, Adler (1964) menciona que el positivismo:

> Denota un enfoque filosófico, teoría o sistema basado en la opinión de qué la vida social, así como el sentido de las ciencias naturales, experiencias y su tratamiento lógico y matemático son la fuente exclusiva de toda la información que vale la pena. (p. 520)

Por lo tanto, los métodos, diseños e instrumentos utilizados desde la óptica del enfoque cuantitativo se sustentan en la postura positivista, ya que los aspectos no considerados en este enfoque podrían haber llevado esta investigación a interpretaciones subjetivas que, en consecuencia, generarían conclusiones erróneas o distorsionadas de la realidad.

Además, la parte interna de la investigación considera aspectos de la Historia de las Matemáticas, en la cual gran número de personajes representativos presentan inclinaciones hacia la Geometría, al Cálculo, a la Teoría de Números, entre otros; esto ha generado una serie de interrogantes, la primera ¿cuál es el objeto de estudio de las Matemáticas?, frente a lo cual Courant y Robbins (1979) mencionan que:

> El contacto creciente entre el Oriente y los griegos, que comienza en los tiempos del imperio persa y culmina en el periodo que sigue a las expediciones de Alejandro, puso a los griegos al corriente de los conocimientos de los babilonios en matemática y astronomía. La matemática fue sometida entonces a grandes dificultades inherentes a los conceptos matemáticos de continuidad, movimiento e infinitud, así como el problema de medir magnitudes arbitrarias con unidades prefijadas. […] La tendencia axiomático-deductiva en matemáticas tuvo su origen en tiempos de Eudoxo y cristalizó en los Elementos de Euclides. (p. 3)

Como se distingue, la tendencia axiomático-deductiva de la Matemática que se gestó en la antigua Grecia influyó de forma notable en las características de la ciencia, así como del enfoque cuantitativo de investigación que se utiliza actualmente; en cuanto a la ciencia se comenzó a tener mayor precisión con fundamento métrico a cuando era solamente utilizada para cuestiones cotidianas, tal como fue utilizada en Mesopotamia y Egipto.

2.5. Bases epistemológicas

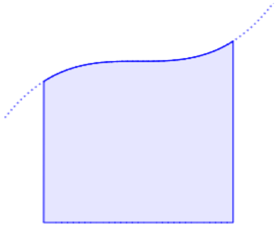
En Matemáticas se suelen buscar patrones, relaciones cuantitativas, relaciones geométricas, entre otros; aunque algo en común son los conceptos primarios o primitivos, por ejemplo, el punto es un concepto primario de la Geometría como el conjunto es para la Topología y las Estructuras Algebraicas. Otra parte importante lo constituyen las definiciones, que de acuerdo con Winicki (2006) en el proceso de definir influyen criterios lógicos, estéticos y pedagógicos, por ejemplo, la definición debe ser precisa, basarse en conceptos primitivos o en conceptos previamente definidos, establecer condiciones necesarias y suficientes, debe ser minimalista (no deducible lógicamente de otras partes de la misma definición), debe ser elegante (sencillez en el uso del simbolismo, simplicidad en su presentación, entre otros). También son de vital importancia los Teoremas que pueden ir acompañados de lemas (proposiciones demostrables que pueden ser utilizadas para la demostración de un

Teorema) y corolarios (proposiciones demostrables que surgen como consecuencia de un Teorema). Los Teoremas son proposiciones demostrables mediante procedimientos y argumentos matemáticos basados en definiciones, pudiendo utilizarse también algún lema. Es, en este contexto, en el que puede surgir una segunda interrogante, ¿cuál es el método de estructuración del saber matemático?; al respecto, Martí (2017) afirma que, para Aristóteles, los matemáticos suponen la existencia de entidades con el fin de avanzar en su investigación y, por ello se toman a las definiciones como algo indemostrable o al menos no es demostrable del mismo modo como se hacen los Teoremas. Se atribuye a los griegos esta estructuración teórica del saber matemático en función a conceptos primitivos, definiciones, postulados (axiomas), lemas, teoremas y corolarios; dejando de verlo únicamente como un conocimiento de aplicación directa a contextos cotidianos como cuantificación de ganados, impuestos o medición de terrenos como justamente era la forma de entenderla en Mesopotamia y Egipto.

Según Boyer (1991) “durante el siglo VI a.C. aparecen dos hombres, Tales y Pitágoras, que seguramente tuvieron el mismo papel con respecto a la Matemática que Homero y Hesíodo respecto a la literatura” (p. 74). Es posible que en sus viajes a Egipto aprendieron Geometría y, en Babilonia sobre Astronomía. Se conoce en la actualidad como Teorema de Tales a la proposición que hace referencia a que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto. Por otro lado, Pitágoras es conocido por el Teorema que lleva su nombre, sin embargo, a través de su escuela pitagórica se tuvo el principal aporte que, según La 2 de Televisión Española (2010) fue el de “introducir la necesidad de demostrar las proposiciones matemáticas de manera material e intelectual, es decir, al margen de su sentido práctico” (14:45), y es justo por esta característica que surgen algunos problemas matemáticos que, incluso hasta hoy, no tienen resolución. En su momento fue el problema de las cuadraturas, lo que en Geometría se denomina al hecho de determinar el área de una figura plana, esto representó un problema en referencia a encontrar un método general para el cálculo del área de una región bajo una curva cualquiera.

Figura 3

Área de la región bajo una curva



Nota. Elaborado con el software GeoGebra

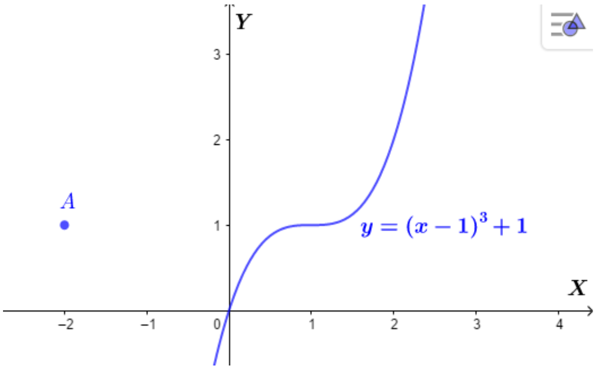
Según Fernández (2012) el problema de las cuadraturas:

> Se simplificó gracias al método de exhaución. […] Arquímedes fue quien lo supo explotar a lo largo de su vida como matemático. […] El gran paso conceptual con el uso del axioma de Arquímedes está en la idea de "aproximación". […] Arquímedes tenía verdadero aprecio a este método de trabajo, puesto que conducía a una verdadera demostración geométrica: una vez encerrada la superficie curva, se procede mediante una doble reducción al absurdo para comprobar el valor de su área que se ha postulado a priori con el método de exhaución. Los pasos lógicos son:
>
> - Sea S el área a calcular de la superficie curva.
> - Se propone (puede ser por ensayo y error) un valor T para el área de la curva.
> - Hay que demostrar que $S = T$.
> - Primero se prueba que no puede ser $S < T$.
> - Luego se prueba que no puede ser $S > T$.
> - Como S no puede ser ni mayor ni menor que T, entonces $S = T$. (pp. 80-82)

Con Arquímedes se tuvo un acercamiento importante al cálculo diferencial e integral, aunque de forma geométrica. Según Boyer (1991) "podemos decir de la geometría griega que las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vengan determinadas por las ecuaciones” (p. 207); esta nueva forma de estudiar la Geometría con una fundamentación algebraica, partiendo de la posición de los puntos de una figura y sus ecuaciones fue el gran aporte de René Descartes.

Figura 4

Ubicación del punto $A(-2; 1)$ *y gráfica de la ecuación* $y = (x-1)^3 + 1$

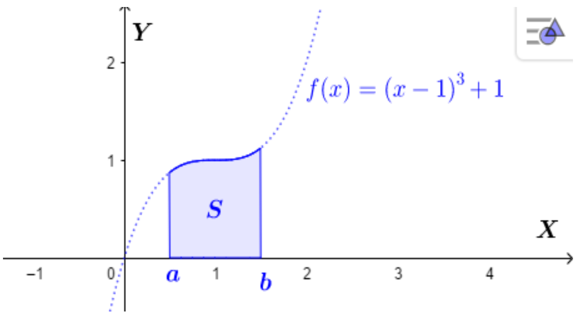


Nota. Elaborado con el software GeoGebra

Bajo esta propuesta del precursor del racionalismo (Descartes), el conocimiento matemático tendría una nueva mirada sobre la Geometría y el Álgebra, el cual mostraría la estrecha relación en la que ahora si es posible tener curvas determinadas por ecuaciones. Además, sería de gran utilidad para Newton y Leibniz, quienes de forma separada llegarían al descubrimiento del cálculo diferencial e integral, surgiendo este último como la solución al problema general de la cuadratura para cualquier curva.

Figura 5

Representación gráfica del área bajo una curva



Nota. Elaborado con el software GeoGebra

De este modo, la solución al problema de la cuadratura de cualquier curva se reduce a resolver $\int_a^b f(x)\,dx$, aunque posiblemente Newton y el racionalista Leibniz no imaginaron que el cálculo diferencial e integral tendría múltiples aplicaciones a otras ciencias, este nuevo conocimiento ahora resulta al alcance de estudiantes de nivel secundario y es uno de los tópicos principales en la Matemática de nivel universitario.

Huenemann (2012) menciona que la razón "descreve tanto o que pode existir quanto o que pode ser pensado. […] o racionalismo sustenta que a mente humana possui em si a chave para a compreensão da estrutura da realidade última" (p. 1). Por ello la construcción de la Matemática, en gran medida, ha tenido una construcción sustentada en el Racionalismo, sus conceptos son construcciones mentales que se validan a través de procesos de entendimiento de una realidad no necesariamente concreta u observable.

2.6. Bases antropológicas

Murphy (2005) considera a Sumeria (en Mesopotamia) como la primera civilización que existió en nuestro mundo y de la cual se tiene conocimiento, esto se debe principalmente a la evidencia dejada en tablillas cuneiformes con contenidos diversos, pero aquellos con contenido matemático dan cuenta que "los sumerios no tenían la idea abstracta de número, pues expresaron las diversas cantidades como símbolos de metrología y nunca como números seguidos de la unidad respectiva" (Diaz, 2011, p. 75), sobre todo al inicio. Pero si es importante tener en cuenta que la Matemática utilizada en Sumeria surgió como respuesta a necesidades cotidianas como medición (distancias, áreas de terrenos, capacidad y/o volumen, entre otros), cuantificación (ganado, insumos, impuestos) y posiblemente fueron adiestrados en el manejo de los números con finalidades prácticas.

Respecto a Babilonia, que fue una civilización mesopotámica posterior a Sumeria, Diaz (2011) menciona que "la mayor parte de los conocimientos básicos de Matemática fueron obtenidos de los sumerios, pero con el tiempo se fue perfeccionando a lo largo del periodo acadio" (p. 90). La Matemática babilónica tuvo diversas características que, si bien partían de situaciones cotidianas (al igual que los sumerios), también mostraban cierto indicio de abstracción y/o tendencia a la generalización de resultados, muestra de ello es la tablilla Plimpton 322 cuya escritura cuneiforme se encuentra dispuesta en cuatro columnas y quince filas con posibles ternas pitagóricas, de modo que solamente 4 de las 15 filas presentan errores, que según Maza (2007) podrían ser de cálculo o copiado.

Es posible que Pitágoras y Tales, en sus viajes a Mesopotamia y Egipto accedieron a estos conocimientos y que, sucedidos por otros matemáticos de la antigua Grecia, dieron un carácter teórico y formal al estudio de esta ciencia, dejando de ser únicamente aplicable a situaciones cotidianas. En Mesopotamia, algunas fórmulas propuestas eran aproximadas, quizá resultaban exactas en algunos casos muy particulares, pero en otros no y probablemente nunca reflexionaron sobre ello, es por esto lo trascendental del aporte de los griegos, en relación a la búsqueda de la exactitud de sus cálculos a partir de las fórmulas demostradas previamente con rigurosidad matemática.

Sin duda alguna, el plano cartesiano como aporte de Descartes fue un aspecto de suma importancia para la representación de la posición, movimiento de un objeto, entre otros, respecto a un sistema de referencia. Esto puede ser visto de utilidad únicamente para las matemáticas, sin embargo, su trascendencia radica en los otros sistemas de referencia surgidos a partir de él como las coordenadas esféricas que se utilizan para la ubicación geográfica de ciudades, aviones, barcos, etc. en la actualidad. Además, sirvió de base al cálculo para resolver dos problemas, el primero, determinar la recta tangente a una curva en cualquiera de sus puntos y, el segundo, el problema de las cuadraturas o el área bajo una curva cualquiera.

El cálculo diferencial e integral muestra la importancia del aspecto aproximado de las Matemáticas pero que, a diferencia de Mesopotamia, esta aproximación es ahora controlada y con tendencia a la exactitud; además, la relevancia del cálculo trasciende del terreno matemático a la aplicación en aspectos que influyeron en el desarrollo de la humanidad, tal como Stewart (2012) lo menciona:

> Hoy el cálculo se utiliza para determinar las órbitas de los satélites y naves espaciales, en la predicción de tamaños de población, en la estimación de la rapidez con la que los precios del petróleo suben o bajan, en la predicción meteorológica, en medir el ritmo cardiaco del corazón, en el cálculo de las primas de seguros de vida y en una gran variedad de otras áreas. (p. 8)

El Cálculo diferencial e integral y, en general, la Matemática han aportado al desarrollo del hombre en todas las épocas diferentes aspectos de su desenvolvimiento en su sociedad y fuera de ella.

CAPÍTULO III. SISTEMA DE HIPÓTESIS

3.1. Formulación de las hipótesis

3.1.1. *Hipótesis general*

H_i: La Ingeniería Didáctica influye significativamente en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

3.1.2. *Hipótesis específicas*

$H1_i$: La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

$H2_i$: La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

$H3_i$: La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

3.2. Operacionalización de las variables

A partir del objetivo general: Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del

Perú; se plantea la operacionalización de las variables en la tabla 3, a través de tres dimensiones para cada variable con sus respectivos indicadores e ítems necesarios para la medición.

Tabla 3

Operacionalización de variables

Variables	Definición conceptual	Dimensiones	Indicadores	Ítems
$\boldsymbol{V.I.}$ Ingeniería didáctica	Línea vigente de Educación Matemática que, mediante sus dos primeras fases sirve para elaborar secuencias de clase	Didáctico	• La secuencia de clase es coherente con el enfoque por competencias. • Analiza el tópico en libros o materiales consignados en el sílabo.	1, 2, 3
		Epistemológico	• Analiza la evolución histórica del concepto. • Explicita el tiempo que pasó desde la aparición de un concepto hasta su formalización.	4, 5, 6, 7
		Cognitivo	• Clasifica el tipo de errores de los estudiantes en tópicos previos. • Selecciona partes del tópico a incluir o no en la secuencia de clase.	8, 9, 10
$\boldsymbol{V.D.}$ Aprendizaje significativo remoto	Aprendizaje que articula conocimiento e inquietudes previas de la persona con el nuevo contenido a abordar, todo esto a través del uso de recursos TIC en la modalidad no presencial.	Aprendizaje de representaciones	• Codifica frases de contexto matemático. • Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	1, 2, 3
		Aprendizaje de conceptos	• Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación. • Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4, 5, 6, 7
		Aprendizaje de proposiciones	• Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos. • Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos	8, 9, 10

3.3. Definición operacional de las variables

3.3.1. *Variable independiente: Ingeniería didáctica*

Línea de Educación Matemática que mediante el análisis preliminar (didáctico, epistemológico y cognitivo) y el análisis a priori permite la elaboración de la secuencia de actividades de una sesión de clase.

3.3.2. *Variable dependiente: Aprendizaje significativo remoto*

Comprende la medición del aprendizaje de representaciones, proposiciones y conceptos que se adquieren mediante la articulación de los conocimientos previos del estudiante con el nuevo contenido, esto a través del uso de los recursos TIC en la modalidad no presencial.

CAPÍTULO IV. MARCO METODOLÓGICO

4.1. Ámbito

La Universidad Nacional del Centro del Perú (UNCP) se encuentra situada en la ciudad de Huancayo, en la región Junín a 3259 m.s.n.m.; alberga a estudiantes, en su mayoría, de la misma región, aunque también existe un porcentaje de estudiantes que proceden de la región Huancavelica, Pasco, Huánuco y Lima.

Actualmente, la Facultad de Educación de la UNCP posee 4 escuelas profesionales (Educación Física y Psicomotricidad, Educación Inicial, Educación Primaria y Educación Secundaria), dentro de la escuela de Educación Secundaria existen 4 carreras profesionales, siendo una de ellas la carrera profesional de Ciencias Matemáticas e Informática (CP-CMI).

La CP-CMI contó con 5 semestres activos durante el periodo 2020 – I (I, III, V, VII y IX) y durante el periodo 2020-II estuvieron en actividad los semestres pares (II, IV, VI, VIII y X). Por la normatividad de SINEACE (para efectos de la acreditación universitaria) el plan de estudios de la Carrera Profesional es evaluada durante un periodo máximo de 3 años, siendo vigente para esta investigación el plan 2018. Además, esta investigación se aplicó durante el periodo 2021 – I, en los estudiantes del semestre VII, quienes llevaron la asignatura de Análisis Matemático II, en la cual uno de los conceptos de mayor importancia es la integral definida.

4.2. Tipo y nivel de investigación

4.2.1. *Tipo*

Baptista et al. (2016) definen al tipo de investigación experimental como aquel que “manipula tratamientos, estímulos, influencias o intervenciones (denominadas variables independientes) para observar sus efectos sobre otras variables (las dependientes) en una situación de control” (p. 129).

En concordancia con la definición anterior, la presente investigación se realizó bajo el enfoque cuantitativo y de tipo experimental, de subtipo cuasi-experimental en el que se utilizaron dos grupos, el primero fue el grupo experimental conformado por la mitad de estudiantes del VII semestre y, el segundo, el grupo control que estuvo conformado por los demás estudiantes de la misma sección; los integrantes de cada grupo fueron determinados bajo el principio de aleatoriedad y la equivalencia de grupos, para garantizar el grado de seguridad y confiabilidad del estudio y, en consecuencia, del objetivo propuesto. Finalmente, con el apoyo del software SPSS Statistics v. 25 se midió el grado de significación del método utilizado sobre el grupo experimental.

4.2.2. *Nivel*

Según el planteamiento de Niño (2011) los estudios aplicativos "se ocupa de la solución de problemas prácticos" (p. 38). Tal es así que considera la intervención o manipulación de una o más variables con el propósito resolver problemas que son necesidad de la población objetivo.

Con base en el planteamiento anterior este trabajo corresponde a un nivel aplicativo que responde a la pregunta ¿qué influencia tiene la Ingeniería Didáctica sobre el aprendizaje significativo de la integral definida?

4.3. Población y muestra

4.3.1. *Descripción de la población*

De Alvarado et al. (1994) definen a la población o universo como "el conjunto de individuos u objetos de los que se desea conocer algo en una investigación. […] es el grupo de elementos al que se generalizarán los hallazgos" (p. 108).

Esta postura sustenta que la población permite definir la población de este estudio, la cual fue de 26 estudiantes del VII semestre de la Carrera

Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú durante el año 2021 y el periodo lectivo 2021 – I. No obstante, el análisis de los resultados de este estudio podría ser de mucha utilidad a todos los semestres, debido a que todos los estudiantes llevan esta asignatura de forma obligatoria de acuerdo al plan de estudios vigente (2018) a modo de asignatura del área de formación especializada y el sub-área de formación especializada, además, en planes de estudios anteriores también ha sido considerado.

4.3.2. *Muestra y método de muestreo*

La **muestra**, para De Alvarado et al. (1994) es "un subconjunto o parte del universo o población en que se llevará a cabo la investigación con el fin posterior de generalizar los hallazgos al todo" (p. 108).

La muestra de este trabajo fue censal, es decir, estuvo conformada por los 26 estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, durante el periodo lectivo 2021 – I.

El **método de muestreo** resulta de gran importancia al momento de encaminar la investigación, en ese sentido la muestra fue probabilística debido a que todos los estudiantes tuvieron la misma posibilidad de ser elegidos y se tuvo el criterio de equivalencia para la formación de los grupos experimental y control a partir de la preprueba.

Tabla 4

Población y muestra

	Población		Muestra	
	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres
Estudiantes del VII semestre	16	10	16	10

Para la formación de grupos (control y experimental) se ha priorizado la equivalencia de grupos a partir de los resultados de la preprueba. Luego de varios intentos con la función ‘aleatorio.entre’ de Microsoft Excel se han obtenido medias similares, tanto para el grupo control como para el grupo experimental.

Figura 6

Muestra aleatoria con división en grupos con medias equivalentes

=ALEATORIO.ENTRE(0;1)

B	C	D	E	F
Puntuaciones	Grupo			
0	0		0: Grupo control	1: Grupo experimental
1	1			
1	0		**Puntaje**	**Puntaje**
2	1		0	1
2	1		1	2
3	0		3	2
3	1		3	3
3	0		3	3
3	0		3	4
3	0		3	4
3	1		4	4
3	0		4	4
4	0		4	4
4	1		4	5
4	0		5	5
4	1		6	6
4	1		$\bar{x}_C$ = 3.307692	$\bar{x}_E$ = 3.615385
4	0			
4	0			
4	1			
4	1			
5	1			
5	0			
5	1			
6	1			
6	0			

Nota. Procedimiento realizado en Ms Excel

En tal sentido, los integrantes de cada grupo fueron:

Tabla 5

Integrantes de los grupos experimental y control

Grupo Experimental			Grupo Control		
Codificación		Apellidos y Nombres	Codificación		Apellidos y Nombres
1	EST01	Almercco Cosser, Anahís Lucero	1	Est01	Boza Hilario, Royeer
2	EST02	Barrera Julcarima, Percy Germán	2	Est02	Calderón Quispe, David Luis Edgar
3	EST03	Cachura Quiñones, Jhon	3	Est03	Chávez Barzola, Angela Auriana
4	EST04	Chipana Castro, Abner Estalin	4	Est04	Esteban Baldeón, Milagros Lenin
5	EST05	De la Cruz Meza, Dariana Katherin	5	Est05	Huamán Sotacuro, Liz Vianca
6	EST06	Diaz Arcos, Mayli Ameli	6	Est06	Manhualaya Aliaga, Dany
7	EST07	Manrique Ruíz, Diego Edwin	7	Est07	Matías Balvín, Ruth Yanina
8	EST08	Martinez Cristóbal, Paúl	8	Est08	Mayta Briceño, Dietmar Silvestre
9	EST09	Mucha Vásquez, Lizbeth Mariela	9	Est09	Mendoza Areche, Fernando César
10	EST10	Quintana Alanya, Katherine Marleny	10	Est10	Rivera Pérez, Antoni Edilio
11	EST11	Quispe Fabián, Deivyth Peter	11	Est11	Salazar Macha, Hirvin Hugo
12	EST12	Rosales Solis, Sherly Milagros	12	Est12	Toribio Mateo, Joel Eduardo
13	EST13	Villazana Renojo, Yober Eliseo	13	Est13	Traverso Huamán, Beto Ulises

4.3.3. *Criterios de inclusión y exclusión*

Respecto a la población y muestra se pudo haber considerado a los estudiantes de los semestres I, III, V y IX; sin embargo, los estudiantes del semestre I son parte del programa de estudios generales que es un momento previo a las asignaturas de Facultad y/o Carrera Profesional; por su parte, los estudiantes de los semestres III y V si están inmersos en el plan de estudios vigente, sin embargo, aún no han completado el curso Análisis Matemático I, el cual es prerrequisito para el curso de Análisis Matemático II; por último, los estudiantes del semestre IX ya han desarrollado la asignatura en mención, por lo cual podrían intervenir algunas variables que no puedan ser controladas, por ejemplo, la mayor experiencia en el aprendizaje de representaciones, conceptos y proposiciones, además de haber sido partícipes de la didáctica presentada por el docente que les enseñó dicha asignatura, pudiendo ser también una variable que intervenga en el estudio, pudiendo así restarle confiabilidad y validez a los resultados de esta investigación.

4.4. Diseño de investigación

Respecto al diseño de preprueba posprueba y grupo de control, Baptista et al. (2016) mencionan que "la adición de la prueba previa ofrece dos ventajas: primera, sus puntuaciones sirven para fines de control en el experimento, […] la segunda ventaja reside en que es posible analizar el puntaje-ganancia de cada grupo" (p. 145); lo último se refiere a la diferencia existente entre los puntajes o calificaciones obtenidos en la preprueba y la posprueba; de modo que, debido a ambas razones, el diseño experimental que se utilizó fue el de preprueba posprueba con grupo de control, siguiendo para ello el siguiente esquema:

Figura 7

Esquema del diseño preprueba posprueba

	Preprueba		*Posprueba*
RG_1	O_1	X	O_2
RG_2	O_3	$-$	O_4

Nota. Elaborado en Ms PowerPoint

Donde:

R: Aleatoriedad

G_1: Grupo experimental

G_2: Grupo control

O_1, O_3: Información "antes"

O_2, O_4: Información "después"

X: Variable independiente

Los integrantes de la muestra fueron los estudiantes matriculados en la asignatura de Análisis Matemático II, en total 26 estudiantes, de modo que 13 de ellos formaron parte del grupo experimental y los otros 13, del grupo control; teniendo en cuenta la siguiente distribución:

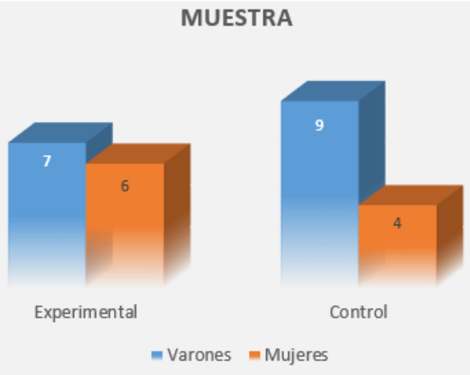
Tabla 6

Grupo experimental y control

Grupo	Cantidad de integrantes	
	Antes	Después
Grupo Experimental (G_1)	13	13
Grupo control (G_2)	13	13

Figura 8

Esquema de la estructura de la muestra



Nota. Elaborado en Ms Excel

4.5. Técnicas e instrumentos

4.5.1. *Técnicas*

De Alvarado et al. (1994), afirman que la técnica “se entiende como el conjunto de reglas y procedimientos que le permiten al investigador establecer la relación con el objeto o sujeto de investigación” (p.125). En tal sentido, las técnicas que se consideraron para la recopilación de la información consistieron en dos cuestionarios (preprueba y posprueba) para los grupos control y experimental, además del análisis preliminar sugerido por la Ingeniería Didáctica, también se han analizado las participaciones de los estudiantes en sesiones previas (grabaciones en Ms Teams).

4.5.2. *Instrumentos*

De Alvarado et al. (1994), mencionan que el instrumento de recopilación de información "es el mecanismo que utiliza el investigador para recolectar y registrar la información: Entre estos se encuentran los formularios, las pruebas psicológicas, las escalas de opinión y de actitudes, las listas u hojas de control, entre otros" (p. 125). En tal sentido, los instrumentos (preprueba y posprueba) fueron cuestionarios virtuales elaborados en Google Drive con característica dicotómica, con la existencia de una respuesta correcta y 3 distractores. Estos cuestionarios fueron elaborados en relación al tópico integral definida de la asignatura de Análisis Matemático II, con el objetivo de medir el nivel de aprendizaje significativo, a través de las dimensiones:

- Aprendizaje de representaciones.
- Aprendizaje de conceptos.
- Aprendizaje de proposiciones.

Estas dimensiones permitieron determinar el nivel de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo de la integral definida de los estudiantes de la carrera profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Además, se realizó la observación de las grabaciones de las sesiones, con fines de evaluar fortalezas y debilidades en la secuencia establecida y hacer los ajustes necesarios, para reestructurar la secuencia de actividades en las sesiones.

4.5.2.1. Validación de los instrumentos para la recolección de datos

Baptista et al. (2016) afirman que validez "se refiere al grado en que un instrumento realmente mide la variable que pretende medir" (p. 200), por ese motivo se ha recurrido al juicio de expertos de doctores en Ciencias de la Educación o afines.

Tabla 7

Validez por juicio de expertos

Experto	Grado y Mención	Referencia laboral	Preprueba	Posprueba
Dr. Carlos A. López Rengifo (RENACYT)	Doctor en Ciencias de la Educación	Universidad Nacional del Centro del Perú	100%	100%
Dr. Alejandro Rubina López	Doctor en Educación	Universidad Nacional Hermilio Valdizán	100%	100%
Dra. Marta C. Ríos Zea	Doctora en Ciencias de la Educación	Universidad Nacional del Centro del Perú	100%	100%
Dr. Adalberto Lucas Cabello	Doctor en Ciencias de la Educación	Universidad Nacional Hermilio Valdizán	100%	100%
Dr. Godofredo L. Cajachahua Espinoza	Doctor en Psicología Educacional y Tutorial	Director de Institución EBR - Lima	100%	100%
		Total	100%	100%

4.5.2.2. Confiabilidad de los instrumentos de recolección de los datos

Según Baptista et al. (2016) la confiabilidad "se refiere al grado en que su aplicación repetida al mismo individuo u objeto produce resultados iguales" (p. 200). De modo que, para asegurar la confiabilidad de la preprueba y posprueba, se realizó el análisis de consistencia interna de la preprueba y posprueba mediante el coeficiente KR-20 de Kuder y Richardson, ya que según Baptista et al. (2016) "KR-20 y KR-21 se trabaja con ítems dicotómicos" (p. 296). Para recopilar los datos se realizó el pilotaje de los instrumentos con 13 estudiantes del IX semestre, quienes fueron elegidos aleatoriamente. Además, se decidió realizar el cálculo del coeficiente KR-20 y no el de KR-21, debido a que la última (KR-21) es más flexible en el sentido que se requiere asumir que los todos los ítems del instrumento tienen el mismo grado de dificultad.

Figura 9

Fórmula para el cálculo del coeficiente KR-20

$$\boxed{r_n = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{VT - \sum pq}{VT} \right)}$$

Nota. Elaborado en Ms Word

Donde:

r_n: Coeficiente de confiabilidad KR-20

n: Número de ítems que contiene el instrumento

VT: Varianza total de la prueba

$\sum pq$: Sumatoria de la varianza individual de los ítems

Luego del cálculo del coeficiente KR-20, para poder realizar una adecuada interpretación del valor obtenido, Baptista et al. (2016) mencionan que “no hay una regla que indique ‘a partir de este valor no hay fiabilidad del instrumento’. Más bien, el investigador calcula su valor, lo declara y lo somete a escrutinio de los usuarios del estudio” (p. 295). Al respecto, Lauriola (como se citó en Baptista et al., 2016) “sugiere un valor mínimo de 0.70 para la comparación entre grupos y 0.90 para escalas” (p. 295). Con base en ambas citas, se tomó como criterio intervalos constantes de 0.20.

Tabla 8

Valores para el criterio de confiabilidad

Valor de r_n	Criterio
$0.80 \leq r_n < 1.00$	Muy alta confiabilidad
$0.60 \leq r_n < 0.80$	Alta confiabilidad
$0.40 \leq r_n < 0.60$	Confiabilidad moderada
$0.20 \leq r_n < 0.40$	Baja confiabilidad
$0.00 \leq r_n < 0.20$	Muy baja confiabilidad

Tabla 9

Resultados preprueba

N°	Aprendizaje de Representaciones			Aprendizaje de Conceptos				Aprendizaje de Proposiciones			Puntaje Final
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	
Est. 1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	6
Est. 2	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
Est. 3	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
Est. 4	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
Est. 5	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	6
Est. 6	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	6
Est. 7	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
Est. 8	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	8
Est. 9	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	5
Est. 10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Est. 11	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	5
Est. 12	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	6
Est. 13	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	7
Suma	13	11	6	8	2	8	0	12	1	0	
p	1.0000	0.8462	0.4615	0.6154	0.1538	0.6154	0.0000	0.9231	0.0769	0.0000	
$q = 1 - p$	0.0000	0.1538	0.5385	0.3846	0.8462	0.3846	1.0000	0.0769	0.9231	1.0000	
$p \cdot q$	0.0000	0.1302	0.2485	0.2367	0.1302	0.2367	0.0000	0.0710	0.0710	0.0000	

Tabla 10

Confiabilidad de la preprueba

Coeficiente KR-20	N° de ítems
0.803	10

Nota. Obtenido en Ms Excel

En la tabla 10, el valor obtenido del coeficiente KR-20 fue de 0.803, de modo que permite concluir que el instrumento (preprueba) tiene muy alta confiabilidad y puede aplicarse.

Tabla 11

Resultados posprueba

N°	Aprendizaje de Representaciones			Aprendizaje de Conceptos				Aprendizaje de Proposiciones			Puntaje Final
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	
Est. 1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	8
Est. 2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Est. 3	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
Est. 4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Est. 5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Est. 6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Est. 7	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	5
Est. 8	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	4
Est. 9	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	5
Est. 10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Est. 11	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	6
Est. 12	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	4
Est. 13	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	8
Suma	13	11	5	7	0	3	1	8	0	2	
p	1.0000	0.8462	0.3846	0.5385	0.0000	0.2308	0.0769	0.6154	0.0000	0.1538	
$q = 1 - p$	0.0000	0.1538	0.6154	0.4615	1.0000	0.7692	0.9231	0.3846	1.0000	0.8462	
$p \cdot q$	0.0000	0.1302	0.2367	0.2485	0.0000	0.1775	0.0710	0.2367	0.0000	0.1302	

Tabla 12

Confiabilidad de la posprueba

Coeficiente KR-20	N° de ítems
0.823	10

Nota. Obtenido en Ms Excel

En la tabla 12, el valor obtenido del coeficiente KR-20 fue de 0.823, es decir, el instrumento (posprueba) también tiene muy alta confiabilidad. Con base al análisis de confiabilidad de ambas pruebas, se aplicó la preprueba a todos los estudiantes, se ejecutó la secuencia propuesta con el grupo experimental y la secuencia establecida en el Sílabo del curso con el grupo control y posteriormente se aplicó la posprueba a todos los estudiantes.

4.6. Técnica para el procesamiento y análisis de datos

4.6.1. *Técnica para el procesamiento de datos*

En el grupo control se desarrolló una secuencia de temas de acuerdo a lo que se considera en el sílabo de la asignatura de Análisis Matemático II, teniendo en cuenta la capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la integral definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contexto simulado y de contexto real.

Tabla 13

Tópicos desarrollados con el grupo control

Sesión	Tópico o tema	Indicador de desempeño
1	Sumatorias. Propiedades y fórmulas básicas.	Resuelve problemas de sumatorias aplicados a situaciones intra matemáticas y de contexto simulado.
2	Reglas telescópicas. Límite de una sumatoria.	Utiliza las reglas telescópicas para la demostración de fórmulas en las que se utilizan sumatorias.
3	Área de una región mediante sumatorias.	Determina el área bajo la gráfica de una función mediante el uso de las propiedades de las sumatorias.
4	Integral definida. Propiedades y teoremas.	Reconoce el concepto y teoremas de la integral definida.
5	Teorema fundamental del Cálculo. Área de una región bajo una curva y una recta.	Determina el área de una región limitada por una curva y una recta horizontal en un intervalo dado.
6	Área de una región limitada entre dos curvas.	Determina el área de una región limitada entre dos curvas en un intervalo.
7	Teorema del valor medio.	Resuelve ejercicios del cálculo del valor medio.
8	Cálculo de volúmenes. Método del disco.	Resuelve problemas que requieren del cálculo de volúmenes mediante el uso de la integral definida.
9	Método de la arandela.	Resuelve problemas que requieren del cálculo de volúmenes mediante el método de la arandela.
10	Aplicaciones de la integral definida.	Resuelve problemas que requieren la aplicación de la integral definida.

Para la aplicación de la variable independiente (Ingeniería Didáctica) en el grupo experimental, se estructuró el siguiente plan de actividades desarrollados durante el año 2021.

Tabla 14

Plan de actividades desarrollado en el grupo experimental

Actividad	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Análisis preliminar (dimensión epistemológica) • Análisis del contenido temático desde su raíz, problemas que dieron origen, modo de evolución y tiempo que tomó hasta que el concepto se formalizó.	X								
Análisis preliminar (dimensión cognitiva) • Recopilación y análisis de procedimientos que realizan los estudiantes en tópicos previos a la aplicación del instrumento. • Caracterización de las anomalías presentes en los procedimientos de los estudiantes.		X							
Análisis preliminar (dimensión didáctica) • Análisis del sistema de enseñanza de la UNCP (modelo educativo). • Selección de los recursos virtuales más adecuados para el desarrollo de las clases remotas. • Análisis del abordaje del tópico por parte de los libros de matemática superior, para una adecuada elección de la notación matemática a utilizar y para la determinación de la secuencia		X							
Análisis a priori • Diseño de la secuencia de actividades de clase en función al análisis preliminar.			X						
Elaboración de los manuales de clase para los grupos control y experimental.			X						
Ejecución de las sesiones planificadas en el análisis a priori.			X	X					
Análisis estadístico de los datos recopilados en la investigación					X	X	X		
Discusión de los datos y conclusiones								X	
Culminación del borrador de tesis									X

Análisis preliminares

Dimensión epistemológica

Artigue et al. (1995) caracterizan a esta dimensión como “asociada a las características del saber en juego” (p. 40). Además, a partir del ejemplo que cita Artigue, se puede inferir que consiste en analizar el contenido desde su esencia o raíz, para esto es factible apoyarse en la historia de la Matemática, de modo que se observe el proceso de cambio o evolución del concepto, el tiempo que pasó hasta que un concepto logró formalizarse, los problemas que originaron algún determinado concepto y quienes fueron partícipes de esto, sin otorgarle mayor importancia a los personajes respecto al concepto. Este análisis inicial es importante debido a que si no se le tiene en cuenta se pueden generar obstáculos epistemológicos que luego pueden traer problemas en la enseñanza.

Concepto de integral definida

Nueva visión de las Matemáticas

En referencia al siglo V a.C., Boyer (1991) afirma “nos referiremos a este periodo bajo el nombre de la ‘Época Heroica de la Matemática’, puesto que raramente antes ni después se ha enfrentado al hombre con problemas matemáticos de una importancia fundamental con tan pocas herramientas” (p. 95). Esta afirmación es realizada en relación a que Tales y Pitágoras con sus escuelas correspondientes (jónica y pitagórica) desarrollaron en ese momento una nueva mirada de la Matemática, pensando en cuestiones de la mente que van más allá de utilizar la Matemática solamente en cuestiones de uso práctico (cálculo de impuestos, medición de terrenos, entre otros), es decir, se inicia una visión de estudio interno (o intra-matemático) hacia la construcción y comprensión de estructuras pertenecientes a un todo, de modo que por un lado se encuentra la búsqueda de las demostraciones o pruebas de verdad de las afirmaciones matemáticas como también la resolución de problemas que dan una idea de Matemática relacionada más a la Filosofía que a vida ordinaria.

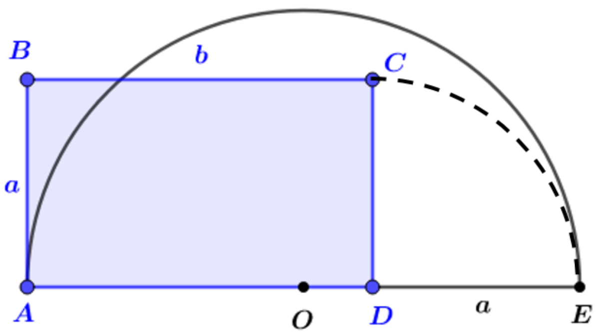
Las cuadraturas

Uno de los problemas a los cuáles se enfrentaron los griegos fue el de las cuadraturas, sobre su origen no hay certeza, pero posiblemente sean los pitagóricos quienes las hayan propuesto. Estos problemas consisten en construir un cuadrado que tenga igual área que otra figura dada previamente y que según Carrera (2012) Euclides en el libro I de los Elementos "instituye las bases para usar […] la regla y el compás en las construcciones" (p. 44). Euclides (325? - 265 a.C.) es conocido por sistematizar los conocimientos matemáticos logrados hasta su época en su obra "Los Elementos", la cual poseía varios libros, pero uno en especial dedicado al uso de la regla y compás.

Cuadrar un rectángulo no es muy complicado, aunque para la época significó un importante hallazgo, una manera de hacerlo es partir de los lados del rectángulo (a y b) y calcular geométricamente la media proporcional $\sqrt{ab}$. Entendiéndose que algunos procesos básicos con la regla y compás son el trazo de arcos de circunferencia a partir de un centro y un radio dados, ubicar el punto medio a partir de dos puntos dados, construir un polígono regular a partir de la medida de su lado, entre otros; un procedimiento para cuadrar un rectángulo consiste (como se puede ver en la figura 9) en partir del rectángulo $ABCD$ y trazar un arco de circunferencia en la prolongación de $\overline{AD}$ con centro en D y radio $\overline{DC}$, luego se ubica el punto O (punto medio de $\overline{AE}$) y se traza la semicircunferencia de centro en O y radio $\overline{AO}$, además es necesario tener en cuenta que por ser el punto medio del segmento que mide $a + b$, su radio medirá $\frac{a+b}{2}$.

Figura 10

Cuadratura del rectángulo, parte 1

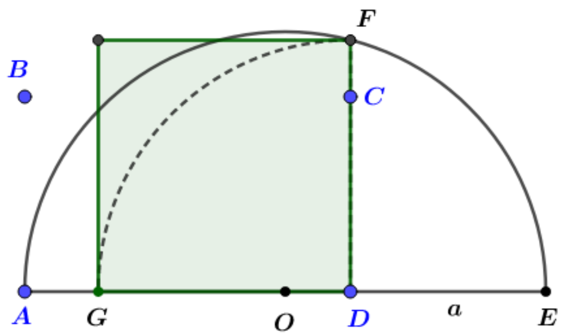


Nota. Elaborado en GeoGebra

Posteriormente, como se puede ver en la Figura 10 se prolonga el $\overline{DC}$ hasta intersecar a la circunferencia en el punto F, de modo que se verifica $DF^2 = DE \cdot AD$, es decir, $DF^2 = ab$, en consecuencia se habrá obtenido $DF = \sqrt{ab}$, luego se procede a construir un cuadrado cuyo lado mida DF.

Figura 11

Cuadratura del rectángulo – parte 2



Nota. Elaborado en GeoGebra

Finalmente se podrá comprobar que tanto el rectángulo como el cuadrado poseen el mismo valor de área, esto es muy útil debido a que, si es posible transformar cualquier región a un rectángulo, este rectángulo podrá ser transformado en un cuadrado y finalmente se habrá obtenido la cuadratura de dicha región.

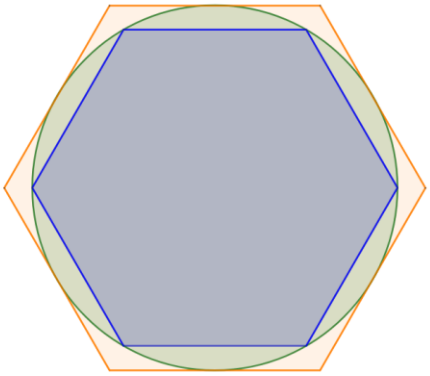
Método de exhaución o por agotamiento

De acuerdo con Boyer (1991) es posible que “el método de exhaución fue descubierto por Eudoxo” (p. 129); esto en función a una referencia hecha por Arquímedes que le atribuye, aunque indirectamente, este aporte. Como es conocido, Eudoxo (408? - 355? a.C) fue discípulo de Platón y se convirtió en un matemático famoso en su época.

Desde la época de los griegos existieron problemas que no lograron ser resueltos por los pitagóricos y transcurrieron siglos hasta que finalmente fueron resueltos (o se logró demostrar que no tenían solución), tal es el caso del problema clásico de la cuadratura de la circunferencia, según Boyer (1991) matemáticos griegos “habían sugerido ya que lo mejor que uno podía intentar era inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente" (p. 128), de modo que el área de la región circunscrita sería mayor a la región curvilínea y a su vez esta última sería mayor que el área de la región inscrita.

Figura 12

Polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia



Nota. Elaborado en GeoGebra

A partir de la Figura 12 se obtendrá una aproximación al valor del área de un círculo, ya que se observa que $\mathbb{A}_{polígono(circunscrito)} > \mathbb{A}_{o} > \mathbb{A}_{polígono(inscrito)}$ y mediante el uso de polígonos con 12 lados la aproximación será mejor, y si se sigue dicho proceso de duplicación de lados, se obtendrá cada vez una mejor aproximación. Como afirma Fernández (2012) el método de exhaución en esencia se divide en dos procesos:

- Agotamiento: se inscribe una figura poligonal en la superficie curvilínea hasta casi agotarla, o sea, hasta minimizar la superficie no cubierta.

- Compresión: se circunscribe una figura poligonal a la superficie curvilínea hasta minimizar el espacio excedido. (p. 81)

Además, este método tiene la característica de buscar la mayor aproximación posible, de modo que una vez se haya aproximado lo suficiente ya se puede proponer un valor exacto y hacer las evaluaciones matemáticas necesarias para determinar la validez del valor propuesto; y este fue el gran aporte de Arquímedes (287? - 212? a.C.)

a través de una doble reducción al absurdo. Fernández (2012) menciona que los pasos lógicos serían:

- Sea S el área a calcular de la superficie curva.
- Se propone (puede ser por ensayo y error) un valor T para el área de la curva.
- Hay que demostrar que $S = T$.
- Primero se prueba que no puede ser $S < T$.
- Luego se prueba que no puede ser $S > T$.
- Como S no puede ser mayor ni menor que T, entonces $S = T$. (p. 82)

Un resultado importante que obtuvo Arquímedes, mediante el método de exhaución, fue el de la cuadratura del segmento parabólico, es decir, determinó el área de la región determinada por una parábola y una secante a la misma.

Figura 13

Cuadratura del segmento de parábola

Nota. Elaborado en GeoGebra

Arquímedes demostró que el área de un segmento parabólico era igual a $\frac{4}{3}$ del triángulo de mayor tamaño (gris), para ello probó que la suma de las áreas de las regiones limitadas por los triángulos de rojo eran igual a la cuarta parte del área de la región gris ($\mathbb{G}$), probó también que la suma de las áreas de las regiones de verde limitaban una región cuya área era la cuarta parte de la suma de las áreas de las regiones de rojo y prosiguió de esa manera, llegando a la conclusión que, en términos del Álgebra actual, se reduce a la siguiente igualdad:

$$\mathbb{A}_{segmento(parabólico)} = \mathbb{G} + \frac{\mathbb{G}}{4} + \frac{\mathbb{G}}{16} + \frac{\mathbb{G}}{64} + \cdots = \frac{4}{3}\mathbb{G}$$

Pero Arquímedes lo hizo con la doble reducción al absurdo, debido a que para la época en la que trabajó este problema no se tenía idea de series geométricas infinitas que se utilizan en el Álgebra actual. Por otro lado, el segmento parabólico representó un logro notable en el descubrimiento de las cuadraturas, pero, sin quitar el mérito que corresponde, no deja de ser un caso particular, de manera que aún no se había encontrado una solución general al problema, es decir, determinar el área de una región que tenga al menos un lado que sea una curva cualquiera. Esto se traduciría en un nuevo problema clásico, junto al problema de determinar la pendiente de cualquier recta tangente a una curva en un punto arbitrario. Estos dos problemas clásicos serían abordados por diferentes matemáticos de las postrimerías.

Un cambio de mirada

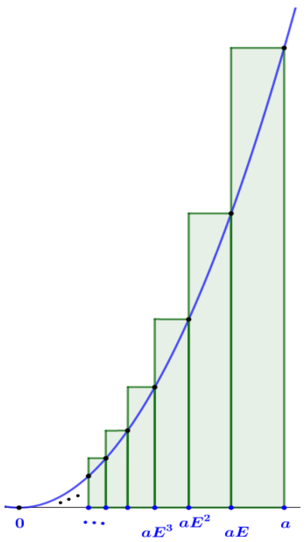
Siglos más adelante, como menciona Boyer (1991) “fue Francia el centro indiscutido del mundo matemático durante el segundo tercio del siglo XVII. Las dos figuras más importantes fueron René Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665)” (p. 423). En cuanto a Descartes se hace necesario mencionar el aporte de la traducción de las operaciones y objetos algebraicos (operaciones algebraicas, ecuaciones, restricciones, entre otros) al lenguaje de la Geometría (segmentos, rectas, cónicas), también se rescata el uso de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes (a, b, c, …) mientras que las últimas (x, y, z), para las variables. Esto le daría una nueva visión al problema de la cuadratura, ya que ahora ‘cualquier curva’ estaría definida por una ecuación algebraica.

Por su parte, como afirma Boyer (1991) “es muy posible que Fermat estuviera ya en posesión de su geometría analítica en una fecha como el año 1629” (p. 439), lo cual se traduciría en que posiblemente haya logrado acceder antes que Descartes a un sistema de coordenadas, pero no se tiene evidencia de la existencia de publicaciones anteriores a Descartes. Si bien es cierto, tanto Descartes como Fermat consideraban solo abscisas y ordenadas positivas y no los valores con signo negativo en cada uno de los ejes, pero a pesar de dicho aspecto de ‘no completitud’, el aporte brindado por Fermat y Descartes significó una nueva mirada al problema general de la cuadratura, es decir, se tendría un nuevo posible camino para hacer frente al problema del cálculo del área bajo una curva.

Fermat intentó de forma creativa este asunto y se aproximó de manera notable a este método general de una forma similar a la siguiente: dada la curva $y = x^n$ definida entre $x = 0$ y $x = a$, se generan infinitos subintervalos a partir de los puntos que poseen como abscisas $a, aE, aE^2, aE^3, \ldots$ de modo que $0 < E < 1$ y mediante una aproximación por rectángulos circunscritos se aproxima al área bajo la curva.

Figura 14

Cuadratura del segmento de parábola



Nota. Elaborado en GeoGebra

Entonces el área de los rectángulos circunscritos de la figura se expresaría, algebraicamente, de la siguiente manera:

$$\mathbb{A}_{circunscrita} = a^n(a - aE) + a^nE^n(aE - aE^2) + a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3) + \cdots$$

Se puede notar que, mientras el valor de E sea más próximo a 1, mejor será la aproximación al área bajo la curva. Además, al operar la expresión $\mathbb{A}$, se tendrá:

$$\mathbb{A}_{circunscrita} = a^{n+1}(1 - E) + a^{n+1}(1 - E)E^{n+1} + a^{n+1}(1 - E)E^{2n+2} + \cdots$$

$$\mathbb{A}_{circunscrita} = a^{n+1}(1 - E)(1 + E^{n+1} + E^{2n+2} + \cdots)$$

Debido a que la suma $1 + E^{n+1} + E^{2n+2} + \cdots$ es una serie geométrica infinita de razón menor a 1, se tendrá:

$$\mathbb{A}_{circunscrita} = \frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 + \cdots E^n}$$

Según Boyer (1991) "Fermat no disponía del concepto de límite" (p. 440), al menos no de manera formal, sin embargo, de manera implícita utilizó dicho concepto al reemplazar el valor de $E = 1$, de modo que el área bajo la curva sería exactamente $\mathbb{A} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, lo cual se conoce, en notación actual, como $\int_0^a x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^a$

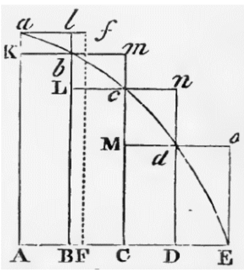
El descubrimiento y formalización

Varios matemáticos de forma individual, colaborativa o incluso con diferencias personales (como de Descartes hacia Fermat) aportaron en alguna medida al cálculo del área bajo la curva y es quizá Fermat quien estuvo más cerca de lograrlo. Según Areán (2012) "Años después -y en parte gracias a los trabajos de Fermat- Leibniz y Newton darían independientemente con las ideas centrales del cálculo: el uso de infinitésimos" (p. 133); aunque con disputas entre ambos por tal descubrimiento, se le ha atribuido a Newton (1643 - 1727) como principal descubridor del Cálculo, según Durán (2012) "Newton llamaba 'cálculo fluxional' a lo que nosotros conocemos como 'cálculo de derivadas' ´'cálculo diferencial' […]. Para Newton, el cálculo integral era el inverso del fluxional y nunca le llegó a asignar un nombre propio" (p. 88). Esto último lleva a inferir que Newton trabajó con énfasis principal en el cálculo diferencial, puesto que también al referirse a los rectángulos inscritos y circunscritos lo hace desde una mirada del cálculo de la longitud de la curva y de la pendiente de las rectas tangentes en el Lema II de su libro I, y es en la explicación posterior a dicho Lema donde Newton (1729) afirma:

> For the difference of the inscribed and circumscribed figures is the sum of the parallelograms K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, that is (from the equality of all their bases), the rectangle under one of their bases K*b* and the sum of their altitudes A*a*, that is, the rectangle AB*la*. But this rectangle, because its breadth AB is supposed diminished-in infinitum, becomes less than any given space. And therefore (by Lem. I) the figures inscribed and circumscribed become ultimately equal one to the other; and much more will the intermediate curvilinear figure be ultimately equal to either. (p. 95)

Figura 15

Representación del Lema II de la sección I de Of The Motion of Bodies



Nota. Imagen recopilada de Newton (1729). *Philosophiae naturalis principia mathematica (Traducción del latín al inglés americano).*

De la cita se puede inferir que la diferencia entre las áreas de los rectángulos circunscritos e inscritos es igual a la suma de las áreas de los rectángulos cuyas diagonales son K*l*, L*m*, M*n* y D*o*. Pero el ancho AB (constante) de todos los rectángulos, al ser disminuido de tamaño hasta un tamaño infinitamente pequeño genera que el área de las figuras inscritas y circunscritas sean finalmente iguales entre sí; en consecuencia, dicho valor será el valor del área limitada por la figura curvilínea, A*a* y AE. Actualmente son más conocidos los términos Suma Inferior y Suma Superior en lugar de rectángulos inscritos y circunscritos.

Durán (2012) menciona que Newton "acuñó el concepto de fluxión -parecido al de derivada- y mostró que, por ejemplo, para calcular el área que encierra una curva bastaba con calcular la fluente (el análogo newtoniano a nuestras actuales funciones), es decir, hallar su integral". (p. 92). Los términos usados por Newton, así como su simbolización fue diferente a la que usamos actualmente, ya que estos están en mayor concordancia con la propuesta de Leibniz (1646 - 1716), desde aspectos básicos como el " $\cdot$ " en lugar del "$\times$" para la multiplicación, ya que podría confundirse con la variable x; también propuso que para efectos de expresar la división de dos números, $a:b$ era mejor que $\frac{a}{b}$. Según Durán (2012) Leibniz fue "la primera persona en utilizar la palabra función en sus escritos […]. Respecto a la notación del cálculo, Leibniz comenzó utilizando la abreviatura omn para el cálculo del área, es decir, la integral" (p. 132). Años después se notaría que 'omn' sería reemplazado en los escritos de Leibniz por el símbolo $\int$; Además Durán (2012) afirma "que omn aumentaba su valor, ya que se sumaba, y su operación inversa, la derivada, debía disminuir. […] por eso para esa segunda operación utilizó la d de diferencia" (p. 132) con el término 'omn' se hace referencia a omnia líneas (todas las líneas), entendiéndose desde la propuesta de Leibniz que el área bajo una figura es la suma de todas las líneas que son rectángulos de ancho indivisible (similar a líneas); Durán (2012) afirma sobre Leibniz que, "en su primer artículo sobre el cálculo de 1684 ya aparecía la d para indicar diferenciación, y en el segundo de 1686 ya aparecía el símbolo $\int$ e incluso aparecía dx dentro de la integral" (p. 132). Es notable la búsqueda de la elegancia y/o precisión de Leibniz al momento de realizar las notaciones.

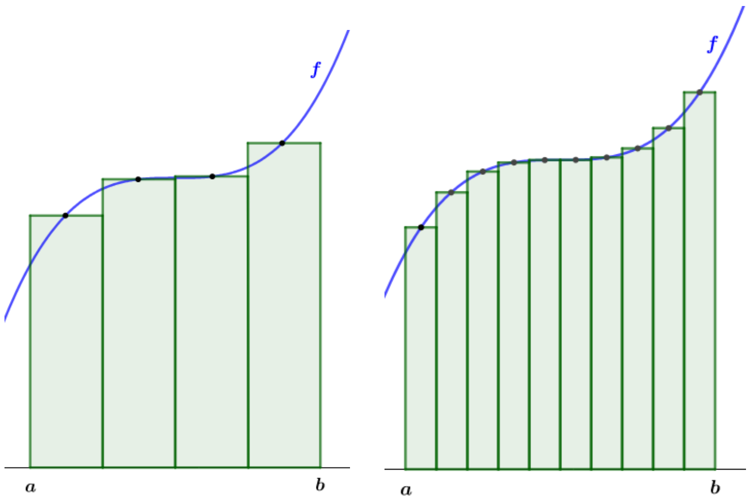
Es reconocible que, como afirma Muñóz (2013):

> Newton y Leibniz dieron el salto cualitativo en la creación del cálculo con dos aspectos fundamentales. En primer lugar, dieron con un método que era general, que se podía aplicar a cualquier tipo de problema. En segundo lugar, pusieron de manifiesto que los problemas de tangentes y de cuadraturas eran inversos […]. Ese resultado es lo que se conoce como teorema fundamental del cálculo. (p. 98)

Además, este segundo aspecto ayuda a tener en cuenta que el área bajo una curva puede expresarse como una función, dejando de alguna manera, el carácter geométrico del área por un modelo matemático que lo representaba. Algunos años después Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) daría algunas precisiones importantes, ya que la integración se había aceptado como una operación inversa a la diferenciación, según Boyer (1991) "la definición de Cauchy de la derivada mostraba claramente que no existiría la derivada en un punto anguloso de la curva o en un punto en que la función fuese discontinua, mientras que la integral podría no ofrecer dificultad alguna" (p. 648). Es decir, es equivalente afirmar que curvas discontinuas pueden determinar el área de una región, pero no son derivables en todos sus puntos, esto sucede también en el caso de las funciones continuas que no son derivables. Con esta precisión, Cauchy le devolvía el carácter geométrico a la integral como límite de sumas, pero se generaba ahora la duda de la relación de la integral con la antiderivada, lo cual pudo en poco tiempo explicar a través del teorema del valor medio para derivadas. De algún modo, Cauchy modificó la idea de Newton y Leibniz al realizar el cambio de los anchos de los rectángulos, en lugar de dx considerar únicamente anchos pequeños (pero no infinitamente), la idea general permanecía, ya que al tener anchos cada vez más pequeños el número de rectángulos aumentaba y el área tendría mejor aproximación.

Figura 16

Aproximación al área con incremento de rectángulos de menor ancho

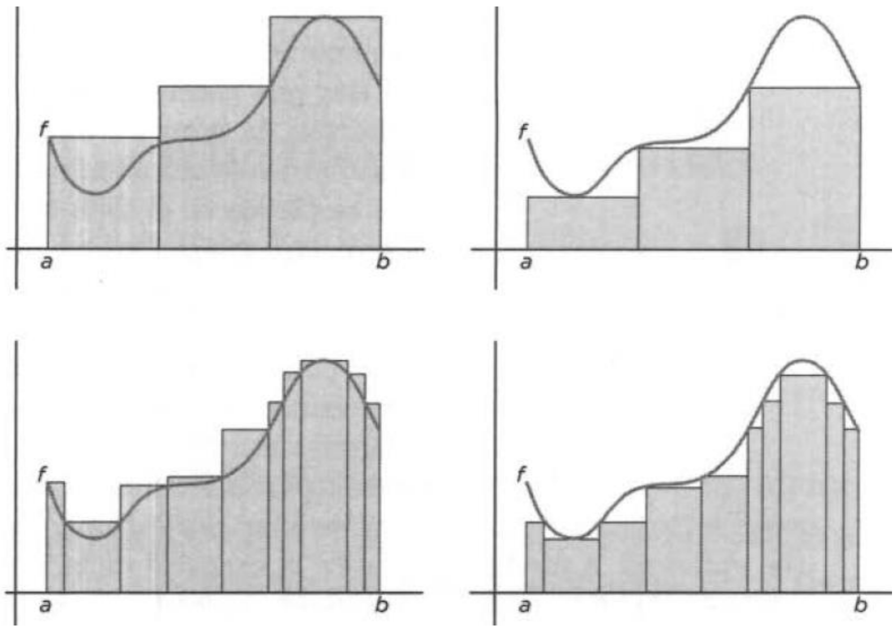


Nota. Elaborado en GeoGebra

Si bien Cauchy suponía que la discontinuidad podría no ofrecer problemas en la integración concebida hasta él, Piñeiro (2014) menciona que "la idea de Cauchy comparte con la de Newton y Leibniz un importante 'punto débil', que ninguno de los tres consideraba que pudieran existir funciones discontinuas, y es por este motivo que cuando Dirichlet las introdujo en 1829, la integral de Cauchy quedó, en gran medida, obsoleta" (p. 103). En esta parte se entiende que la idea de discontinuidad vista por Cauchy fue relacionada a las derivadas y en cuanto a la integración solamente suponía que no generaría dificultad, pero Dirichlet hizo notar lo contrario y se tendría que esperar algunos años más hasta que, el alumno de Gauss, Bernhard Riemann (1826 - 1866) propondría una definición de integral que tenía sentido aun cuando la función tenga discontinuidades. Riemann consideraría también aproximaciones sucesivas, pero planteó el uso de dos familias de rectángulos (una por defecto y otra por exceso), de modo que según los rectángulos van reduciendo su ancho, las dos aproximaciones se acercan cada vez más al valor del área buscada.

Figura 17

Propuesta de Riemann



Nota. Imagen recopilada de Piñeiro, G. (2014). *Riemann. La geometría traspasa fronteras*. (p. 106)

Como se visualiza, Riemann habría tenido muy en cuenta la propuesta de exhaución o agotamiento de Eudoxo, desarrollada por Arquímedes y los matemáticos posteriores, de modo que el concepto de integral se encontraría formalizado en términos de Riemann. Según afirma Piñeiro (2014) la definición de Riemann es “la que hoy en día se usa en todas las aplicaciones prácticas, tanto en física como en ingeniería, tiene sentido y da el valor correcto del área aun cuando la función tenga ‘saltos’” (p. 108).

Dimensión cognitiva

Artigue et al. (1995) caracterizan a esta dimensión como “asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza” (p. 40). Es decir, a qué grupo de estudiantes va a dirigirse la enseñanza, para ello se analizan los procedimientos que hacen previamente los estudiantes, las posibles fortalezas y debilidades procedimentales, de representación, entre otros, de modo que luego se decide qué partes del contenido se deben o no incluir en el proceso de enseñanza; se trata de una descripción al detalle de los estudiantes que serán parte de la clase. A esta dimensión también puede considerarse, según Artigue et al. (1995), como “un análisis detallado de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y de los errores más frecuentes” (p. 42).

Este proceso se realizó durante 3 semanas en el periodo previo a la ejecución del proyecto de investigación, de modo que se analizó el procedimiento de los estudiantes en los siguientes tópicos:

Tabla 15

Tópicos en los que se analizó el procedimiento del grupo experimental

Número	Tema desarrollado
1	Antiderivada. Antiderivada general. Integral indefinida. Fórmulas de integración.
2	Integración por sustitución. Integración de funciones trigonométricas.
3	Fracción algebraica. Fracciones parciales. Integración de funciones racionales.

Durante el desarrollo de cada tópico o tema se asignaron actividades a los estudiantes, de modo que durante el primer tópico se asignó el ejercicio 1 en el que, de acuerdo a lo desarrollado en clase, los estudiantes debían utilizar solo los conocimientos de derivadas para, posteriormente, comprender la relación con las integrales indefinidas. Por cuestiones prácticas, los estudiantes del grupo experimental serán codificados mediante EST01, EST02, EST03, …, EST13.

Figura 18

Ejercicio 1 del tópico 1

Ejercicio 01. Determine las antiderivadas generales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3}{5}x$

b) $g(x) = 7x^2 + 3$

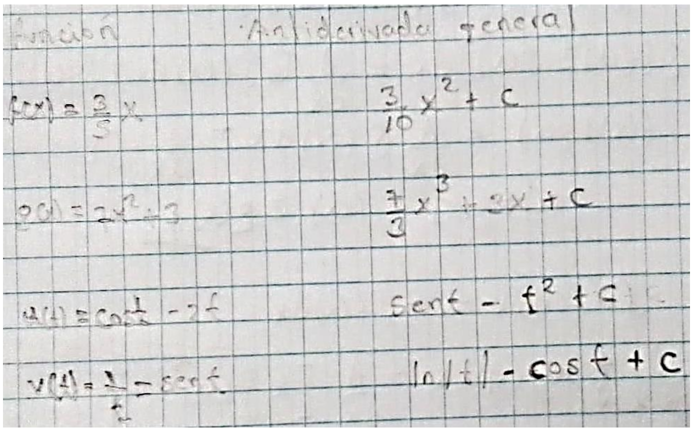
c) $u(t) = \cos t - 2t$

d) $v(t) = \frac{1}{t} - \operatorname{sen} t$

EST02, EST06, EST07, EST08, EST12 y EST13 presentaron de forma correcta sus resultados, aunque en el inciso ‘d’ EST06 utilizó de forma incorrecta el signo de igualdad en el enunciado, posiblemente se deba a un error en la transcripción del ejercicio, ello conllevó a un error en el signo del coseno en el resultado; por su parte EST13 en el inciso ‘a’ se distingue que tuvo la intención del uso del concepto de integral indefinida y en el inciso ‘d’ no consideró el valor absoluto en el argumento del logaritmo natural.

Figura 19

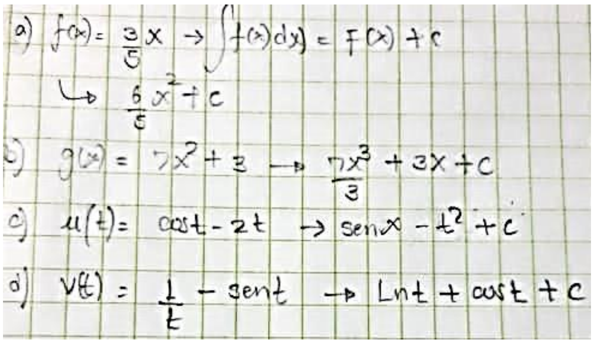
Resolución de EST06



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 20

Resolución de EST13

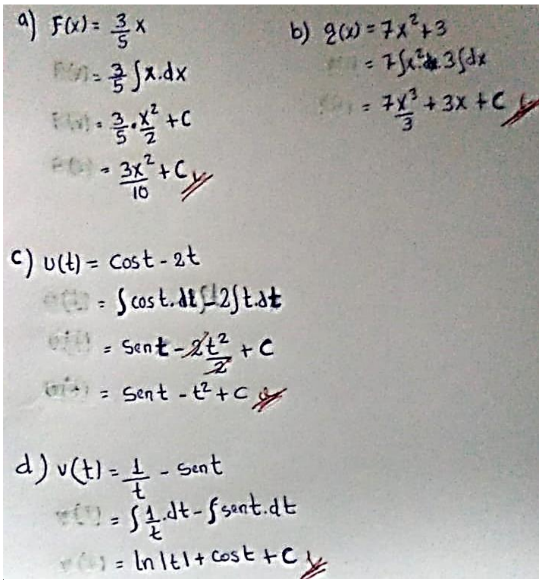


Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST01, EST04, EST09, EST10 y EST11 no presentaron la resolución del ejercicio 1. EST03 usó una fórmula de la integral indefinida y no lo que se solicitó, a lo cual indicó que fue por un video tutorial, también no se distingue el uso claro de las mayúsculas para representar la antiderivada, EST05 intentó de acuerdo a lo solicitado pero derivó las funciones en lugar de buscar la antiderivada que es el proceso inverso.

Figura 21

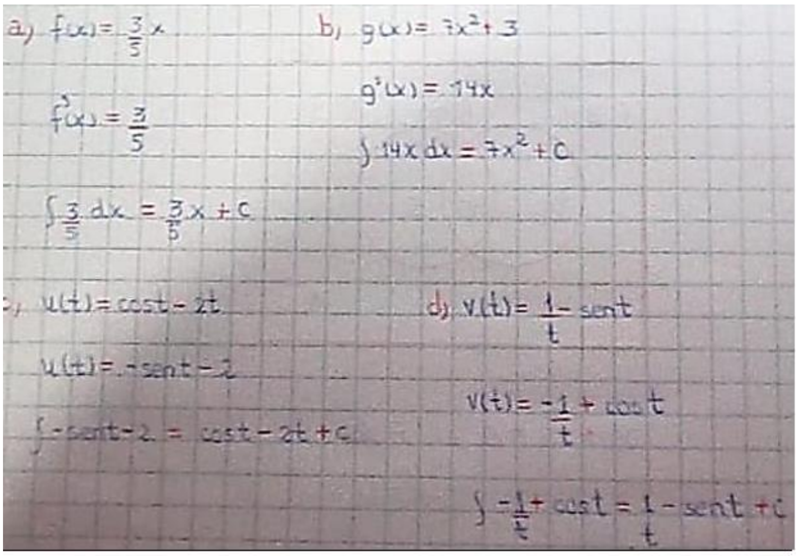
Resolución de EST03



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 22

Resolución de EST05



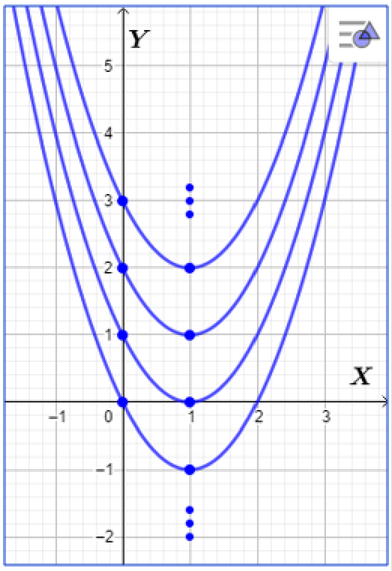
Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 23

Ejercicio 2 del tópico 1

Ejercicio 02. A continuación, se muestra la gráfica de una familia de funciones cuadráticas.

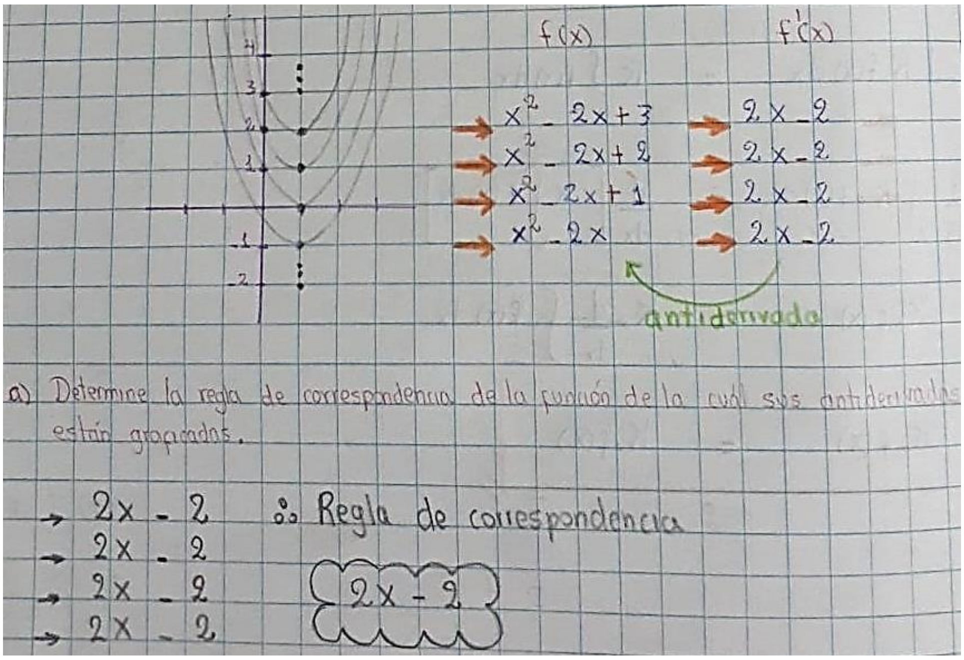
a) Determine la regla de correspondencia de la función de la cuál sus antiderivadas están graficadas.
b) Las antiderivadas de las funciones graficadas, ¿qué tipo de funciones serán?



EST02, EST03, EST05, EST08, EST12 presentaron de forma correcta sus resultados.

Figura 24

Parte de la resolución de EST12

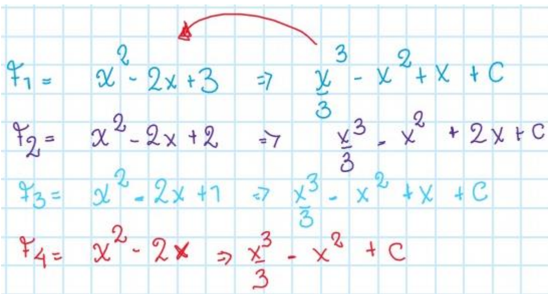


Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST01, EST04, EST06, EST09, EST10 y EST11 no presentaron la resolución del ejercicio 2. Por su parte EST07 presentó solamente la resolución del inciso ‘b’, mientras que EST13 solo determinó las reglas de correspondencia de las funciones graficadas y con ello no respondió a ninguno de los incisos.

Figura 25

Resolución de EST07



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 26

Resolución de EST13

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$
$$f(x) = (x-1)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = (x-1)^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$$
$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 27

Ejercicio 1 del tópico 2

Ejercicio 01. Determine las siguientes integrales.

a) $\int \sec^2 x \cdot \tan^2 x \, dx$

b) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

c) $\int \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2^{x^3 - x} \, dx$

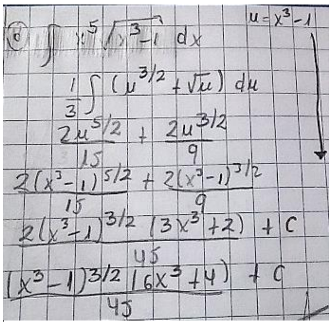
d) $\int x^5 \cdot \sqrt{x^3 - 1} \, dx$

EST02, EST03, EST04, EST05, EST06, EST09, EST10, EST11 y EST12 no presentaron la resolución de los ejercicios asignados, sin embargo, EST08 y EST13 presentaron la resolución de los ejercicios trabajados en la clase mencionando que entendieron de esa manera.

EST01 resolvió correctamente los incisos ‘a’ y ‘b’ y no presentó solamente el inciso ‘c’, además en la resolución del inciso ‘d’ calculó bien el valor de la integral solicitada, pero al expresar los exponentes fraccionarios como radicales olvidó colocar el signo de la operación de adición que se estaba efectuando, generando únicamente la falta de ese signo en su resultado final; EST07 resolvió correctamente todos los ítems, aunque en el inciso ‘b’ agregó valor absoluto al argumento de logaritmo natural, el cual no era necesario, ya que en el mismo ejercicio aparece el argumento x y eso garantiza el valor positivo del argumento; EST10 presentó únicamente la resolución del inciso ‘c’ con el detalle de haber agregado el valor absoluto al argumento 2 del logaritmo natural, pero el 2 al ser un valor constante positivo ya no es necesario agregar el valor absoluto, además el diferencial de u no está bien calculado al inicio.

Figura 28

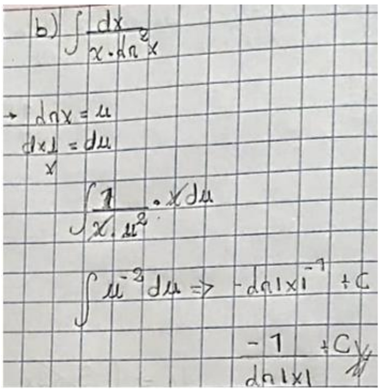
Resolución de EST01



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 29

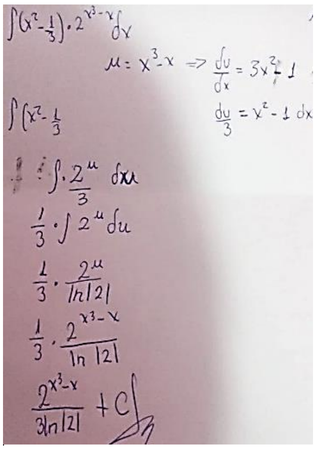
Resolución de EST07



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 30

Resolución de EST10



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 31

Ejercicio 2 del tópico 2

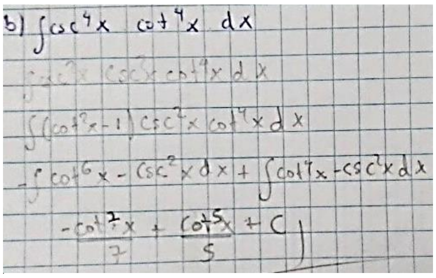
Ejercicio 02. Determine el valor de las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen}^6(3x)\,dx$ b) $\int \csc^4 x \cdot \cot^4 x\,dx$

EST06 resolvió bien el inciso ‘a’, pero en el inciso ‘b’ se distingue un error en la distribución de factores. En caso de EST08 también resolvió bien el inciso ‘a’, pero en la ‘b’ no utilizó adecuadamente los paréntesis y hay algunos procedimientos que olvidó copiar de su hoja de intentos a su hoja de presentación formal. EST12 resolvió bien el inciso ‘a’, pero en la ‘b’ no usó el paréntesis en algunos procesos, aunque es un procedimiento completo. EST13 presentó solamente el inciso ‘a’ y lo resolvió bien.

Figura 32

Resolución de EST06



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

Figura 33

Resolución de EST08

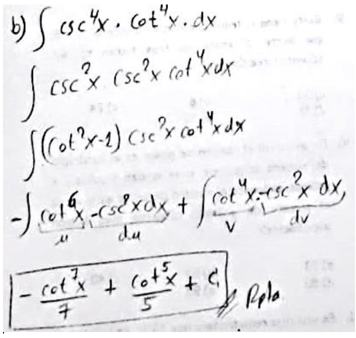
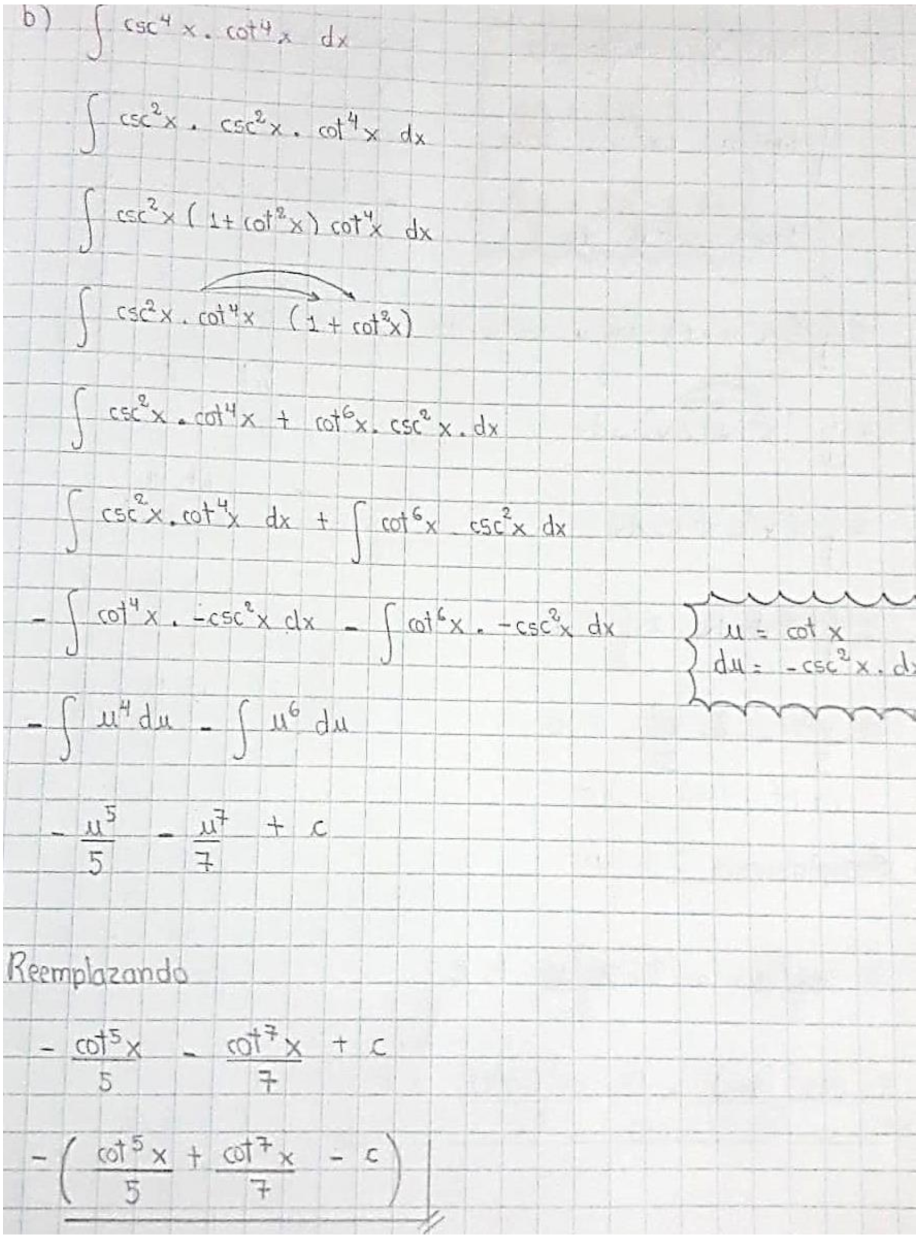


Figura 34

Resolución de EST12



b) $\int \csc^4 x \cdot \cot^4 x \; dx$

$\int \csc^2 x \cdot \csc^2 x \cdot \cot^4 x \; dx$

$\int \csc^2 x \,(1+\cot^2 x)\, \cot^4 x \; dx$

$\int \csc^2 x \cdot \cot^4 x \; (1+\cot^2 x)$

$\int \csc^2 x \cdot \cot^4 x + \cot^6 x \cdot \csc^2 x \cdot dx$

$\int \csc^2 x \cdot \cot^4 x \; dx + \int \cot^6 x \; \csc^2 x \; dx$

$-\int \cot^4 x \cdot -\csc^2 x \; dx - \int \cot^6 x \cdot -\csc^2 x \; dx$

$u = \cot x$

$du = -\csc^2 x \cdot dx$

$-\int u^4 \, du - \int u^6 \, du$

$-\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{u^7}{7} + c$

Reemplazando

$-\dfrac{\cot^5 x}{5} - \dfrac{\cot^7 x}{7} + c$

$-\left(\dfrac{\cot^5 x}{5} + \dfrac{\cot^7 x}{7} - c\right)$

EST02, EST03, EST04, EST05, EST07 y EST11 no presentaron la resolución de esta actividad. Además, EST01, EST09 y EST10 presentaron lo trabajado en clase mencionando que eso entendieron como indicación.

Figura 35

Ejercicio 1 del tópico 3

Ejercicio 01. Exprese como la suma de fracciones parciales cada una de las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+4}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{4}{3x^2+2x-1}$

c) $\dfrac{2x+7}{x^3+4x^2+x-6}$

d) $\dfrac{-2x}{x^3-x^2-x+1}$

e) $\dfrac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}$

f) $\dfrac{x^2-x-5}{x^3+x^2-2}$

EST02 presentó con un procedimiento correcto los incisos desde ‘a’ hasta ‘d’, el inciso ‘f’ no presentó y en el inciso ‘e’ cometió un error al dar el valor a $x = 2$, el valor que ya había obtenido para C olvidó multiplicarlo por 2.

Figura 36

Resolución de EST02

$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x^2-x+1 = A(x-1)^2 + B(x-1)x + Cx$$

$x=0 \quad 1 = A + 0 + 0 \Rightarrow A = 1$

$x=1 \quad 1 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 1$

$x=2 \quad 3 = \underset{1}{A} + 2B + 2\underset{1}{C} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

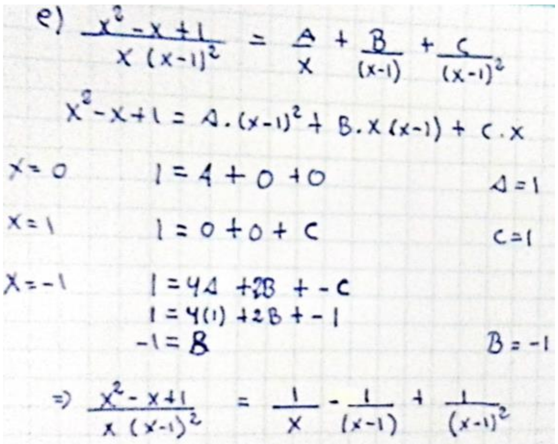
$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST01, EST03, EST05, EST09 y EST11 no enviaron la resolución de esta actividad al docente. EST04 presentó todos los incisos de este ejercicio y cometió únicamente una equivocación en el inciso ‘e’, debido a que al evaluar el valor $x = -1$ obtuvo 1 cuando debió obtener 3, es decir, se trató de un error operativo al igual que EST02, ya que EST04 en este inciso y en los demás ha utilizado correctamente los casos de separación en fracciones parciales desarrollados en clase, se puso énfasis en la revisión del estudiante porque es su primera actividad presentada en los 3 tópicos desarrollados.

Figura 37

Resolución de EST04

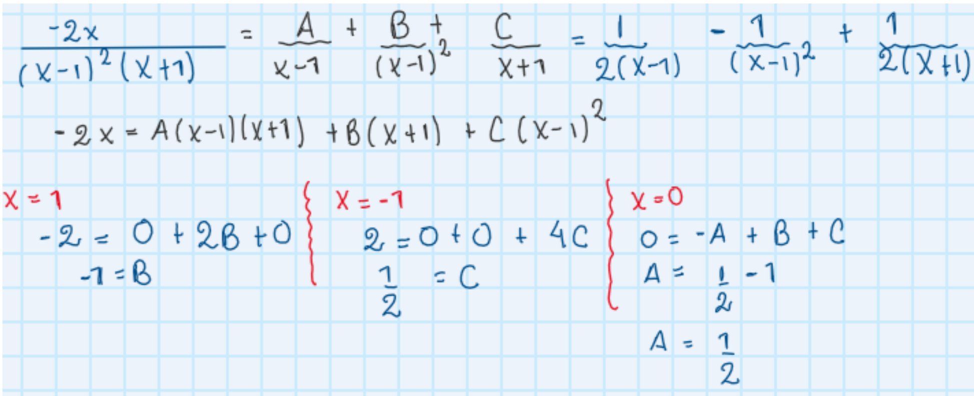


Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST06 presentó solamente los incisos ‘a’ y ‘b’ y los resolvió correctamente. EST07 presentó todos los incisos, de los cuales solo en el inciso ‘d’ cometió un error ya que al evaluar $x = 0$ debió obtener $-\frac{1}{2}$ y olvidó colocar el signo en el resultado, de modo que su expresión en fracciones parciales se vio afectada por ese detalle.

Figura 38

Resolución de EST07

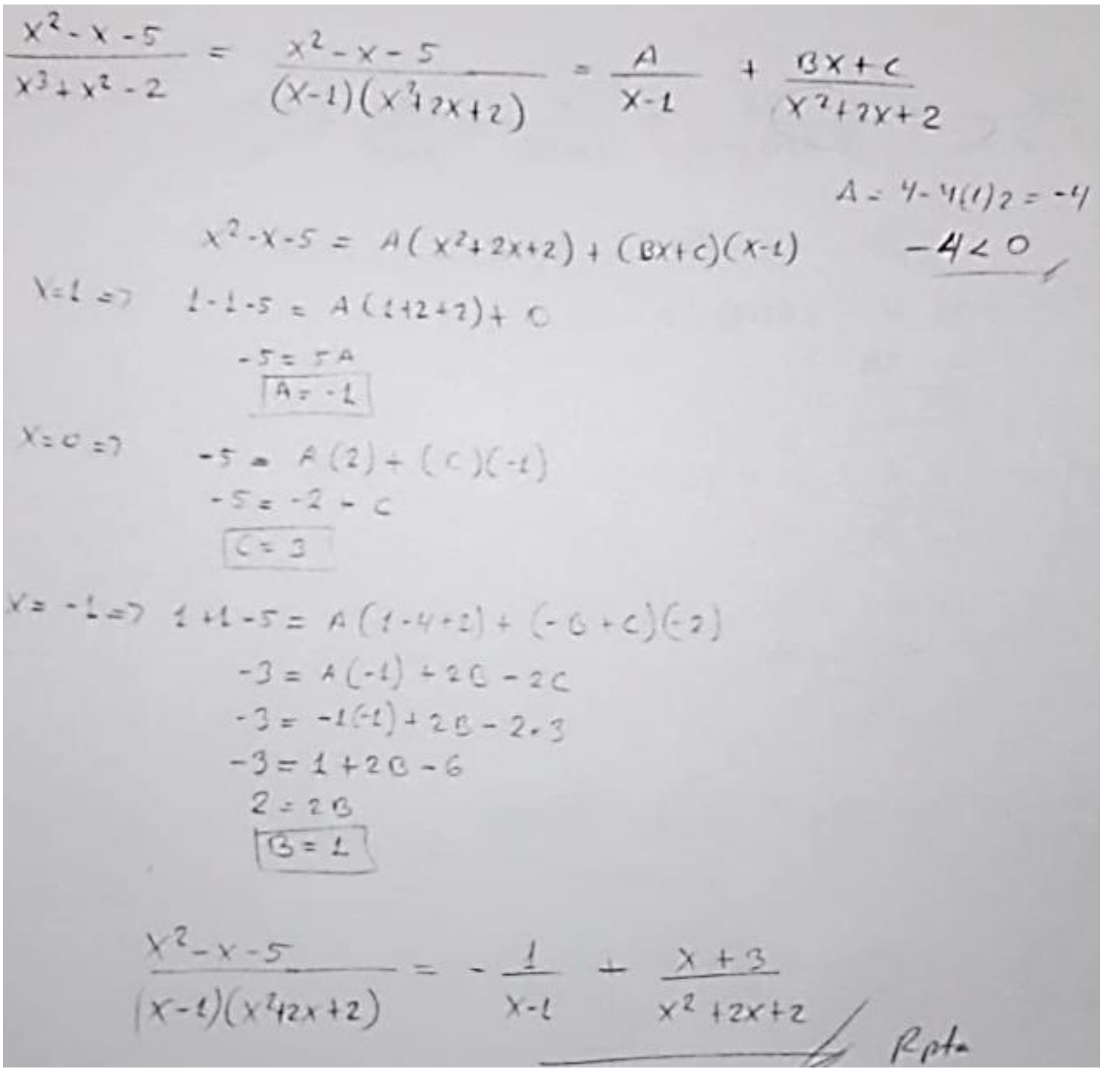


Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST08 presentó la resolución de todos los ejercicios y solamente en el inciso ‘f’ cometió un error operativo ya que al evaluar con $x = -1$ el valor que multiplica al parámetro A debió ser $(1 - 2 + 2)$ pero colocó $(1 - 4 + 2)$, generando un valor incorrecto para A al resolver la ecuación generada.

Figura 39

Resolución de EST08

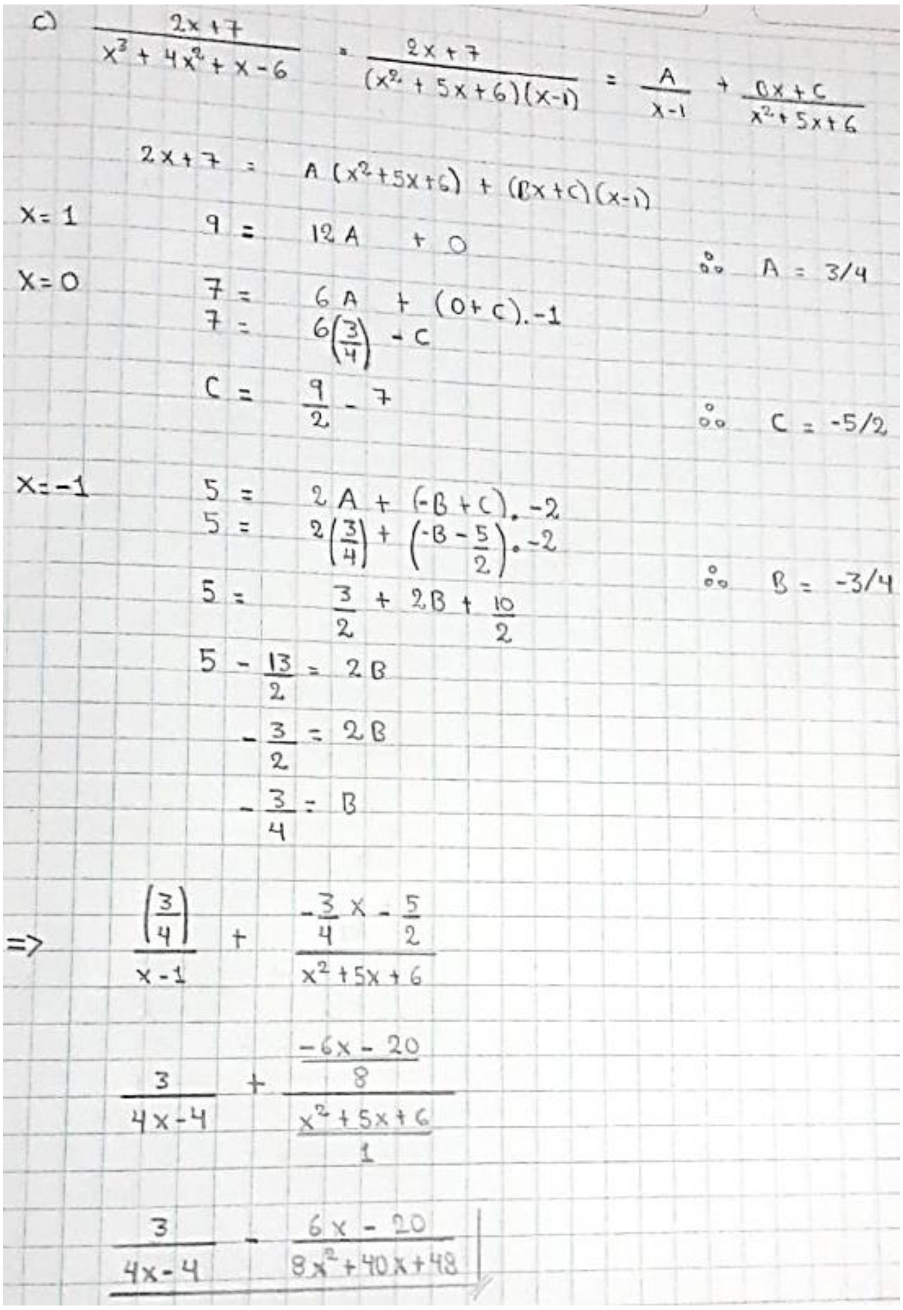


Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST10 presentó solamente la resolución de los incisos ‘a’ y ‘b’ y los presentó correctamente resueltos mencionando que no le alcanzó el tiempo para los demás incisos. EST12 presentó todos los incisos y solamente cometió un error en el inciso ‘c’ debido a que al factorizar el denominador obtuvo como un factor a $(x^2 + 5x + 6)$, el cual todavía debió ser factorizado como $(x + 2)(x + 3)$ y correspondería al primer caso de separación en fracciones parciales cuando solamente existen factores primos lineales en denominador, pero es un caso diferente cuando existe al menos un factor primero cuadrático.

Figura 40

Resolución de EST12



Nota. Imagen recuperada de WhatsApp

EST13 presentó la resolución de los incisos desde la ‘a’ hasta la ‘d’ y todos correctamente resueltos.

En función al análisis realizado en los procedimientos presentados por los estudiantes se pudo determinar que todos están aptos para el desarrollo de la temática planteada, sin embargo, hay errores poco frecuentes pero que son necesarios caracterizarlos:

- Errores del tipo operativo, principalmente en ejercicios que demandan procedimientos largos, se tratan de errores usuales con los signos, algunos errores de cálculo operativo, entre otros.

- Errores de fuente consultada, principalmente porque acceden a fuentes de internet que no necesariamente siguen una secuencia de contenidos temáticos organizados para un curso de Análisis Matemático II cuya finalidad es la formación de futuros docentes de Matemática.

- Errores de tipo instructivo, principalmente porque las instrucciones se daban de manera oral a través de Microsoft Teams y, quienes no asistían a las sesiones a veces no revisaban la grabación de la clase y solo asumían como verdad lo comunicado por sus demás compañeros.

- Errores de representación, por ejemplo, un estudiante representó de la misma manera a la regla de correspondencia de una función y a la regla de correspondencia de su derivada.

- Errores de comprensión conceptual, por ejemplo, el interpretar la derivada como proceso a realizar cuando se solicita la antiderivada, también el considerar a un factor cuadrático factorizable como factor primo.

En relación a ello se tomó las siguientes decisiones:

- Plantear ejercicios que eviten procedimientos engorrosos y, si son necesarios este tipo de ejercicios, validar los procedimientos de los estudiantes si solo presentan errores operativos mínimos, ya que son usuales incluso en los docentes.

- Utilizar al menos dos colores en la resolución de ejercicios, con la finalidad de que distingan las operaciones de los alores numéricos y por cuestiones de orden.

- Sensibilizar de forma continua al uso de fuentes confiables por parte de los estudiantes, entre ellos algunos libros virtuales de diversos repositorios y bibliotecas virtuales.

- Redactar, en la parte final del material de clase, las instrucciones sobre las actividades adicionales que los estudiantes deben realizar; esto con la finalidad de evitar confusiones en la consigna dada o que los estudiantes presenten otros ejercicios diferentes a los solicitados.

- De forma posterior a las resoluciones enviadas por los estudiantes, retroalimentar de forma general sobre algunos errores de representación que se cometieron en dichas resoluciones.

- Como función del docente se debe plantear preguntas, resolver ejercicios y elaborar asignaciones que hagan incidencia principalmente en una adecuada representación, la comprensión de conceptos y la formación de proposiciones y, en la medida de lo posible, evitar la priorización del uso de algoritmos.

Dimensión didáctica

Artigue et al. (1995) caracterizan a esta dimensión como "asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza" (p. 40). Es decir, se analiza cómo se desarrollará el proceso de enseñanza, partiendo del concepto, por ejemplo, el sistema educativo en el cual está inmerso un país o, en particular, una institución educativa, también los libros o materiales que se utilizan para la enseñanza del contenido, los programas de una institución o del docente, se mira la enseñanza del tema en el nivel en el que uno esté pensando realizarla (educación básica, educación superior, entre otros). Si bien es cierto, la Ingeniería Didáctica surge con una teoría de base para el desarrollo de las actividades de la clase, la cual es la Teoría de Situaciones, Artigue et al. (1995) menciona que "no se enfatiza un cuadro teórico general" (p. 41), lo cual implica que es necesaria una teoría, pero no una en específica.

Análisis del sistema de enseñanza de la UNCP (modelo educativo)

De acuerdo con la Dirección de Gestión e Innovación Académica (2021) el modelo educativo de la Universidad Nacional del Centro del Perú orienta a la universidad a tener "como norte la producción del conocimiento científico, tecnológico, humanístico y social […] al servicio del desarrollo de los pueblos de la región central del Perú y el mundo" (p. 8). Por otro lado, en el terreno de la investigación afirma que "constituye una función esencial y obligatoria de la universidad, que la fomenta y realiza" (p. 20), de lo cual el investigador puede dar fe de la no existencia de obstáculos para la ejecución del proyecto de investigación que tiene su consecuencia en la realización del presente informe, además de la colaboración voluntaria de los estudiantes que conocen de la importancia de la investigación en la Universidad y, en particular, en el campo de la Educación.

En cuanto al modelo pedagógico, la Dirección de Gestión e Innovación Académica (2021) plantea tres desafíos que presenta la cultura actual: la sociedad de la información, la mundialización y la civilización científica técnica, de modo que hace frente con dos posturas, la primera centrada en la cultura general y la segunda en el desarrollo de la empleabilidad. Además considera como pirncipios la transferibilidad (capacidad de solucionar problemas en diferentes contextos), multirreferenciabilidad (acción educativa en función de diferentes contextos profesionales), alternancia (integrar el aprendizaje del mundo real al que se adquiere en las aulas), aprendizaje continuo (adecuarse al cambio según contexto y demanda social) y aprendizaje disfuncional (toma de decisiones en situaciones nuevas). Además, en cuanto al currículo se asume el concepto de Comptencias Profesionales Integrales con características como las siguientes:

- Formación integral del profesional como ser humano.
- Integración del saber teórico, práctico, metodológico y social.
- Promueve una formación por competencias.
- Promueve la autonomía del futuro profesional.

- Integración de habilidades, conocimientos, aptitudes, actitudes y valores.
- Evaluación en base a criterios o indicadores de desempeño.

Esta última característica es la que se evidencia de forma directa en el modelo adoptado por la Facultad de Educación que, de acuerdo con la tabla 2, es un modelo de competencia basado en criterios de desempeño y que también es visible en los planes de estudio vigente de la Carrera Profesional de Ciencias Matemática e Informática en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, así como en la planificación por unidades y en la elaboración de los sílabos de mencionada Carrera Profesional.

Figura 41

Parte del esquema de los Sílabos de la CP de Ciencias Matemáticas e Informática

III UNIDAD: ....

Capacidades

- ....

Nº Sem.	Contenidos básicos	Estrategias básicas	Recursos y material	Av. %
13	•	•	•	76
....	....	....	....	....
17	•			100
	Fecha del consolidado de la tercera unidad/tercer parcial:			
BIBLIOGRAFÍA: (7), (10), (11)				

VIII. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

7.1 Matrices de evaluación

Unidad	Capacidad	Indicadores básicos - Producto	Instrumentos
I	•	•	
II	•	•	
		•	
III	•	•	
		•	

Valores	Actitudes	Comportamientos observables	Instrumentos
Responsabilidad	•	•	•
Solidaridad	•	•	•
Respeto	•	•	•

Nota. Obtenido de Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática (2017).

Selección de recursos virtuales para las clases remotas

En cuanto al desarrollo de las actividades sincrónicas la UNCP trabajó durante el periodo 2020-I con Microsoft Teams y para las actividades asincrónicas con la platafoprma Moodle, sin embargo, para el periodo 2020-II en adelante se consideró únicamente Microsoft Teams, tanto para actividades sincrónicas y asincrónicas debido a las actualizaciones continuas que tenía, ya que ya no era únicamente para videoconferencias, sino también para la organización por semanas, la asignación de tareas, la grabación de las sesiones de clase, la descarga de asistencia con detalles de minutos de asistencia a clase y minutos fuera de ella, entre otras múltiples ventajas como la vinculación a otras aplicaciones de Microsoft a través de solamente el correo institucional de los docentes y estudiantes. Las razones de la elección de los demás recursos virtuales se detallan a continuación.

En lo que corresponde al uso de las pizarras virtuales, se eligieron Samsung Notes y Whiteboard.fi, Samsung Notes para el desarrollo de clases por parte del docente porque permite la combinación de colores en menor tiempo respecto a las demás pizarras, así como su versatilidad desde un celular o tableta con lápiz óptico tanto para el desarrollo de la clase como para el envío del documento final en formato PDF por medio de WhatsApp y otras redes sociales; por otro lado, Whiteboard.fi no requiere instalación y permite el trabajo con las mismas herramientas desde el celular como de la computadora, pero sobre todo por el panel del docente que permite visualizar que estudiantes están realizando las actividades y que estudiantes no lo hacen, implicando la toma de decisiones para la participación de los mismos.

El trabajo en la nube informática fue utilizado principalmente por el investigador para la organización de los documentos de clase en tres carpetas, la primera para el grupo experimental, la segunda para el grupo control y la tercera para el informe de tesis y otros documentos importantes para su elaboración. En tal sentido, se utilizó Google Drive con la cuenta personal del docente.

Para la evaluación (preprueba y posprueba) se utilizó Google Forms por la versatilidad y las múltiples herramientas y configuraciones que permiten realizar para el planteamiento de los ítems de los cuestionarios, además de su vinculación a la cuenta personal de Google, lo cual implica relativa mayor seguridad al momento que el estudiante accede a dicho formulario, esto debido a reportes de algunos docentes que los estudiantes comparten el correo institucional con facilidad a terceros por diversas razones, entre ellas, la resolución de sus exámenes virtuales.

En cuanto a otros recursos de apoyo se creó dos grupos de Facebook (experimental y control) con una codificación que no facilite al estudiante identificarse como parte del grupo experimental o control (CPCMIGC y CPCMIGE), esto para evitar que se sientan desmotivados por pertenecer a uno de los grupos cuando posiblemente querían pertenecer al otro, estos grupos se utilizaron para compartir las grabaciones de las sesiones de clase, si bien es cierto Microsoft Teams cuenta con el espacio para la grabación de la clase pero demanda el uso de datos de internet a los estudiantes que, en muchos casos solamente realizan recargas para el desarrollo de la clase pero, a la vez, varios estudiantes tenían Facebook ilimitado como parte del servicio de telefonía con el que contaban. Como parte de la retroalimentación se enviaban a los grupos de WhatsApp las grabaciones de algunos ejercicios previamente asignados, para lo cual se utilizó la aplicación XRecorder que permite editar y comprimir el archivo de forma notable permitiendo así el envío de videos de considerable duración. WhatsApp fue otro recurso virtual utilizado debido al bajo costo y la optimización del tiempo que se tiene para la comunicación, compartir documentos, imágenes y videos cortos. Por último el correo electrónico personal de los estudiantes para una mayor seguridad en la resolución de los formularios.

Tabla 16

Recursos virtuales utilizados

Tipo	Denominación
Aula virtual	Microsoft Teams
Pizarra virtual	Samsung Notes y Whiteboard.fi
Nube informática	Google Drive
Evaluación virtual	Google Forms
Otros recursos virtuales	Facebook, XRecorder, WhatsApp, Gmail

Abordaje de la Integral Definida por parte de los textos universitarios

En cuanto a esta parte se han considerado los textos de la bibliografía básica y complementaria consignada en el Sílabo de Análisis Matemático II del VII semestre del periodo 2021-I.

Figura 42

Bibliografía del sílabo de Análisis Matemático II del periodo 2021-II

XI. Bibliografía

11.1. Bibliografía básica

[1] Courant, R. y John, F. (1999). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático I*. Editorial Limusa.

[2] Haaser, N.; La Salle, J. y Sullivan, J. (1990). *Análisis Matemático I. Curso de Introducción (2da ed.)*. Editorial Trillas.

[3] Lages, E. (1997). *Análisis Real I*. Texto del Instituto de Matemática y Ciencias Afines [IMCA].

11.2. Bibliografía complementaria

[4] Apostol, T. (1967). *Calculus I. One-variable calculus with an Introduction to Linear Algebra (2nd ed.)*. Springer, Indiana university.

[5] Espinoza, E. (2002). *Análisis Matemático II. Para estudiantes de ciencia e ingeniería (3ra ed.)*. Edukperu.

[6] Leithold, L. (1998). *El Cálculo (7ma ed.)*. Oxford university press.

[7] Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (7ma ed.)*. Cengage learning editores.

Nota. Obtenido de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática.

Courant, R. y John, F. abordan la temática en el siguiente orden: La integral (Introducción con Historia de la Matemática, áreas, la integral como un área, área bajo una curva, área o integral como límite de una suma), definición analítica de integrales (definición y existencia de integrales), ejemplos elementales de integración (funciones lineales, cuadráticas, x^a, seno y coseno), reglas de integración (Aditividad, integral de una suma y un producto con una constante, estimación de integrales, teorema del valor medio). Además, se observan algunas características de notación no usuales en otros textos, tal como F_a^b para representar al área bajo una curva en el intervalo $[a; b]$, también el uso de ξ_i para indicar el elemento representativo del intervalo $[x_{i-1}; x_i]$ que va a generar la altura del rectángulo representativo $f(\xi_i)$, por último, en la Regla de Barrow se distingue el uso de ϕ para la antiderivada del integrando, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$$

Haaser, N; La Salle, J. y Sullivan, J. abordan la temática en el siguiente orden: Introducción (Historia de la Matemática sobre cuadraturas), área de figuras planas (sumas superiores e inferiores), la integral definida (defión, integral de Riemann), definición de área, existencia de funciones integrables, propiedades básicas de la integral (sumatorias), Teoremas fundamentales del Cálculo, primer Teorema del valor medio para integrales, integrales impropias. Respecto a la notación utilizada se distinguen como no usuales a la región bajo la curva como $\mathcal{E}$ y para el área: $\text{área}(\mathcal{E})$, también se observa el uso inicial para funciones en general sin explicitar la variable, por ejemplo, se utiliza $\int_a^b f$ en lugar de lo usual $\int_a^b f(x)\,dx$, aunque luego explicita el significado genérico de esta representación, es decir:

$$\int_a^b \text{sen} = \int_a^b \text{sen}(x)\,dx = \int_a^b \text{sen}(u)\,du = \int_a^b \text{sen}(\theta)\,d\theta.$$

Lages, E. aborda la temática en el siguiente orden: Revisión sobre el ínfimo y supremo, la integral de Riemann, propiedades de la integral, condiciones suficientes para la integrabilidad, Teoremas clásicos del Cálculo Integral, la integral como límite de sumas de Riemann, integrales impropias. Además se nota un trabajo direccionado al matemático de carrera con lemas, corolarios y sus respectivas demostraciones, además de la precisión matemática al momento de abordar cada concepto, por ejemplo, explica y ejemplifica 3 condiciones suficientes para que una función sea integrable, pero no menciona que que sean necesarias. Aunque la formación de matemático es diferente al del futuro docente, hay algunos Teoremas necesarios de ser entendidos.

Apostol, T. aborda la temática en el siguiente orden: Ideas básicas de Geometría cartesiana, funciones (ideas generales y ejemplos), funciones reales de variable real, el concepto de área como función de conjunto (definición axiomática de área), intervalos, particiones y funciones escalonadas, suma y producto de funciones escalonadas, integral de funciones escalonadas, notaciones para las integrales, integral de funciones generales (integrales superior e inferior, integral de funciones monótonas), propiedades de la integral, integración de funciones polinómicas, aplicaciones de la integral (área entre curvas, volúmenes). Si bien es cierto, la notación de Apostol es la usual de la mayoría de textos actuales pero es destacable que, a diferencia de muchos otros textos, inicia con el Cálculo Integral y luego con el Cálculo Diferencial, como históricamente se presentó como problema, es por ello que se entiende el desarrollo de conceptos previos como por ejemplo el de función, para construir el concepto de la integral con un sustento claro y definido.

Espinoza, E. aborda la temática en el siguiente orden: Sumatorias (Propiedades, fórmulas), área de una región plana por sumatorias (partición de un intervalo cerrado), aproximación del área de una región por área de rectángulos, sumas superiores y sumas inferiores y propiedades, integral definida (integral de Riemann, existencia de funciones integrables, la integral como límite de sumas, cálculo de la integral definida usando intervalos de igual longitud, valor medio para integrales, Teoremas fundamentales del Cálculo, cambio de variable en una integral definida). Esta secuencia es una de las más seguidas a nivel de los cursos de Cálculo en las carreras de Ingeniería y formación de docentes, sin embargo, aunque la notación es usual se puede distinguir su priorización de la variedad de ejercicios intra matemáticos y el mínimo énfasis puesto en la comprensión de los conceptos.

Leithold, L. aborda la temática en el siguiente orden: Área (sumatorias), integral definida (suma de Riemann, definición de integral definida, propiedades y Teoremas), Teorema del valor medio, Teoremas fundamentales del Cálculo, cálculo del área mediante la Integral Definida (bajo una curva y entre dos curvas). La notación utilizada por Leithold es la usual y la fortaleza principal es la comprensión del concepto y la construcción de los mismos, además de utilizar situaciones de contexto intra matemático y de contexto simulado, de modo que se presenta accesible a cualquier estudiante en formación como futuro docente.

Stewart, J. aborda la temática en el siguiente orden: Áreas y distancias, la integral definida, Teorema fundamental del Cálculo, integrales indefinidas y Teorema del cambio neto, regla de sustitución, área entre curvas, volúmenes. La notación utilizada también es la usual y, al igual que Leithold, tiene como fortaleza su incidencia en la comprensión de conceptos y en como se construyen los mismos, también cuenta con variados problemas de contexto simulado e intra matemático y entre los problemas que se resuelven en la parte teórica se abordan posibles escollos que puedan surgir durante el proceso de construcción de los conceptos.

Análisis a priori

Consiste en realizar el diseño de la secuencia de clase en función al análisis preliminar, el cual es el insumo principal para elegir las estrategias más adecuadas.

Variables macro-didácticas o globales

Se determinó la secuencia temática con base en el análisis preliminar y el trabajo por Unidades, en ambos grupos se consideró la capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contexto simulado y de contexto real.

Tabla 17

Tópicos desarrollados con el grupo experimental

Sesión	Tópico o tema	Indicador de desempeño
1	Geometría de la regla y el compás	Explica el procedimiento para determinar polígonos regulares, partiendo de las construcciones básicas con regla y compás.
2	Las cuadraturas	Utiliza el problema de las cuadraturas para la comprensión del método de exhaución de Eudoxo y desarrollado por Arquímedes.
3	Sumatorias. Fórmulas básicas.	Resuelve problemas de contexto (simulado e intra matemático), mediante el uso de las propiedades y fórmulas de sumatorias.
4	Sumas superiores e inferiores	Reconoce el uso del método de exhaución a través de sumas superiores e inferiores para el cálculo del área bajo una curva.
5	Integral definida. Teorema fundamental.	Reconoce el concepto de la Integral Definida y el Teorema Fundamental del Cálculo a través de la resolución de problemas.
6	Área bajo una curva	Relaciona la Integral de Riemann con el cálculo del área bajo una curva.
7	Área entre dos curvas	Determina el área de la región limitada por dos curvas.
8	Teorema del valor medio.	Interpreta el Teorema del valor medio como la solución al problema de las cuadraturas.
9	Cálculo de volúmenes. Método del disco.	Determina el volumen de sólidos de revolución mediante el método del disco
10	Método de la arandela	Resuelve problemas que implican el cálculo de volúmenes mediante el método de la arandela.

Variables micro-didácticas o locales

En cuanto a la secuencia de las actividades del grupo control se ha tenido la metodología usual (título, definiciones, demostraciones, problemas), mientras que en el grupo experimental se han considerado actividades y secuencias diferentes en función al tópico desarrollado en cada sesión.

Notación matemática

Para este caso se han tenido en cuenta dos notaciones para representar a la derivada de una función, ambas son las más usuales en la bibliografía consultada. En caso de presentarse una función con su regla de correspondencia $f(x) = \cdots$, su derivada se representó mediante $f'(x)$ y, en caso de presentarse a modo de ecuación $y = \cdots$ se utilizó $\frac{dy}{dx}$. En caso de la antiderivada de la función con regla de correspondencia $f(x)$ se ha elegido la representación $F(x)$ y, en el intervalo $[a; b]$, para la Integral Definida desde a hasta b de la función con regla de correspondencia $f(x)$ donde la variable es x se ha considerado la notación más usual en la bibliografía del sílabo:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Desarrollo de las sesiones

Las secuencias establecidas fueron ajustándose continuamente en función al desarrollo progresivo de las sesiones y se han adjuntado en los anexos.

4.6.2. *Técnica para el análisis de datos*

Debido a que el enfoque empleado para este estudio es cuantitativo y el propósito es medir el nivel de influencia de una variable sobre la otra, se utilizó para el procesamiento de los datos lo mostrado en la siguiente tabla:

Tabla 18

Técnica para el análisis de datos

Momento	Descripción
Entrada	1. Recolección de los datos 2. Tabulación de los datos
Proceso	1. Selección del programa o programas (Microsoft Excel y SPSS Statistics 25) 2. Ejecución de los programas seleccionados. 3. Evaluación del nivel de confiabilidad y validez de los instrumentos. 4. Análisis descriptivo de los datos. 5. Análisis de normalidad de los datos. 6. Análisis inferencial de las hipótesis. 7. Análisis adicionales.
Salida	1. Presentación de resultados.

Nota. Adaptado de Baptista et al. (2016). Metodología de la Investigación (6ta ed.)

Además, este proceso tendrá mayor control, debido a que se evitarán errores al digitar debido a la naturaleza virtual de los cuestionarios que se utilizarán.

4.7. Aspectos éticos

El proceso de investigación pudo presentar algunos escollos que quizá sean únicamente detectables por el investigador y/o el asesor, tal como lo manifiestan Machado et al. (2007) al afirmar:

> […] se necesita estar al tanto de los acuerdos generales que comparten los investigadores sobre lo propio y lo impropio al efectuar una indagación científica; entre estos, se pueden mencionar la participación voluntaria, no lastimar a los participantes, el anonimato y confiabilidad, la presentación de análisis e informes y las normas que rigen las instituciones académicas. (p. 351)

En tal sentido, se tuvo un diálogo reflexivo con los estudiantes sobre la importancia de la investigación en la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática y más aún en nuestro país, de modo que se inició el estudio con los estudiantes que de forma voluntaria decidieron participar y fueron los 26 estudiantes del VII semestre sin ninguna abstención. Por otro lado, los diferentes procedimientos se realizaron de forma virtual, sujeto a mayor control por parte del asesor y de quienes correspondan garantizar la transparencia de la veracidad de la información y resultados obtenidos. Tampoco se atentó contra la salud por medio de ingesta de sustancias, ya que no corresponde con este trabajo, sin embargo, la salud visual puede situarse comprometida con la constante exposición a la luz azul de la computadora o celular, por lo cual una de las primeras recomendaciones fue mencionar los procedimientos para instalar el filtro de luz azul en los celulares o activar dicha función en los ordenadores.

También es importante el aspecto formal de trabajo investigativo dentro de la Universidad Nacional del Centro del Perú, de modo que el 20 de mayo del 2021 se aprobó el proyecto de investigación y pocos días después se solicitó el permiso correspondiente a la jefatura de departamento de la Facultad de Educación y, el 07 de junio dio la aprobación el Dr. Luis O. Huaytalla Torres para la ejecución y cuyo informe es que se está presentando actualmente.

CAPÍTULO V. RESULTADOS

5.1. Análisis descriptivo

5.1.1. *Resultados preprueba y posprueba*

Para la preprueba y posprueba se han considerado el análisis descriptivo de las 3 dimensiones (aprendizaje de representaciones, aprendizaje de conceptos y aprendizaje de proposiciones) y con un máximo puntaje 3, 4 y 3 puntos respectivamente, haciendo un total de 10 puntos como máximo. Los resultados obtenidos por la muestra son los siguientes:

Tabla 19

Resultados del grupo control y del grupo experimental

GC	Preprueba				Posprueba			
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total
Est01	1	2	1	4	2	2	1	5
Est02	0	1	0	1	0	1	0	1
Est03	0	2	1	3	2	1	1	4
Est04	1	2	3	6	2	3	2	7
Est05	0	0	0	0	0	0	0	0
Est06	1	2	1	4	2	1	1	4
Est07	2	1	1	4	3	3	2	8
Est08	1	0	2	3	3	1	1	5
Est09	2	2	1	5	2	1	0	3
Est10	0	2	1	3	1	0	0	1
Est11	1	2	1	4	3	3	2	8
Est12	2	1	0	3	3	1	2	6
Est13	1	1	1	3	3	2	1	6

GE	Preprueba				Posprueba			
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total
EST01	2	0	0	1	3	1	0	2
EST02	2	2	1	5	3	3	2	8
EST03	0	2	1	3	1	1	1	3
EST04	1	0	1	2	1	4	2	7
EST05	2	1	1	4	3	3	2	8
EST06	3	2	1	6	3	3	2	8
EST07	3	1	1	5	3	1	1	5
EST08	1	1	2	4	3	4	3	10
EST09	2	2	1	4	5	2	1	4
EST10	1	1	0	2	2	4	2	8
EST11	2	0	2	4	3	4	2	9
EST12	3	1	0	4	3	3	2	8
EST13	1	2	0	3	2	2	1	5

Nota. GC: Grupo control, GE: Grupo experimental, D: Dimensión

Además, se presentan los estadísticos descriptivos para el grupo control y el grupo experimental para un adecuado análisis previo que derivó en la descripción de lo que representan algunos de los valores obtenidos, de modo que se tenga información previa al análisis de normalidad e inferencia estadística.

Tabla 20

Estadísticos descriptivos del grupo control

Estadístico	Preprueba				Posprueba			
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total
$\overline{x}$	0.923	1.385	1	3.308	2	1.462	1	4.615
Error típico	0.210	0.213	0.226	0.429	0.300	0.291	0.226	0.738
Me	1	2	1	3	2	1	1	5
S	0.760	0.768	0.816	1.548	1.080	1.050	0.816	2.663
C.V.	82%	55%	82%	47%	54%	72%	82%	58%
Curtosis	-1.053	-0.580	2.277	1.105	-0.0779	-0.936	-1.445	-0.887
C. de asimetría	0.136	-0.849	1.086	-0.608	-0.938	0.374	0	-0.512
Rango	2	2	3	6	3	3	2	8
Mínimo	0	0	0	0	0	0	0	0
Máximo	2	2	3	6	3	3	2	8
N	13	13	13	13	13	13	13	13
P_{10}	0	0.2	0	1.4	0.2	0.2	0	1
P_{90}	2	2	1.8	4.8	3	3	2	7.8

Tabla 21

Estadísticos descriptivos del grupo experimental

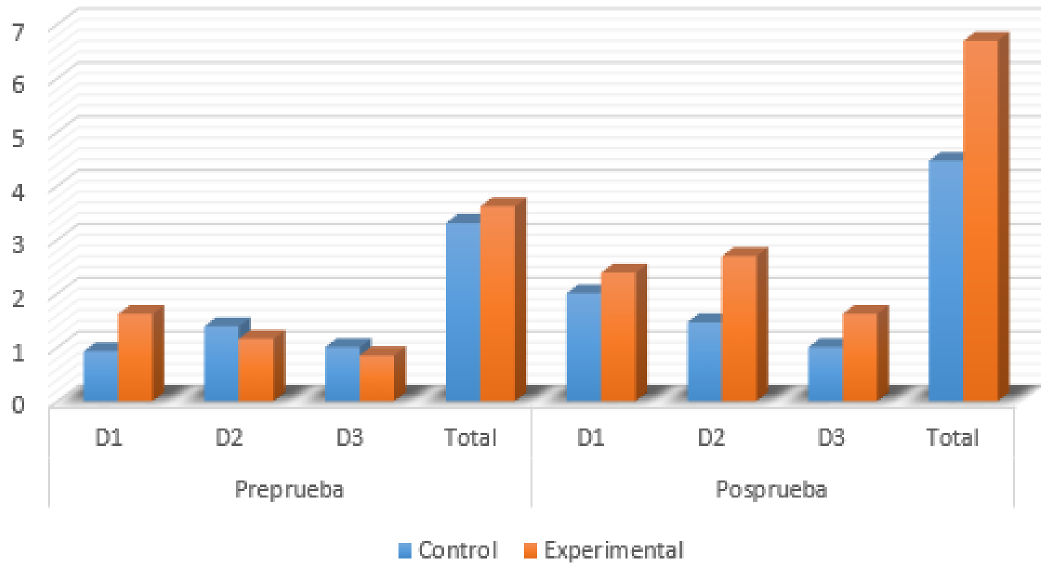
Estadístico	Preprueba				Posprueba			
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total
$\overline{x}$	1.615	1.154	0.846	3.615	2.384	2.692	1.615	6.692
Error típico	0.266	0.222	0.191	0.385	0.213	0.328	0.213	0.624
Me	1	1	1	4	3	3	2	8
S	0.961	0.801	0.689	1.387	0.768	1.182	0.768	2.250
C.V.	59%	69%	81%	38%	32%	44%	48%	34%
Curtosis	-0.891	-1.282	-0.496	-0.181	-0.580	-1.329	0.517	-0.921
C. de asimetría	0.280	-0.307	0.203	-0.282	-0.849	-0.366	-0.456	-0.480
Rango	3	2	2	5	2	3	3	7
Mínimo	0	0	0	1	1	1	0	3
Máximo	3	2	2	6	3	4	3	10
N	13	13	13	13	13	13	13	13
P_{10}	1	0	0	2	1.2	1	1	3.4
P_{90}	3	2	1.8	5	3	4	2	8.8

A partir de ambas tablas, se distingue que el grupo experimental presenta datos más homogéneos respecto al grupo control, tanto en la preprueba como en la posprueba y en sus respectivas dimensiones, con excepción de la dimensión 2 de la preprueba, esto en función a los valores del coeficiente de variación.

También, se distingue que los percentiles 10 y 90 de los puntajes totales del grupo control y experimental son similares o con diferencias mínimas en la preprueba ($1.4 < 2$ y $4.8 \approx 5$), pero se distingue mayor diferencia en la posprueba ($1 < 3.4$ y $7.8 < 8.8$), siendo el grupo experimental el que presenta los valores mayores. Además, el rango de datos del puntaje total en la preprueba está dado en el grupo control de 0 a 6, mientras que el grupo experimental de 1 a 6 (relativamente similares); sin embargo, en la posprueba el rango del puntaje total del grupo control es de 0 a 8, mientras que, en el grupo experimental es de 3 a 10 (rangos similares pero con mayores puntajes en el grupo experimental).

Figura 43

Comparación gráfica de las medias de la preprueba y la posprueba



Nota. Elaborado con Microsoft Excel

Respecto a las medias, se distingue que tanto en el grupo control como en el grupo experimental se han experimentado mejoras desde la preprueba hasta la posprueba, pero de forma gráfica se puede distinguir que, a excepción de la dimensión 1, en todas las demás dimensiones y en los puntajes totales, el grupo experimental tuvo mayor incremento respecto al grupo control, es decir, ambos se incrementaron, pero es mayor el incremento en el grupo experimental.

5.1.2. *Prueba de Normalidad del grupo control*

De acuerdo con Novales (2010) el test de Shapiro Wilk se utiliza para contrastar la normalidad con un número menor a 50 observaciones y en muestras grandes su equivalente es el test de Kolmogorov-Smirnov. Entonces, al ser la muestra de este estudio 26 estudiantes (13 estudiantes en cada grupo), corresponde realizar el análisis de normalidad con la prueba de Shapiro-Wilk, de modo que se han obtenido los siguientes resultados.

Tabla 22

Prueba de normalidad Shapiro-Wilk

Grupo	Instrumento	Dimensiones	Estadístico	gl	Sig.
Control	Preprueba	Ap. de representaciones	,825	13	,014
		Ap. de conceptos	,756	13	,002
		Ap. de proposiciones	,790	13	,005
		Total	,912	13	,193
	Posprueba	Ap. de representaciones	,810	13	,009
		Ap. de conceptos	,857	13	,036
		Ap. de proposiciones	,819	13	,012
		Total	,940	13	,462

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Representaciones** de la preprueba en el grupo control, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la preprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la preprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.014$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Representaciones de la preprueba en el grupo control no se

distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Conceptos** de la preprueba en el grupo control, se tiene:

H_0: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la preprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la preprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.002$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Conceptos de la preprueba en el grupo control no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Proposiciones** de la preprueba en el grupo control, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la preprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la preprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.005$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Proposiciones de la preprueba en el grupo control no se

distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **puntaje total** de la preprueba en el grupo control, se tiene:

H_0: Los puntajes totales de la preprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes totales de la preprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.193$ que es un valor mayor a 0.05 se acepta la hipótesis nula y se concluye que los puntajes totales de la preprueba en el grupo control se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba paramétrica t de Student para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Representaciones** de la posprueba en el grupo control, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la posprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la posprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.009$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Representaciones de la posprueba en el grupo control no se

distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Conceptos** de la posprueba en el grupo control, se tiene:

H_0: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la posprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la posprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.036$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Conceptos de la posprueba en el grupo control no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Proposiciones** de la posprueba en el grupo control, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la posprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la posprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.012$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Proposiciones de la posprueba en el grupo control no se

distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **puntaje total** de la posprueba en el grupo control, se tiene:

H_0: Los puntajes totales de la posprueba en el grupo control, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes totales de la posprueba en el grupo control, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.462$ que es un valor mayor a 0.05 se acepta la hipótesis nula y se concluye que los puntajes totales de la posprueba en el grupo control se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba paramétrica t de Student para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

5.1.3. *Prueba de Normalidad del grupo experimental*

De modo similar, al tratarse de una muestra de 26 estudiantes (13 estudiantes en cada grupo), corresponde realizar el análisis de normalidad con la prueba de Shapiro-Wilk, de modo que se han obtenido los siguientes resultados.

Tabla 23

Prueba de normalidad Shapiro-Wilk

Grupo	Instrumento	Dimensiones	Estadístico	gl	Sig.
Experimental	Preprueba	Ap. de representaciones	,862	13	,041
		Ap. de conceptos	,812	13	,010
		Ap. de proposiciones	,811	13	,009
		Total	,949	13	,588
	Posprueba	Ap. de representaciones	,756	13	,002
		Ap. de conceptos	,852	13	,030
		Ap. de proposiciones	,856	13	,035
		Total	,893	13	,107

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Representaciones** de la preprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la preprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la preprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.041$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Representaciones de la preprueba en el grupo experimental no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Conceptos** de la preprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la preprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la preprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.010$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Conceptos de la preprueba en el grupo experimental no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Proposiciones** de la preprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la preprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la preprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.009$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Proposiciones de la preprueba en el grupo experimental no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **puntaje total** de la preprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0: Los puntajes totales de la preprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes totales de la preprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.588$ que es un valor mayor a 0.05 se acepta la hipótesis nula y se concluye que los puntajes totales de la preprueba en el grupo experimental se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba paramétrica t de Student para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Representaciones** de la posprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la posprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Representaciones de la posprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.002$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Representaciones de la posprueba en el grupo experimental no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Conceptos** de la posprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la posprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Conceptos de la posprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.030$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Conceptos de la posprueba en el grupo experimental no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **Aprendizaje de Proposiciones** de la posprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la posprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1 : Los puntajes obtenidos en la dimensión Aprendizaje de Proposiciones de la posprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.035$ que es un valor menor a 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los puntajes de los resultados del Aprendizaje de Proposiciones de la posprueba en el grupo experimental no se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba no paramétrica de Wilcoxon para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

En cuanto a los resultados del **puntaje total** de la posprueba en el grupo experimental, se tiene:

H_0: Los puntajes totales de la posprueba en el grupo experimental, se distribuyen normalmente.

H_1: Los puntajes totales de la posprueba en el grupo experimental, no se distribuyen normalmente.

En tal sentido, al haber obtenido $p = 0.107$ que es un valor mayor a 0.05 se acepta la hipótesis nula y se concluye que los puntajes totales de la posprueba en el grupo experimental se distribuyen normalmente. En consecuencia, es recomendable utilizar pruebas paramétricas y al tratarse de un antes y un después, es apropiado la prueba t de Student para evaluar el comportamiento de las pruebas relacionadas.

5.2. Análisis inferencial y/o contrastación de hipótesis

Para dos muestras independientes

La finalidad de este análisis es responder a la pregunta: Entre los grupos control y experimental ¿Cuál de ellos tuvo mejores resultados? En tal sentido se han analizado los puntajes totales obtenidos en la preprueba por parte de ambos grupos. Luego se han analizado si existen diferencias significativas entre ambos grupos en la posprueba.

Preprueba

Supuesto de Homocedasticidad

$H_0: \sigma^2_{GC} = \sigma^2_{GE}$

$H_1: \sigma^2_{GC} \neq \sigma^2_{GE}$

Para evaluar la homogeneidad de las varianzas de los grupos control y experimental en la preprueba, se ha utilizado el test de Levene con un nivel de confianza del 95% (margen de error de $0{,}05$) y en función al p-valor se ha tomado la decisión.

Tabla 24

Test de Levene de igualdad de varianzas y prueba t para la igualdad de medias

		F	Sig.
Preprueba	Se asumen varianzas iguales	,001	,974
	No se asumen varianzas iguales		

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

Como el p-valor obtenido es $p = 0{,}974 > 0{,}05$ se acepta la H_0 y se asume que las varianzas de los puntajes totales del grupo control y del grupo experimental son iguales en la preprueba.

Diferencia de medias

H_0: El puntaje promedio en ambos grupos en la preprueba es el mismo.

H_1: El puntaje promedio en ambos grupos en la preprueba no es el mismo.

Para evaluar la igualdad de medias de los grupos control y experimental en la preprueba se ha utilizado la prueba t para la igualdad de medias con un nivel de confianza del 95% (margen de error de $0{,}05$) y en función al p-valor se ha tomado la decisión. Los resultados se han obtenido mediante el software SPSS Statistics v.25 y se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 25

Prueba t para la igualdad de medias

		T	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de N.C. de la diferencia	
							Inferior	Superior
Preprueba	a	-,534	24	,598	-,308	,576	-1,498	,882
	b	-,534	23,714	,598	-,308	,576	-1,498	,883

Nota. a. Se asumen varianzas iguales, b. No se asumen varianzas iguales.

Como el p-valor obtenido es $p = 0{,}598 > 0{,}05$ se acepta la H_0 y se asume que el puntaje promedio en ambos grupos en la preprueba es el mismo.

Posprueba

Supuesto de Homocedasticidad

H_0: $\sigma_{GC}^2 = \sigma_{GE}^2$

H_1: $\sigma_{GC}^2 \neq \sigma_{GE}^2$

Para evaluar la homogeneidad de las varianzas de los grupos experimental y control en la posprueba, se ha utilizado el test de Levene con un nivel de confianza del 95% (margen de error de $0{,}05$) y en función al p-valor se ha tomado la decisión.

Tabla 26

Test de Levene de igualdad de varianzas y prueba t para la igualdad de medias

		F	Sig.
Posprueba	Se asumen varianzas iguales	,0167	,687
	No se asumen varianzas iguales		

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

Como el p-valor obtenido es $p = 0.687 > 0.05$ se acepta la H_0 y se asume que las varianzas de los puntajes totales del grupo control y del grupo experimental son iguales en la posprueba.

Diferencia de medias

H_0: El puntaje promedio en ambos grupos en la posprueba es el mismo.

H_1: El puntaje promedio en ambos grupos en la posprueba no es el mismo.

Para evaluar la igualdad de medias de los grupos control y experimental en la posprueba se ha utilizado la prueba t para la igualdad de medias con un nivel de confianza del 95% (margen de error de 0.05) y en función al p-valor se ha tomado la decisión. Los resultados se han obtenido mediante el software SPSS Statistics v.25 y se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 27

Prueba t para la igualdad de medias

		T	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de N.C. de la diferencia	
							Inferior	Superior
Posprueba	a	-2,322	24	,029	-2,231	,961	-4,214	-,248
	b	-2,322	23,430	,029	-2,231	,961	-4,216	-,245

Nota. a. Se asumen varianzas iguales, b. No se asumen varianzas iguales.

Como el p-valor obtenido es $p = 0.029 < 0.05$ se rechaza la H_0 y se asume que el puntaje promedio en ambos grupos en la posprueba no es el mismo. De modo que si se observan los promedios obtenidos en la posprueba por parte de los grupos control (4.615) y experimental (6.692), se puede concluir que el uso de la Ingeniería Didáctica tuvo un mayor efecto en el Aprendizaje Significativo Remoto de la Integral Definida que cuando no se utiliza.

Para dos muestras relacionadas

La finalidad de este análisis es responder a la pregunta: ¿Hubo diferencias significativas entre la medición realizada antes y la medición realizada después de la utilización de alguna propuesta? En tal sentido se han analizado los puntajes a nivel de cada dimensión (preprueba y posprueba), así como con los puntajes totales (preprueba y posprueba) en el grupo control, luego se ha realizado el mismo análisis en el grupo experimental y se compararon los resultados para dar respuesta a la pregunta. Estos procedimientos se realizaron en función a cada una de las hipótesis planteadas.

Hipótesis específica 1

La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Para la prueba de hipótesis específica 1, en primer lugar, se ha realizado el análisis del grupo **control**:

$$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$$

$$H_1: \mu_{ANTES} < \mu_{DESPUÉS}$$

Tabla 28

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desv. Desviación	Mínimo	Máximo
Preprueba	13	,92	,760	0	2
Posprueba	13	2,00	1,080	0	3

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 28 se observa que la media de la posprueba es mayor, eso ayuda a garantizar que la hipótesis está bien planteada. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba no paramétrica Wilcoxon.

Tabla 29

Estadísticos de prueba[a]

	Posprueba – Preprueba
Z	-2,889[b]
Sig. Asintótica (bilateral)	,004

Nota. a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon, b. Se basa en rangos negativos

La decisión se realiza con base en el valor de Sig. Asintótica (bilateral) dividido entre 2, ya que la prueba es unilateral. En tal sentido, se obtendrá $p = 0.004/2 = 0.002$ que es un valor menor al nivel de significancia de 0.05, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes del Aprendizaje de Representaciones en la preprueba es menor que en la posprueba del grupo control y la diferencia existente es significativa.

Luego, se ha realizado el análisis del grupo **experimental**:

$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

$H_1: \mu_{ANTES} < \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 30

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desv. Desviación	Mínimo	Máximo
Preprueba	13	1,62	,961	0	3
Posprueba	13	2,38	,768	1	3

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 30 se observa que la media de la posprueba es mayor, eso ayuda a garantizar que la hipótesis está bien planteada. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba no paramétrica Wilcoxon.

Tabla 31

Estadísticos de prueba[a]

	Posprueba – Preprueba
Z	-2,887[b]
Sig. Asintótica (bilateral)	,004

Nota. a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon, b. Se basa en rangos negativos

La decisión se realiza con base en el valor de Sig. Asintótica (bilateral) dividido entre 2, ya que la prueba es unilateral. En tal sentido, se obtendrá $p = 0.004/2 = 0.002$ que es un valor menor al nivel de significancia de 0.05, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes del Aprendizaje de Representaciones en la preprueba es menor que en la posprueba del grupo experimental y la diferencia existente es significativa.

Hipótesis específica 2

La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Para la prueba de hipótesis específica 2, en primer lugar, se ha realizado el análisis del grupo **control**:

$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

$H_1: \mu_{ANTES} < \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 32

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desv. Desviación	Mínimo	Máximo
Preprueba	13	1,38	,768	0	2
Posprueba	13	1,46	1,050	0	3

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 32 se observa que la media de la posprueba es mayor, eso ayuda a garantizar que la hipótesis está bien planteada. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba no paramétrica Wilcoxon.

Tabla 33

Estadísticos de prueba[a]

	Posprueba – Preprueba
Z	-,250[b]
Sig. Asintótica (bilateral)	,803

Nota. a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon, b. Se basa en rangos negativos

La decisión se realiza con base en el valor de Sig. Asintótica (bilateral) dividido entre 2, ya que la prueba es unilateral. En tal sentido, se obtendrá $p = 0.803/2 = 0.4015$ que es un valor mayor al nivel de significancia de 0.05, entonces se acepta la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes del Aprendizaje de Conceptos en la preprueba es igual a la posprueba del grupo control o que la diferencia existente no es significativa.

Luego, se ha realizado el análisis del grupo **experimental**:

H_0: $\mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

H_1: $\mu_{ANTES} < \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 34

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desv. Desviación	Mínimo	Máximo
Preprueba	13	1,15	,801	0	2
Posprueba	13	2,69	1,182	1	4

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 34 se observa que la media de la posprueba es mayor, eso ayuda a garantizar que la hipótesis está bien planteada. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba no paramétrica Wilcoxon.

Tabla 35

Estadísticos de prueba[a]

	Posprueba – Preprueba
Z	-2,570[b]
Sig. Asintótica (bilateral)	,010

Nota. a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon, b. Se basa en rangos negativos

La decisión se realiza con base en el valor de Sig. Asintótica (bilateral) dividido entre 2, ya que la prueba es unilateral. En tal sentido, se obtuvo $p = 0.010/2 = 0.005$ que es menor al nivel de significancia de 0.05, luego se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes del aprendizaje de conceptos en la preprueba es menor que en la posprueba del grupo experimental y la diferencia es significativa.

Hipótesis específica 3

La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Para la prueba de hipótesis específica 3, en primer lugar, se ha realizado el análisis del grupo **control**:

$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

$H_1: \mu_{ANTES} \neq \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 36

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desv. Desviación	Mínimo	Máximo
Preprueba	13	1,00	,816	0	3
Posprueba	13	1,00	,816	0	2

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 36 se observa que las medias de la preprueba y de la posprueba son iguales, eso garantiza que la hipótesis está bien planteada. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba no paramétrica Wilcoxon.

Tabla 37

Estadísticos de prueba[a]

	Posprueba – Preprueba
Z	-,000[b]
Sig. Asintótica (bilateral)	1,000

Nota. a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon, b. La suma de rangos negativos es igual a la suma de rangos positivos.

La decisión se realiza con base en el valor de Sig. Asintótica (bilateral); en tal sentido, se obtendrá $p = 1.000$ que es un valor mayor al nivel de significancia de 0.05, entonces se acepta la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes del Aprendizaje de Proposiciones en la preprueba es igual a la posprueba del grupo control y si existiera diferencia, no será significativa.

Luego, se ha realizado el análisis del grupo **experimental**:

$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

$H_1: \mu_{ANTES} < \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 38

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desv. Desviación	Mínimo	Máximo
Preprueba	13	,85	,689	0	2
Posprueba	13	1,62	,768	0	3

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 38 se observa que la media de la posprueba es mayor, eso ayuda a garantizar que la hipótesis está bien planteada. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba no paramétrica Wilcoxon.

Tabla 39

Estadísticos de prueba[a]

	Posprueba – Preprueba
Z	-2,640[b]
Sig. Asintótica (bilateral)	,008

Nota. a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon, b. Se basa en rangos negativos

La decisión se realiza con base en el valor de Sig. Asintótica (bilateral) dividido entre 2, ya que la prueba es unilateral. En tal sentido, se obtendrá $p = 0.008/2 = 0.004$ que es un valor menor al nivel de significancia de 0.05, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes del Aprendizaje de Proposiciones en la preprueba es menor que en la posprueba del grupo experimental y la diferencia existente es significativa.

Hipótesis general

La Ingeniería Didáctica influye significativamente en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Para la prueba de hipótesis general, en primer lugar, se ha realizado el análisis del grupo **control**:

$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

$H_1: \mu_{ANTES} \neq \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 40

Estadísticos descriptivos de muestras emparejadas

	Media	N	Desv. Desviación	Desv. Error promedio
Preprueba	3,31	13	1,548	,429
Posprueba	4,46	13	2,634	,730

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 40 se observa que la media de la posprueba es mayor, de modo que el análisis de muestras relacionadas permitirá determinar si dicha diferencia es significativa. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba paramétrica t de Student.

Tabla 41

Prueba de muestras emparejadas

	Diferencias emparejadas							
				95% de intervalo de confianza de la diferencia				
	Media	Desv. Desviación	Desv. Error promedio	Inferior	Superior	T	gl	Sig. (bilateral)
Preprueba-Posprueba	-1,154	13	1,548	-2,359	,051	-2,087	12	,059

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

Como el p-valor obtenido es $p = 0.059 > 0.05$ se acepta la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes totales del grupo control en la preprueba es igual que en la posprueba del grupo, de modo que la diferencia existente no es significativa.

Luego se ha realizado el análisis del grupo **experimental**:

$H_0: \mu_{ANTES} = \mu_{DESPUÉS}$

$H_1: \mu_{ANTES} \neq \mu_{DESPUÉS}$

Tabla 42

Estadísticos descriptivos de muestras emparejadas

	Media	N	Desv. Desviación	Desv. Error promedio
Preprueba	3,62	13	1,387	,385
Posprueba	6,69	13	2,250	,624

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

En la tabla 42 se observa que la media de la posprueba es mayor, de modo que el análisis de muestras relacionadas permitirá determinar si dicha diferencia es significativa. Además, el análisis de normalidad realizado ayudó a optar por el uso de la prueba paramétrica t de Student.

Tabla 43

Prueba de muestras emparejadas

	Diferencias emparejadas							
				95% de intervalo de confianza de la diferencia				
	Media	Desv. Desviación	Desv. Error promedio	Inferior	Superior	t	gl	Sig. (bilateral)
Preprueba-Posprueba	-3,077	2,100	,582	-4,346	-1,808	-5,283	12	,000

Nota. Datos obtenidos mediante el software SPSS Statistics v.25

Como el p-valor obtenido es $p = 0.000 < 0.05$ se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la media de los puntajes totales del grupo experimental en la preprueba es diferente que en la posprueba, de modo que la diferencia existente es significativa.

5.3. Discusión de resultados

En cuanto al objetivo específico 1, se encontró que existe diferencia significativa entre la preprueba y posprueba en ambos grupos (control y experimental) en el aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, esta diferencia se da cuando se utiliza la Ingeniería Didáctica (Wilcoxon, $p = 0.002 < 0.05$) como cuando no es utilizada (Wilcoxon, $p = 0.002 < 0.05$); es decir, en ambos casos hay incrementos estadísticamente significativos. Sin embargo, al observar las medias en ambos grupos, se nota que en el grupo control hubo un incremento de $2.00 - 0.92 = 1.08$, el cual es ligeramente mayor que el obtenido en el grupo experimental, que fue de $2.38 - 1.62 = 0.76$; esto podría deberse, entre otros factores, a que los estudiantes están familiarizados con el aprendizaje de representaciones en Matemática desde que inician sus estudios en el nivel inicial, también pudo haber influido la didáctica del docente en ambos grupos, de modo que cuando se usa la Ingeniería Didáctica o cuando no es utilizada se generan mejoras significativas en el aprendizaje de representaciones de la integral definida, aunque no utilizarla podría generar dependencia a alguna otra variable como la didáctica del docente. Este resultado concuerda con Rivera y Vides (2015) que concluyen que la Ingeniería Didáctica influye en la importancia de las representaciones simbólicas y la comprensión de su semántica, es decir, influye en el aprendizaje de representaciones.

Respecto al objetivo específico 2, se encontró que existe diferencia significativa entre la preprueba y posprueba en el grupo experimental en el aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, esta diferencia se da cuando se utiliza la Ingeniería Didáctica (Wilcoxon, $p = 0.005 < 0.05$) mientras que cuando no es utilizada la diferencia existente no es significativa (Wilcoxon, $p = 0.4015 > 0.05$), es decir, en ambos casos hay incrementos, pero solamente en el grupo experimental es estadísticamente significativo. Al observar las medias en ambos grupos se nota que en el grupo control hubo un incremento de $1.46 - 1.38 = 0.08$, el cual es menor que el obtenido en el grupo experimental, que fue de $2.69 - 1.15 = 1.54$; de modo que cuando se usa la Ingeniería Didáctica hay mejoras significativas en el aprendizaje de conceptos de la integral definida que cuando no es utilizada. Este resultado concuerda con Marcolini (2003) que concluye que la Ingeniería Didáctica aporta en la clarificación y en la resignificación del concepto, es decir, influye en el aprendizaje de conceptos.

Respecto al objetivo específico 3, se encontró que existe diferencia significativa entre la preprueba y posprueba en el grupo experimental en el aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, esta diferencia se da cuando se utiliza la Ingeniería Didáctica (Wilcoxon, $p = 0.008 < 0.05$) mientras que cuando no es utilizada la diferencia (si existe) no es significativa (Wilcoxon, $p = 1.000 > 0.05$), es decir, solamente en el grupo experimental hay incremento estadísticamente significativo. Al observar las medias en ambos grupos se nota que en el grupo control no hubo un incremento de $1.00 - 1.00 = 0.00$, el cual es menor que el obtenido en el grupo experimental, que fue de $1.62 - 0.85 = 0.77$; de modo que cuando se usa la Ingeniería Didáctica hay mejoras significativas en el aprendizaje de proposiciones de la integral definida que cuando no es utilizada. Este resultado se corresponde con lo que menciona Marcolini (2003), quien menciona que la Ingeniería Didáctica genera que exista evolución de sus estrategias al mostrar sus acciones, ideas y percepciones en que se basan para justificar sus respuestas, es decir, influye en el aprendizaje de las proposiciones.

En cuanto al objetivo general, se encontró que existe diferencia significativa entre la preprueba y posprueba en el grupo experimental en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú, esta diferencia se da cuando se utiliza la Ingeniería Didáctica (t de Student, $p = 0.000 < 0.05$) mientras que cuando no es utilizada la diferencia no es significativa (t de Student, $p = 0.059 > 0.05$), es decir, solamente en el grupo experimental hay incremento estadísticamente significativo. Al observar las medias en ambos grupos se nota que en el grupo control hubo un incremento de $4.46 - 3.31 = 1.15$, el cual es menor que el obtenido en el grupo experimental, que fue de $6.69 - 3.62 = 3.07$; de modo que cuando se usa la Ingeniería Didáctica hay mejoras significativas en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida a diferencia de cuando no es utilizada. Esta última afirmación es validada a partir del análisis de muestras independientes que muestra que, si bien la media del grupo experimental es mayor a la del grupo control en la preprueba y en la posprueba, dicha diferencia en la preprueba es de 0.308, la cual no es una diferencia significativa (t de Student, $p = 0.598 > 0.05$), mientras que en la posprueba la diferencia es de 2.23, la cual es una diferencia significativa (t de Student, $p = 0.029 < 0.05$), demostrando así que la mejora que hubo en el grupo experimental fue mayor y sobretodo, significativa. Además, estos resultados se sustentan en los estudios de Marcolini (2003), así como en los de Rivera y Vides (2015) tal como se visualizan en los párrafos anteriores, de modo que se puede inferir que la Ingeniería Didáctica influye en el aprendizaje significativo.

5.4. Aporte científico de la investigación

Respecto al aporte que realiza la investigación al conocimiento, González (2014) menciona que puede considerarse a la investigación como el puente entre la teoría y la práctica dentro del proceso de búsqueda del conocimiento. En este sentido, se han considerado:

5.4.1. *Aportes teóricos*

Uno de los vacíos presentados cuando los estudiantes tienen un primer acercamiento al aprendizaje de la integral definida radica, generalmente, en relacionar los conceptos del cálculo y del Análisis Matemático con el contexto geométrico del problema de las cuadraturas, en ese sentido, la secuencia de clase elaborada elimina esto. También, suele dejarse de lado la interpretación relacionada a la cuadratura cuando se desarrolla el Teorema del valor medio, centrándose únicamente en el cálculo de dicho valor o valores, según sea la naturaleza de la función y el intervalo proporcionado.

En cuanto a la generalización de los resultados de esta investigación, en un primer momento, podrían concebirse como válidos solamente para los estudiantes de VII semestre; sin embargo, los estudiantes de semestres inferiores inmersos en el plan de estudios vigente presentarán similares características al inicio del curso de Análisis Matemático II debido a que desarrollan la secuencia de cursos y contenidos similares y, en ocasiones, con el mismo docente en cada curso. Por estas razones, los resultados de esta investigación pueden ser de relevancia teórica para el docente a cargo de desarrollar la asignatura de Análisis Matemático II en el futuro.

El estudio presentado pone en juego los aportes teóricos de Michèle Artigue en torno a la Ingeniería Didáctica que, en otras investigaciones, ha sido utilizada como metodología de investigación, no obstante, aquí ha servido como método de elaboración de secuencias de clase a partir de los análisis preliminares y del análisis a priori. Logrando así, probar su eficiencia y eficacia en la mejora del aprendizaje significativo de la integral definida a través de la modalidad virtual o remota y que icluso posiblemente pueda tener mayores efectos positivos si se aplica en un contexto presencial. Por lo cual se sugiere que la investigación pueda ser replicada y, de ser posible, mejorada en las diferentes instituciones de educación universitaria.

5.4.2. ***Aportes prácticos***

Con la ejecución de la investigación se ha verificado que la teoría planteada por Michèle Artigue optimiza la práctica pedagógica en el aula a través de una metodología estructurada y no únicamente basando el trabajo docente en cuestiones empíricas de las cuáles no necesariamente se haya probado estadísticamente su efectividad.

También es necesario mencionar que una de las cuestiones de mayor demanda actual, como se sustentó en el capítulo I, es el aprendizaje de conceptos en Matemática tanto a nivel secundario como en la educación superior universitaria; en ese sentido, a través de esta investigación se ha visualizado el nivel de influencia que tiene la Ingeniería Didáctica en la dimensión 2 (aprendizaje de conceptos), de modo que surge como una estrategia metodológica muy útil para hacer frente a esta debilidad en la enseñanza de la Matemática, tanto en educación básica como en educación superior universitaria.

CONCLUSIONES

Se concluye que la Ingeniería Didáctica tiene alta influencia en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Se afirma esto en función a la prueba t de Student y el p-valor $p = 0.000 < 0.05$ obtenido en el grupo experimental (diferencia significativa), frente al p-valor $p = 0.059 > 0.05$ obtenido en el grupo control (diferencia no significativa), esto se corrobora en el incremento porcentual de las medias, la cual fue mayor en el grupo experimental que en el grupo control, ya que en ambos casos hubo una diferencia positiva en la media a favor de la posprueba, pero dicha diferencia fue de 1.15 en el grupo control, lo cual representa una mejora del 34.7%, frente a una diferencia de 3.07 en el grupo experimental, lo cual representa una mejora del 84.8%.

Se determinó que la Ingeniería Didáctica tiene alta influencia en el aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Se afirma esto en función a la prueba de Wilcoxon y el p-valor $p = 0.002 < 0.05$ obtenido en el grupo experimental (diferencia significativa), no obstante el p-valor $p = 0.002 < 0.05$ obtenido en el grupo control prueba que también la metodología usual tiene mejoras significativas en esta dimensión. Al realizar el cálculo del incremento porcentual de las medias, en el grupo experimental se tiene un incremento de 44.2% y en el grupo control un incremento de 117.4%.

Se determinó que la Ingeniería Didáctica tiene alta influencia en el aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Se afirma esto en función a la prueba de Wilcoxon y el p-valor $p = 0.005 < 0.05$ obtenido en el grupo experimental (diferencia significativa), mientras que el p-valor $p = 0.4015 > 0.05$ obtenido en el grupo control prueba que la metodología usual no genera mejoras significativas en esta dimensión. Al realizar el cálculo del incremento porcentual de las medias, en el grupo experimental se tiene un incremento de 133.9% y en el grupo control un incremento de 5.8%.

Se determinó que la Ingeniería Didáctica tiene alta influencia en el aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Se afirma esto en función a la prueba de Wilcoxon y el p-valor $p = 0.008 < 0.05$ obtenido en el grupo experimental (diferencia significativa), mientras que el p-valor $p = 1.000 > 0.05$ obtenido en el grupo control prueba que la metodología usual no genera mejoras significativas en esta dimensión. Al realizar el cálculo del incremento porcentual de las medias, en el grupo experimental se tiene un incremento de 90.1% y en el grupo control un incremento de 0%.

SUGERENCIAS

Se recomienda, a partir del estudio realizado, a los docentes de las asignaturas de matemática superior investigar sobre la influencia de la Ingeniería Didáctica como estrategia de organización de la secuencia de actividades de clase. Asimismo, utilizar la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación cualitativa.

En ese mismo sentido, se sugiere implementar mecanismos a nivel de las universidades, facultades o carreras profesionales, para el desarrollo de investigaciones que abarquen más de un semestre académico y puedan incluir incentivos académicos para los estudiantes que participan en los procesos de investigación.

Un punto importante de esta investigación es el aspecto de mejora de mayor notoriedad con la metodología usual que con la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de representaciones, aunque ambas fueron significativas, podría ser tema de futuras investigaciones el análisis a profundidad en dicha dimensión.

El presente trabajo fue realizado en un contexto de clases remotas, de modo que se podrían hacer investigaciones en el futuro para contextos de clases presenciales y evaluar si existe mayor o menor influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo de la integral definida o de otros conceptos desarrollados en la asignatura de Análisis Matemático II.

Por último, pueden realizarse cursos de formación o capacitación dirigidos a docentes sobre el nivel de influencia de la Ingeniería Didáctica en el Aprendizaje, de modo que la presente investigación serviría como insumo teórico y demostrativo para tales fines.

REFERENCIAS

Acuña, L., Arias, N., Castro, J., Flores, R., Galvis, D., Gómez, D., Pinzón, M., Rojas, L., Valencia, L. y Zea, L. (2016). *Aprendizaje, cognición y mediaciones en la escuela.* Taller de edición Rocca S.A.

Adler, F. (1964). *"Positivismo" en oro. En W.L.J y Kolb. Un diccionario de las ciencias sociales.* The Free Press.

Alfaro, C., Gamboa, R. y Ruiz, A. (2003). Aprendizaje de las Matemáticas: Conceptos, Procedimientos, Lecciones y Resolución de Problemas. *Uniciencia, 20*(2), 285-296. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/5744

Alpízar, M., Chavarría, J. y Ruíz, A. (2003). La Escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. *UNICIENCIA, 20*(2). https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6883/6569

Angulo, M., Arteaga, E. y Carmenates, O. (mayo de 2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática. *Conrado, 16*(74), 298-305. http://scielo.sld.cu/pdf/rc/v16n74/1990-8644-rc-16-74-298.pdf

Areán, L. (2012). *Fermat. El problema más difícil del mundo.* National Geographic. Editec.

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación.* Editorial Iberoamericana.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* Trillas.

Baptista, P., Fernández, C. y Hernández, R. (2016). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). Interamericana.

Belloch, C. (2012). *Las Tecnología de la Información y Comunicación en el Aprendizaje. Material docente [on-line]*. Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Universidad de Valencia.: https://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA1.pdf

Belluchi, M. (4 de junio de 2020). *Las cinco mejores plataformas para dar clases virtuales.* El Clarín: https://www.clarin.com/tecnologia/tech/mejores-plataformas-dar-clases-virtuales_0_Gz5fLvFzf.html

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics* (2da ed.). Alianza editorial.

Bruner, J. (1988). *Desarrollo educativo y educación.* Morata.

Cano, C. y Hernández, S. (2009). *La evaluación del aprendizaje en ambiente virtuales [congreso].* X Congreso Nacional de Investigación Educativa: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_07/ponencias/0275-F.pdf

Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática. (2017). *Diseño Curricular de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática.* Facultad de Educación UNCP.

Carrera, J. (2012). *Euclides. Las Matemáticas presumen de figura.* National Geographic. Editec.

Castro, E., Estrella, M., Fernández, J., Martin, E., Rico, L., Ruiz, J. y Vilchez, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. *Investigación en Educación Matemática XX. SEIEM*, 237-246. doi:https://core.ac.uk/download/pdf/83544157.pdf

Courant, R. y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la Matemática?* Aguilar s a de ediciones.

Cronbach, L. (1972). *La dependencia de las medidas de la conducta. Teoría de la generalización de puntuaciones y perfiles.* Wiley.

De Alvarado, E., De Canales, F. y Pineda, E. (1994). *Metodología de la investigación. Manual para el desarrollo de la salud* (2da ed.). Organización Panamericana de la Salud.

De Faria, E. (2008). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(2), 1-9. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6887

Diaz, J. (2011). *Análisis de la Matemática desarrollada entre los ríos Tigris y Éufrates, desde el cuarto milenio antes de Cristo hasta la caída de Babilonia [Investigación de pregrado].* Universidad Nacional del Centro del Perú.

Dirección de Gestión e Innovación Académica. (2021). *Modelo Educativo UNCP*. Vicerrectorado Académico.

Domínguez, G. y Vera, J. (2006). Comunicación e información como generadores de competitividad. *Contaduría y Administración*(220), 207-229.

Durán, A. (2012). *Newton. La fuerza más atractiva del universo.* National Geographic. Editec.

Fernández, E. (2012). *Arquímedes. ¡Eureka! El placer de la invención.* National Geographic. Editec.

Flores, R. (1999). *Evaluación pedagógica y cognición.* McGraw Hill.

Gagné, R. (1979). *Las condiciones del aprendizaje.* Editorial Interamericana.

Galileo, U. (2020). *Evaluaciones en línea. Planteamientos, consideraciones y alternativas para profesores.* GES: https://www.galileo.edu/page/wp-content/uploads/2020/04/Evaluaciones-en-li%CC%81nea-planteamientos-consideraciones-y-alternativas-para-profesores.pdf

Gobierno del Perú. (5 de febrero de 2021). *Coronavirus en el Perú: casos confirmados*. Plataforma única digital del Estado Peruano: https://www.gob.pe/8662-coronavirus-en-el-peru-casos-confirmados

Gómez, M. (2018). *10 plataformas educativas donde podrás crear cursos virtuales*. E-Learning Masters: http://elearningmasters.galileo.edu/2018/03/15/10-plataformas-educativas-donde-podras-crear-cursos-virtuales/

González, S. (2014). La investigación y su aporte al conocimiento: La experiencia de Enfermería en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la UNAM. *Enfermería universitaria, 11*(2), 45-46. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-70632014000200001

González, W. y Hernández, L. (2000). Tecnología y técnica: tres perspectivas. *Historia y Filosofía de la Ciencia, 9*(1), 6-19.

Goodwill Community Foundation [GFC]. (2021). *Introducción a las plataformas virtuales educativas*. GFCAprendeLibre: https://edu.gcfglobal.org/es/educacion-virtual/introduccion-a-las-plataformas-virtuales-educativas/1/

Huenemann, C. (2012). *Understanding Rationalism.* (J. Wainberg, Trad.) Editora Vozes.

Kremer, A. (2010). *El positivismo* (2da ed.). Publicaciones Cruz O.

La 2 de Televisión Española. (22 de setiembre de 2010). Pitágoras, mucho más que un Teorema [Video]. RTVE. https://www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/universo-matematico-pitagoras-mucho-mas/884344/

Machado, I., Ojeda, J. y Quintero, J. (2007). La ética en la investigación. *Revista de Estudios Interdisciplinarios en Ciencias Sociales*, *9*(2), 345-357. https://www.redalyc.org/pdf/993/99318750010.pdf

Manterola, M. (1998). *Psicología educativa: Conexiones con la sala de clases.* Ediciones Universidad Católica Blas Cañas.

Marcolini, J. (2003). *Ingeniería Didáctica en Física Matemática.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Didáctica de las Cencias Experimentales.

Marker, G. (24 de junio de 2020). *¿Qué es el Bit? ¿Qué es el Byte?* Tecnología + Informática: https://www.tecnologia-informatica.com/que-es-el-bit-byte/

Martí, M. (2017). La filosofía de las Matemáticas de Aristóteles. *Tópicos*(52), 43-66. doi:https://doi.org/10.21555/top.v0i52.784

Maza, C. (2007). *Matemáticas en Mesopotamia.* Editorial Síntesis.

Melo, S. (16 de mayo de 2018). *¿Qué es y cómo funciona la nube?* DataScope: https://mydatascope.com/blog/es/que-es-y-como-funciona-la-nube/

Ministerio de Educación [MINEDU]. (1 de abril de 2020). *Resolución Viceministerial N° 087-2020-MINEDU.* https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/574851/RVM_N__087-2020-MINEDU__1_.PDF

Ministerio de Tecnologías de Información y Comunicaciones [MINTIC]. (30 de julio de 2009). Ley 1341. https://www.mintic.gov.co/portal/604/articles-3707_documento.pdf

Muñóz, J. (2013). *Leibniz. La Física aprende un nuevo idioma.* National Geographic. Editec.

Murphy, N. (2005). La historia del uno.

Newton, I. (1729). *Philophiae naturalis principia mathematica.* (A. Motte, Trad.) University of California Press.

Niño, V. (2011). *Metodología de la investigación. Diseño y ejecución.* Ediciones de la U.

Novales, A. (2010). *Análisis de Regresión.* (D. d. Madrid, Ed.). https://www.ucm.es/data/cont/docs/518-2013-11-13-Analisis%20de%20Regresion.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO]. (27 de setiembre de 2017). *9 Teorías del Aprendizaje más influyentes*. Educar21: https://educar21.com/inicio/2017/09/27/teorias-de-aprendizaje-mas-influyentes/

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO]. (2019). *Las TIC en Educación*. https://es.unesco.org/themes/tic-educacion

Organización Mundial de la Salud [OMS]. (27 de abril de 2020). COVID-19: cronología de la actuación de la OMS: https://www.who.int/es/news/item/27-04-2020-who-timeline---covid-19

Padrón, C. (2002). Administración, ciencia, técnica y tecnología. *Contaduría y administración*(205), 27-35. https://www.redalyc.org/pdf/395/39520504.pdf

Paoli, J. (1990). *Comunicación e información: perspectivas teóricas.* Editorial Trillas.

Piñeiro, G. (2014). *Riemann. La geometría traspasa fronteras.* National Geographic. Editec.

Quintanilla, M. (1998). Técnica y cultura. *Teorema: Revista Internacional de Filosofía, 17*(3), 49-69. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4253305

Real Academia Española [RAE]. (2021). *Diccionario de la lengua española*. Obtenido de https://dle.rae.es/

Rendón, M. (2005). Relación entre los conceptos: información, conocimiento y valor. Semejanzas y diferencias. *Ci. Inf. Brasilia, 34*(2), 52-61. https://www.scielo.br/pdf/ci/v34n2/28555.pdf

Rivera, J., y Vides, S. (2015). La Ingeniería didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística. *Omnia, 21*(2), 96-104. https://www.redalyc.org/pdf/737/73743366007.pdf

Sánchez, M. (14 de marzo de 2017). *9 herramientas online de pizarras virtuales*. Classonlive: https://www.classonlive.com/blog/9-herramientas-online-de-pizarras-virtuales-Infografia

Serrano, M. (1990). *El proceso de enseñanza aprendizaje.* Talleres gráficos universitarios ULA.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendetes tempranas* (7ma ed.). Cengage learning editores.

Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria [SUNEDU]. (27 de marzo de 2020). *Resolución del Consejo Directivo N° 039-2020-SUNEDU-CD.* https://www.sunedu.gob.pe/resolucion-del-consejo-directivo-n-039-2020-sunedu-cd/

Tobón, S. (2006). *Formación basada en Competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica* (2da ed.). Ecoe ediciones.

Tobón, S. (2008). *La Formación basada en Competencias en la Educación Superior. El enfoque complejo.* Repositorio UDGVirtual: http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/3491

Tyler, R. (1950). *Principios básicos del currículo e instrucciones.* Chicago University.

Universidad Internacional de Valencia [VIU]. (08 de julio de 2015). *Las aulas virtuales: un nuevo concepto de educación a distancia*.

https://www.universidadviu.com/es/actualidad/nuestros-expertos/las-aulas-virtuales-un-nuevo-concepto-de-educacion-distancia

ViewSonic. (23 de diciembre de 2019). *Pizarras en línea y virtuales: Pensamientos de 3 oradores de Bett*. Library: https://www.viewsonic.com/library/es/educacion/pizarras-en-linea-y-virtuales-pensamientos-de-3-oradores-de-bett/

Winicki, G. (2006). Las definiciones en Matemáticas y los procesos de su Formulación: Algunas reflexiones. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 19*.

Zapata, M. (2015). Teorías y modelos sobre el aprendizaje en entornos conectados y ubicuos. Bases para un nuevo modelo teórico a partir de una visión crítica del "conectivismo". *Education in the knowledge society*, *16*(1), 69-102. doi:https://doi.org/10.14201/eks201516169102

ANEXOS

ANEXO 01

MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: INFLUENCIA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO REMOTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

<table>
<tr><th></th><th>PREGUNTAS</th><th>OBJETIVOS</th><th>HIPÓTESIS</th><th colspan="4">VARIABLES, DIMENSIONES E INDICADORES</th><th>METODOLOGÍA</th><th>POBLACIÓN Y MUESTRA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">GENERAL</td><td rowspan="2">¿De qué manera influye la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?</td><td rowspan="2">Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.</td><td rowspan="2">La Ingeniería Didáctica influye significativamente en el aprendizaje significativo remoto de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.</td><td>VARIABLES</td><td>DIMENSIONES</td><td>INDICADORES</td><td>ÍTEMS</td><td rowspan="5">TIPO DE INVESTIGACIÓN
Experimental

NIVEL DE INVESTIGACIÓN
Aplicativo

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN
Cuasi experimental

Preprueba y posprueba con un grupo experimental (GE o G_1) y otro de control (GC o G_2).

Esquema
Preprueba Posprueba
RG_1 O_1 X O_2</td><td rowspan="5">POBLACIÓN
Estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

MUESTRA
Por las características de la Investigación la muestra es censal y probabilística, constituida por los 26 estudiantes del VII semestre (13 del GE y 13 deL GC)

TÉNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{V.I.}$
La Ingeniería Didáctica</td><td>Didáctico</td><td>• La secuencia de clase es coherente con el Enfoque por Competencias.
• Analiza el tópico en libros o materiales consignados en el sílabo.</td><td>1 – 3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ESPECÍFICAS</td><td rowspan="2">¿Cómo influye la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?</td><td rowspan="2">Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.</td><td rowspan="2">La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de representaciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.</td><td>Epistemológico</td><td>• Analiza la evolución histórica del concepto.
• Explicita el tiempo que pasó desde la aparición de un concepto hasta su formalización.</td><td>4 – 7</td></tr>
<tr><td>Cognitivo</td><td>• Clasifica el tipo de errores de los estudiantes en tópicos previos.
• Selecciona partes del tópico a incluir o no en la secuencia de clase.</td><td>8 – 10</td></tr>
<tr><td>¿Cómo influye la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias</td><td>Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias</td><td>La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de conceptos de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias</td><td>$\boldsymbol{V.D.}$</td><td>Aprendizaje de representaciones</td><td>• Codifica frases de contexto matemático.</td><td>1 – 3</td></tr>
</table>

	Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?	Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.	Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.	Aprendizaje significativo remoto		• Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.		$RG_2 \quad O_3 \quad - \quad O_4$	Cuestionario, Preprueba y Posprueba
					Aprendizaje de conceptos	• Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación. • Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4 – 7	O_1, O_3: Puntaje inicial (Preprueba) O_2, O_4: Puntaje final (Posprueba) X: Variable independiente	**TRATAMIENTO ESTADÍSTICO** Selección del software estadístico. Evaluación del nivel de confiabilidad y validez Análisis estadístico inferencial de hipótesis.
	¿Cómo influye la Ingeniería Didáctica en la dimensión aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú?	Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.	La Ingeniería Didáctica influye significativamente en la dimensión aprendizaje de proposiciones de la integral definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.		Aprendizaje de proposiciones	• Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos. • Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	8 – 10		

ANEXO 02

CONSENTIMIENTO INFORMADO

ID: **FECHA:**

TÍTULO: INFLUENCIA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO REMOTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

OBJETIVO: Determinar el grado de influencia de la Ingeniería Didáctica en el aprendizaje significativo remoto de la Integral Definida en los estudiantes del VII semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

INVESTIGADOR: Jimmi Jonatan Diaz Solano

Consentimiento / Participación voluntaria

Acepto participar en el estudio: He leído la información proporcionada, o me ha sido leída. He tenido la oportunidad de preguntar dudas sobre ello y se me ha respondido satisfactoriamente. Consiento voluntariamente participar en este estudio y entiendo que tengo el derecho de retirarme en cualquier momento de la intervención (tratamiento) sin que me afecte de ninguna manera.

Firmas del participante o responsable legal

Huella digital si el caso lo amerita

Firma del Participante:

Firma del Investigador Responsable:

Huánuco, 2021

ANEXO 03

AUTORIZACIÓN

SOLICITO: **Autorización para aplicar Proyecto de Tesis en la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación.**

SEÑOR DIRECTOR DE DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DEL PERÚ – HUANCAYO

S.R.:

Mediante el presente documento, yo Jimmi Jonatan DIAZ SOLANO identificado con D.N.I. n° 44436159 y con domicilio en Jr. Trujillo n° 170, La Victoria, C.U., El Tambo, Huancayo, a usted respetuosamente me presento y digo:

Que, estando cursando el último curso del doctorado en la Universidad Nacional Hermilio Valdizán de la ciudad de Huánuco y habiendo sido aprobado e inscrito mi Proyecto de Tesis Doctoral titulado "Influencia de la Ingeniería Didáctica en el Aprendizaje Significativo Remoto de la Integral Definida" solicito a su persona **autorice la aplicación de mi Proyecto de Tesis en la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú**, en tal sentido se ha planificado utilizar las horas de trabajo asíncrono (en el horario de clase) del curso de Análisis Matemático II para no afectar el normal desempeño de las labores de clase.

Inicio:	7 de junio del 2021
Término:	30 de julio del 2021
Muestra:	VII semestre – CMI

Día	Hora
Lunes:	7:00 pm – 8:30 pm
Jueves:	5:45 pm – 7:15 pm

POR LO EXPUESTO:

Señor Director, pido a usted acceder a mi petición. Es justicia que espero alcanzar.

Adjunto:

- Resolución de aprobación de Proyecto de Tesis

Huancayo, 26 de mayo del 2021

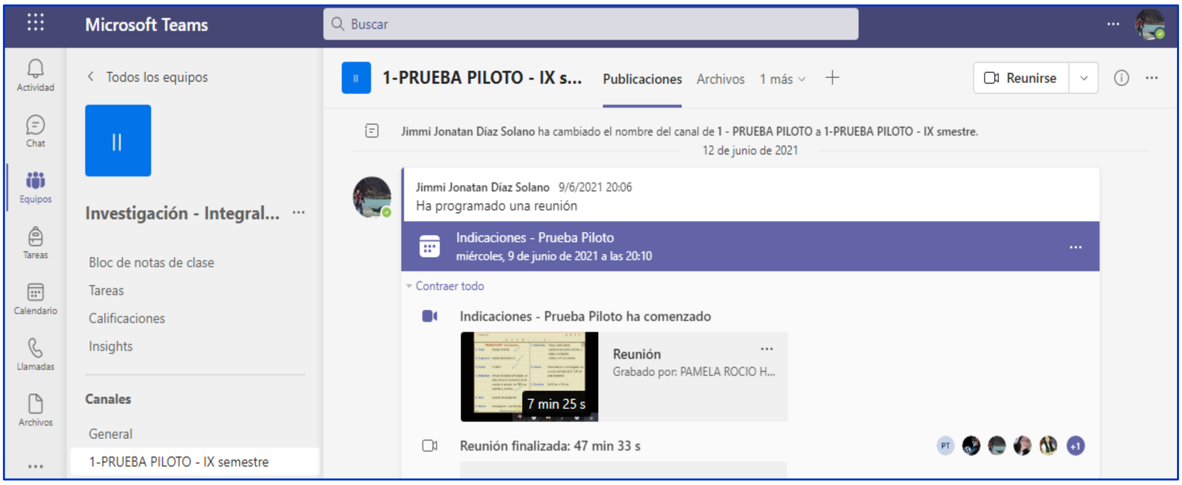
Jimmi Jonatan DIAZ SOLANO
D.N.I. n° 44436159

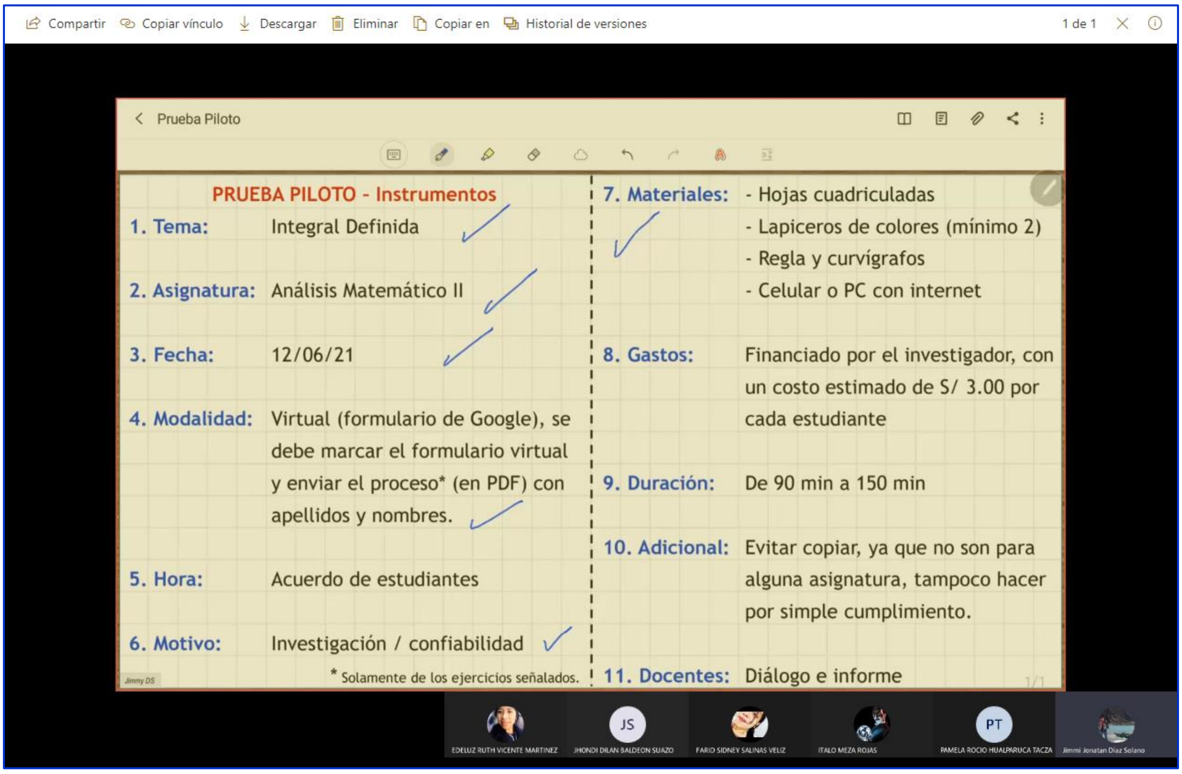
APROBADO
07 / 06 / 21

Dr. Luis Orlando Huaytalla Torres
DIRECTOR DE DEPARTAMENTO ACADÉMICO
FACULTAD DE EDUCACIÓN

ANEXO 04

PRUEBA PILOTO





PREPRUEBA

jlaker.ds@gmail.com Cambiar cuenta

*Obligatorio

Correo electrónico *

Tu dirección de correo electrónico

Apellidos y Nombres *

Tu respuesta

Código Universitario UNCP (completo) *

Tu respuesta

Semestre actual (2021 - I) *

- ○ Séptimo
- ○ Noveno

COMPROMISO: Al resolver este examen, acepto ser parte del proceso de investigación y me comprometo resolver de forma transparente, ya que NO tendrá repercusiones con mis calificaciones de ninguna asignatura. *

- ☐ Acepto

VALORACIÓN: Cada ítem tiene un valor de 1 punto en caso de ser la respuesta correcta, y será de 0 puntos si la respuesta es incorrecta. *

- ☐ Acepto

Siguiente Página 1 de 4 Borrar formulario

POSPRUEBA

jlaker.ds@gmail.com Cambiar cuenta

*Obligatorio

Correo electrónico *

Tu dirección de correo electrónico

Apellidos y Nombres *

Tu respuesta

Código Universitario UNCP (completo) *

Tu respuesta

Semestre actual (2021 - I) *

- ○ Séptimo
- ○ Noveno

COMPROMISO: Acepto resolver de manera transparente este examen, debido a que NO tendrá repercusiones con mis calificaciones de ninguna asignatura y culmino mi participación en el proceso de investigación. *

- ☐ Acepto

VALORACIÓN: Cada ítem tiene un valor de 1 punto en caso de ser la respuesta correcta, y será de 0 puntos si la respuesta es incorrecta. *

- ☐ Acepto

Siguiente Página 1 de 4 Borrar formulario

ANEXO 05

INSTRUMENTOS (PREPRUEBA)

Apellidos y Nombres: *Puntaje*

Centro de formación superior: ***Universidad Nacional del Centro del Perú***

Facultad ***Educación*** Semestre Fecha

Instrucciones: *Estimado estudiante, en cada pregunta marque la alternativa que usted considere correcta, el valor asignado para cada respuesta correcta es de 2 puntos. (Su calificación será únicamente utilizada para fines investigativos bajo responsabilidad del investigador).*

D1: Aprendizaje de representaciones

Ítem 1. La siguiente suma:

$$(1^2-2)+(2^2-3)+(3^2-4)+\cdots+(7^2-8)$$

Puede representarse como:

a) $\sum_{i=1}^{7}(i^2-i+1)$

c) $\sum_{i=2}^{8}[(i-1)^2-i]$

b) $\sum_{i=0}^{6}[(i+1)^2-i]$

d) $\sum_{i=1}^{7}(i^2-2i)$

Ítem 2. La propiedad:

Siendo f una función contínua en $[a;b]$, tal que $c\in[a;b]$, se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

También puede ser descrita como:

a) La suma de dos integrales de la función f es siempre una integral

b) Si f es una función integrable en $[a;c]$ y en $[c;b]$, entonces es integrable en $[a;b]$

c) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones.

d) Si f es una función contínua en $[a;b]$, entonces también es contínua en $[a;c]$ y $[c;b]$

Ítem 3. Si se reemplaza al símbolo $\int$ con el término "área", en la propiedad:

Siendo f una función contínua en el intervalo $[-a; a]$ y $f(x) = f(-x)$, se cumple:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

¿Qué alternativa describe de mejor manera a dicha propiedad?

a) El área de la región determinada por la función impar f desde $-a$ hasta 0 es igual a la mitad al área determinada por f desde $-a$ hasta a.

b) Si se tiene una función contínua en $[-a; a]$, entonces el área determinada por f y el eje horizontal en $[-a; 0]$ será la mitad del área determinada por f, el eje horizontal y $[-a; a]$.

c) A partir de una función f (continua e impar), el área determinada por f desde $-a$ hasta 0 es igual a la mitad del área determinada.

d) El área determinada por el eje X y una función contínua y par desde $-a$ hasta 0 es igual a la mitad del área determinada por la función f desde $-a$ hasta a.

D2: Aprendizaje de conceptos

Ítem 4. Determine el área de la región limitada por el intervalo $[-1; 1]$, el eje X y la gráfica de la función f, si esta última posee como regla de correspondencia a $f(x) = x^3$.

a) $0\ u^2$ b) $0.45\ u^2$ c) $0.5\ u^2$ d) $0.75\ u^2$

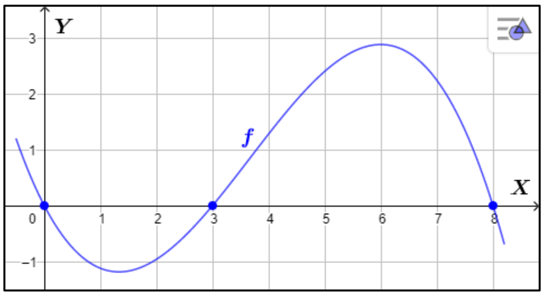
Ítem 5. Una vela de $12\ cm$ es sometida a la acción de mínimo viento, de modo su altura disminuye a razón de $(2t)\ mm$ cada minuto (t: tiempo). Determine la altura que tendrá la vela al cabo de $10\ min$.

a) $1.5\ cm$ b) $2\ cm$ c) $2.5\ cm$ d) $3\ cm$

Ítem 6. Dada la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = x^2$. Determine el área, mediante sumas superiores, que generan 4 rectángulos cuya base es la misma y cubren exactamente el intervalo $[0; 2]$.

a) $2.75\ u^2$ b) $3.25\ u^2$ c) $3.75\ u^2$ d) $4.25\ u^2$

Ítem 7. Para la función f cuya gráfica se muestra, determine cuál de las siguientes expresiones posee el mayor valor.



a) $\int_0^8 f(x)\,dx$ b) $\int_0^3 f(x)\,dx$ c) $\int_3^8 f(x)\,dx$ d) $\int_4^8 f(x)\,dx$

D3: Aprendizaje de proposiciones

Ítem 8. Elija la alternativa que combina de manera adecuada (en un contexto matemático) algunos de los siguientes conceptos: Función contínua, área, sumas inferiores, sumas superiores, cuadrante.

a) Si una función contínua f posee una gráfica que se sitúa sobre el primer y tercer cuadrante, entonces se verifica $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx > \int_0^3 f(x)\,dx$

b) Si f es una función contínua cuya gráfica está ubicada en los cuadrantes I y II, entonces $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ siempre representa al área limitada por la gráfica de f, $y = -2$, $y = 3$ y el eje X.

c) La región entre $f > 0$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$ mediante sumas superiores tiene igual área que con sumas inferiores (con igual número de rectángulos), entonces la función es constante.

d) Si f es una función contínua, entonces el cálculo del área con sumas superiores siempre es mayor que el área calculada mediante sumas inferiores.

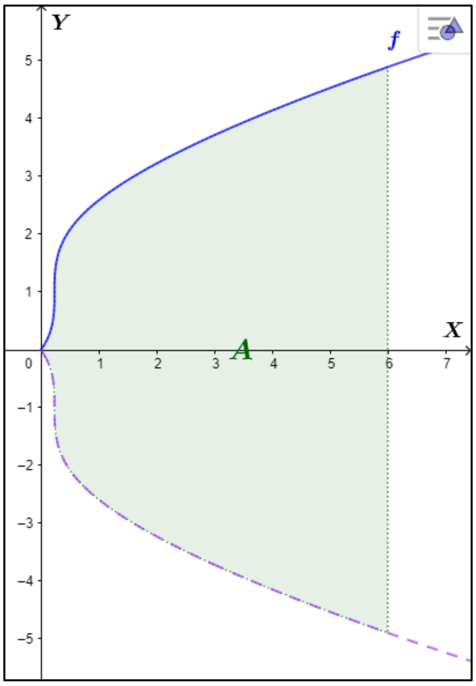
Ítem 9. La gráfica de la función f se refleja sobre el eje X, de modo que se muestra la región comprendida entre ellas. Elija la alternativa que posee una afirmación verdadera.

a) El valor del área A de la región sombreada se podrá calcular mediante $\int_0^6 f(x)\,dx$

b) El valor del área de la región sombreada se podrá calcular mediante $3 \cdot \int_0^6 f(x)\,dx$

c) El valor del área A de la región sombreada se podrá calcular mediante $\int_0^6 2 \cdot f(x)\,dx$

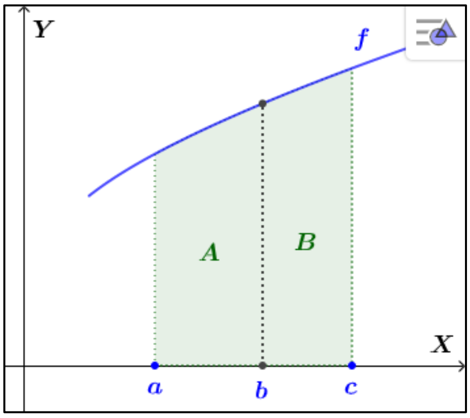
d) El valor del área de la región sombreada se podrá calcular mediante $\int_0^{12} f(x)\,dx$



Ítem 10. Una función f contínua en el intervalo $[a; c]$ verifica la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$$

Dicha propiedad puede representarse de forma gráfica como sigue:



Elige la alternativa que contiene una afirmación verdadera:

a) Es un caso particular en el que las áreas sombreadas no son iguales, es decir, $A \neq B$

b) El segmento de extremos $(a; 0)$ y $(c; 0)$ tiene como punto medio a $(b; 0)$.

c) Se verifica que $2 \cdot \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

d) Al desarrollar la equivalencia planteada en el enunciado, se prueba que $a + b = c + 1$.

ANEXO 06

POSPRUEBA

Apellidos y Nombres: *Puntaje*

Centro de formación superior: ***Universidad Nacional del Centro del Perú***

Facultad ***Educación*** Semestre Fecha

Instrucciones: *Estimado estudiante, en cada pregunta marque la alternativa que usted considere correcta, el valor asignado para cada respuesta correcta es de 2 puntos. (Su calificación será únicamente utilizada para fines investigativos bajo responsabilidad del investigador).*

D1: Aprendizaje de representaciones

Ítem 1. Exprese como una sumatoria la siguiente suma:

$$\frac{3}{3^3-1}+\frac{5}{4^3-2}+\frac{7}{5^3-3}+\cdots+\frac{15}{9^3-7}$$

a) $\sum_{i=3}^{9}\frac{i}{i^3-i+2}$

c) $\sum_{i=1}^{7}\frac{2i+1}{(i+2)^3-i}$

b) $\sum_{i=2}^{8}\frac{2i-1}{i^3-(i-2)}$

d) $\sum_{i=1}^{7}\frac{i^2+i+1}{(i+2)^3-i}$

Ítem 2. La propiedad:

Sean f y g dos funciones continuas en $[a;b]$, se cumple:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

Puede también ser descrita como:

a) La suma de dos integrales de la función f es siempre una integral

b) Si f es una función integrable en $[a;c]$ y en $[c;b]$, entonces es integrable en $[a;b]$

c) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones.

d) Si f es una función contínua en $[a;b]$, entonces también es contínua en $[a;c]$ y $[c;b]$

Ítem 3. Dada la propiedad:

Si f es una función contínua en el intervalo $[-n;n]$, $(n\neq 0)$ y $f(x)+f(-x)=0$, se cumple:

$$\int_0^{-n} f(x)\,dx = \int_0^{n} f(x)\,dx$$

Elije la alternativa que mejor la describe.

a) Si f es una función contínua e impar, entonces la integral definida de f desde 0 hasta $-n$ será igual a la integral desde 0 hasta n.

b) Si f es una función contínua y par, entonces la integral definida de f desde 0 hasta $-n$ será igual a la integral desde 0 hasta n.

c) Dada una función f (contínua e impar) en el intervalo $[-n; n]$, la integral de f desde 0 hasta n probará que $n = -n$.

d) Dada una función f (contínua y par) definida en $[-n; n]$, la integral de f desde $-n$ hasta 0 tendrá valor opuesto a la integral de f desde 0 hasta n.

D2: Aprendizaje de conceptos

Ítem 4. Sea f una función contínua que verifica $f(x) - f(-x) = 0$, tal que

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 5 \quad ; \quad \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 3.5$$

Determine el valor de:

$$\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

a) 1.5 b) 2 c) 2.5 d) 3

Ítem 5. La velocidad de crecimiento de cierto arbusto durante 6 años está dada por $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{2}t + \frac{13}{2}$ (t en años y h en centímetros). Al ser plantados, estos arbustos miden $15\ cm$ de altura y después de 6 años son vendidos. ¿Qué altura poseen dichos arbustos al momento de ser vendidos?

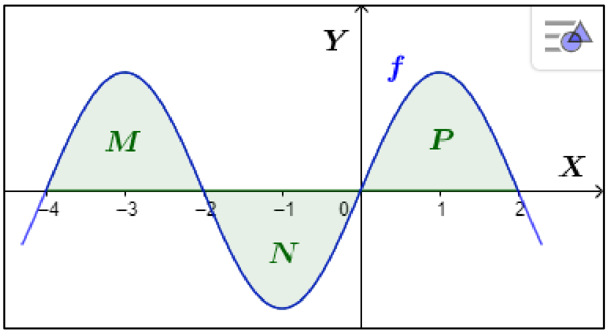
a) $72\ cm$ b) $81\ cm$ c) $84\ cm$ d) $96\ cm$

Ítem 6. Dada la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = x^2 + 1$. Determine el área, mediante sumas inferiores, que generan 4 rectángulos cuya base es la misma y cubren exactamente el intervalo $[0; 2]$.

a) $2.75\ u^2$ b) $3.25\ u^2$ c) $3.5\ u^2$ d) $3.75\ u^2$

Ítem 7. Cada una de las regiones M, N y P, limitadas por la gráfica de f y el eje X, tiene área $2\ u^2$. Calcule el valor de:

$$\int_{-4}^{2} [f(x) - 2x + 3]\, dx$$



a) 34 b) 33 c) 32 d) 30

D3: Aprendizaje de proposiciones

Ítem 8. Elija la alternativa que combina de manera adecuada (en un contexto matemático) algunos de los siguientes conceptos: Integral definida, función contínua, función par, función impar.

a) Si f es una función contínua pero no par, entonces jamás se cumple que la integral definida de f desde $-a$ hasta 0 es igual a la integral definida de f desde 0 hasta a.

b) Si f es una función contínua y par, entonces la integral definida de f desde $-a$ hasta a es igual al doble de la integral definida de f desde 0 hasta a.

c) Si f es una función contínua, tal que el valor negativo de la integral definida de f desde $-a$ hasta 0 es igual a la integral definida de f desde 0 hasta a, entonces la función f es impar.

d) Si f es una función contínua, tal que el valor de la integral definida de f desde $-a$ hasta 0 es igual a la integral definida de f desde 0 hasta a, entonces la función f es par.

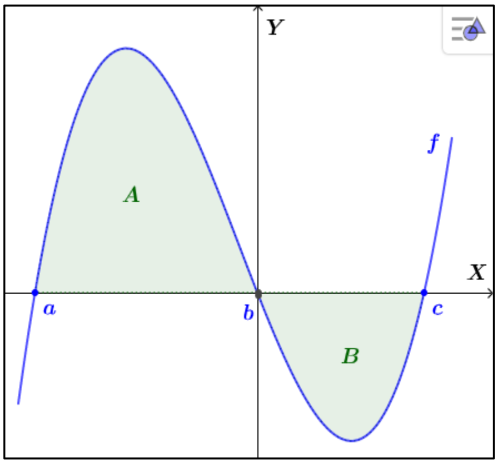
Ítem 9. A partir de la gráfica mostrada se verifica que $A = \frac{9}{4} \cdot B$. Elige la alternativa que posee la afirmación verdadera.

a) Si f es una función contínua en el intervalo $[a; b]$, entonces la función en el intervalo $[b; c]$ presenta alguna discontinuidad.

b) Si f es una función contínua en $[a; c]$, se verificará $4 \cdot \int_a^b f(x)\, dx + 9 \cdot \int_b^c f(x)\, dx = 0$.

c) Si f es una función contínua en $[a; c]$, se verificará $4 \cdot \int_a^b f(x)\, dx = 9 \cdot \int_b^c f(x)\, dx$.

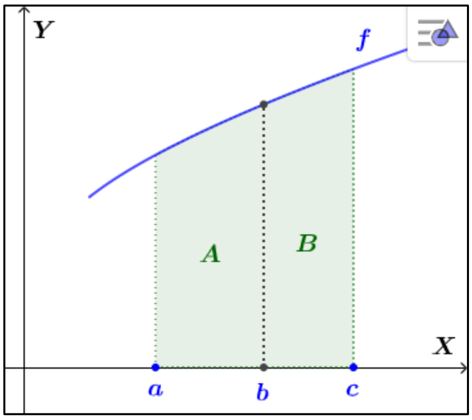
d) Si f es una función contínua, se verificará $4(b - a) = 9(c - b)$



Ítem 10. Una función f contínua en el intervalo $[a; c]$ verifica la siguiente propiedad:

$$\int_a^c f(x)\,dx = f(b)\cdot(c-a)$$

Dicha propiedad puede representarse de forma gráfica como sigue:



Elige la alternativa que contiene una afirmación verdadera:

a) Se cumple que las áreas de las regiones sombreadas son iguales, es decir, $A = B$.

b) El área mediante sumas superiores desde a hasta b será igual al área con sumas inferiores desde b hasta c.

c) El segmento de extremos $(a; 0)$ y $(c; 0)$ será la base y $f(b)$, la altura, de un rectángulo que posee área igual a $A + B$.

d) Se verifica que $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = 0$.

ANEXO 07

SESIONES DE CLASE (GE)

Sesión 1: Geometría de la regla y compás

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Geometría de la regla y el compás				
Semestre:	VII	**Fecha:**	22/06/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Explica el procedimiento para determinar polígonos regulares, partiendo de las construcciones básicas de rectas paralelas y perpendiculares.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida al proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se comenta sobre los problemas relacionados al uso de la regla y el compás, además de la curiosidad generada en los antiguos griegos.	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se indica sobre las características de una regla no graduada (no permite medir) y un compás, para proponer soluciones creativas con esa limitación de los instrumentos. • Se lee la redacción del proceso de construcción de una paralela a una recta dada y, conjuntamente con los estudiantes, se realiza el proceso gráfico en la pizarra virtual. • Se ejecuta el proceso gráfico de la construcción de una perpendicular a una recta dada y se invita a los estudiantes a realizar la redacción del proceso, con la finalidad de que el estudiante se familiarice con la redacción en Matemática. • Se invita a los estudiantes a realizar el procedimiento gráfico y la redacción del proceso de construcción de: - Un triángulo equilátero cuyo lado es un segmento dado (ejercicio básico). - Un cuadrado cuyo lado es un segmento dado (ejercicio con mayor demanda cognitiva). • Se realizan las aclaraciones sobre los procedimientos realizados por los estudiantes en los dos ejercicios solicitados.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se proyecta un video referido a la construcción de un polígono regular de 17 lados, realizado por Karl Friedrich Gauss; esto con la finalidad de analizar el nivel de avance logrado por Gauss en el uso de la regla y el compás. • Se brindan las indicaciones para elegir y resolver 2 de los 5 ejercicios adicionales que figuran en el Manual de ejercicios brindado a todos los estudiantes de este grupo, acción que fue realizada antes del inicio de las sesiones de clase. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a visualizar el video completo de 'Universo Matemático: Gauss, de lo real a lo imaginario ' para posteriormente evaluar el nivel de avance de la Matemática en periodos antiguos.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Youtube.	15

Sesión 2: Cuadraturas

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Cuadraturas				
Semestre:	VII	**Fecha:**	24/06/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Utiliza el problema de las cuadraturas para la comprensión del método de exhaución de Eudoxo y desarrollado por Arquímides.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la segunda sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se hace mención de 2 de los 3 problemas clásicos relacionados al uso de la regla y el compás: La trisección del ángulo y la duplicación del cubo. • Se pregunta ¿Qué entienden por cuadratura?	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se indica una forma de concebir el término cuadratura, como la construcción de un cuadrado que tiene una región con el mismo valor del área de una figura dada previamente. • Mediante el uso de la regla y el compás y los trazos aprendidos en la sesión anterior, se determina gráficamente la cuadratura de un rectángulo, para luego invitar a los estudiantes a realizar la redacción del procedimiento ejecutado para determinar la cuadratura del rectángulo. • Con el aporte de los estudiantes se ubica el punto medio de un lado de un triángulo y a través de trazos de paralelas y perpendiculares se determina un rectángulo que encierra una región con igual área que la región triangular dada, para luego determinar su cuadratura. • Se resuelve gráficamente un ejercicio de mayor complejidad, la cuadratura de un polígono de más de 4 lados (hexágono), luego los estudiantes elaboran la redacción del proceso realizado. • Se pregunta: Si se tiene un polígono de más de 4 lados, pero diferente a 6. ¿Será similar el procedimiento realizado con el hexágono? Luego se institucionalizan las respuestas.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se comenta sobre el problema clásico de la cuadratura del círculo y se invita a los estudiantes a dar sus apreciaciones respecto a los tres problemas clásicos referidos al uso de la regla y el compás. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes indaguen sobre las demostraciones de la imposibilidad de los 3 problemas clásicos y sobre el método de exhaución usado por Arquímides para determinar la cuadratura del segmento parabólico. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 3: Sumatorias. Propiedades y fórmulas básicas

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Sumatorias. Propiedades y fórmulas básicas				
Semestre:	VII	**Fecha:**	28/06/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Resuelve problemas de contexto intra matemático y de contexto simulado, mediante el uso de las propiedades y las fórmulas de sumatorias.

Momento	**Actividades**	**Recursos y materiales**	**Tiempo (min)**
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la tercera sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se pregunta ¿Qué entienden por sumatoria? ¿Cuál es la finalidad de aprender las sumatorias en Matemática?	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se define 'Sumatoria' y con participación de los estudiantes se explicita la suma a partir de una sumatoria y viceversa, buscando la identificación de patrones. • A partir de los ejercicios resueltos y los ejercicios adicionales del manual, se distingue la importancia del uso de las propiedades con la finalidad de optimizar el tiempo empleado cuando no se utilizan las propiedades. • Se solicita el aporte de los estudiantes para la demostración de la suma de los 'n' primeros números naturales consecutivos y para el uso de las fórmulas en dos ejercicios aplicativos. • Los estudiantes resuelven ejercicios que determinan modelos que representen el valor de un sumatoria, para ello utilizan las sumas que colapsan. • Se utiliza de manera conjunta los conceptos y procedimientos anteriores para el cálculo del límite, cuando 'n' tiende al infinito, de una sumatoria con límite superior 'n'. • Se brinda un tiempo para que los estudiantes resuelvan 2 ejercicios adicionales propuestos por el docente.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se comenta que el aparente alejamiento del contexto geométrico, en referencia a las sesiones anteriores, tiene que ver con el uso conjunto de los temas anteriores y del tema actual que serán visibles en temas posteriores. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 4 ejercicios de característica intra matemática, los cuáles abarcan los procesos aprendidos en la sesión. Esto con la finalidad de una mayor familiarización con el tópico desarrollado. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 4: Sumas superiores e inferiores

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Sumas superiores e inferiores				
Semestre:	VII	**Fecha:**	01/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Reconoce el uso del método de exhaución a través de sumas superiores e inferiores para el cálculo del área de una región bajo una curva.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la cuarta sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se comenta sobre la relevancia matemática del método de exhaución de Eudoxo y utilizada por Arquímides, como la aproximación significativa al valor de π y la cuadratura del segmento parabólico, además de los aportes de Descartes y Fermat.	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Mediante participación continua de los estudiantes, se subdivide a un intervalo $[a; b]$ en sub-intervalos de igual longitud, de modo que se utilizan las imágenes de sus extremos como altura de los rectángulos para definir las sumas superiores e inferiores. • Se calculan los valores de las sumas inferiores y superiores en el intervalo $[0; 1]$ a partir de la función con regla de correspondencia $f(x) = 3 - x^2$, esto a partir de 2 sub-intervalos. • Se invita a los estudiantes a calcular las sumas inferiores y superiores con 4 sub-intervalos, teniendo en cuenta la misma gráfica de la función. • Se pregunta ¿Cuál de los casos anteriores genera una mejor aproximación del área bajo la gráfica de la función?, luego se organizan las opiniones de los estudiantes. • Se presenta un conflicto cognitivo a través de un ejercicio de argumentación: Para cualquier función en un intervalo dado y con los mismos sub-intervalos ¿Las sumas superiores son siempre tienen un valor mayor a las sumas inferiores?	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se comenta sobre las características de las sumas intermedias y las sumas trapezoidales. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 6 de los 8 ejercicios, los cuales incluyen sumas inferiores, sumas superiores, sumas intermedias y sumas trapezoidales. Esto con la finalidad de una mayor familiarización con el tópico desarrollado. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 5: Integral definida. Teorema fundamental

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Integral Definida. Teorema fundamental				
Semestre:	VII	**Fecha:**	08/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad:
Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño:
Reconoce el concepto de la Integral Definida y el Teorema Fundamental del Cálculo a través de la resolución de problemas de contexto intra matemático.

Momento	**Actividades**	**Recursos y materiales**	**Tiempo (min)**
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la quinta sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se comenta sobre la relevancia matemática de Riemann en la precisión de la definición de la Integral Definida y su implicancia como un método general para el cálculo del área bajo una curva.	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se define la suma de Riemann con las condiciones que la caracterizan, además de la notación del x_i representativo como x_i^*. • Se realiza la interpretación geométrica de la suma de Riemann, para ello se divide al intervalo $[a;b]$ en 'n' sub-intervalos que no necesariamente sean iguales, pero cuando 'n' tiende al infinito, el ancho será el mismo y una cantidad extremadamente pequeña (un diferencial). • Se define la Integral Definida como el límite de la suma de Riemann en un intervalo definido $[a;b]$ en el que 'n' (el número de sub-intervalos) tiende al infinito. • Mediante preguntas a los estudiantes y aportes de los mismos, además del uso de la definición recién estudiada, se calcula el valor de $\int_2^4 x^2\,dx$. • Se dan a conocer las propiedades principales de la Integral Definida, algunas demostraciones y ejercicios aplicativos en los que los estudiantes aportan. • Se plantea un ejercicio que relaciona la derivada y la integral definida, el cual permite dar el preámbulo al Teorema Fundamental del Cálculo. • Se define el Teorema Fundamental del Cálculo, relacionando a la actividad anterior y ejemplificado con un ejercicio adicional.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 4 ejercicios, de los cuales 2 de ellos incluyen el uso de la comunicación matemática y el planteamiento de modelos. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 6: Área bajo una curva

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Área bajo una curva				
Semestre:	VII	**Fecha:**	12/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Relaciona la integral de Riemann con el cálculo del área bajo una curva.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la sexta sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se comenta sobre la influencia matemática que tuvo Riemann de matemáticos notables como Gauss, Dirichlet, entre otros.	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se precisa de forma oral y gráfica que con área bajo una curva se hace referencia al área de la región limitada por una curva, su proyección sobre un intervalo $[a; b]$ del eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. • Se muestran las principales características de representación del modelo a utilizar para el cálculo del área bajo la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ cuando la curva se proyecta al eje X. • Se invita a participar a los estudiantes para describir el modelo análogo para calcular el área de una región limitada por una curva definida por $x = f(y)$, el eje Y y dos rectas horizontales. • Con participación de los estudiantes se resuelve un ejercicio aplicativo para cada caso. • Se da a conocer la relación que existe entre la Integral Definida y el valor del área, interpretando que cuando $\Delta x \to 0$ puede entenderse como dx (diferencial). • Se define una función par y se pregunta a los estudiantes sobre las características de simetría sobre el eje de las ordenadas y su relación con el área bajo una curva. Esto con la finalidad de formalizar dicha relación en términos de la Integral Definida. • Se define la función impar y se invita a sacar conclusiones con la simetría existente de su gráfica respecto al origen y su relación con el área. Luego se formaliza la propiedad en términos de la Integral Definida y se resuelven 2 ejercicios. • A partir de lo visto anteriormente, se deduce el modelo para calcular el área de la región limitada por una curva, dos rectas paralelas entre sí y una recta paralela a uno de los ejes.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 4 ejercicios, los cuales tienen en cuenta el reconocimiento de representaciones, conceptos y argumentación del valor de verdad. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 7: Área entre dos curvas

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Área entre dos curvas				
Semestre:	VII	**Fecha:**	15/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Determina el área de la región limitada por dos curvas.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la séptima sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se pregunta ¿Qué entienden por área de la región comprendida entre dos curvas?	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se caracteriza al área de la región comprendida entre dos curvas, teniendo en cuenta que las proyecciones de las gráficas de las dos funciones sobre uno de los ejes sea la misma. Además, la región puede estar solamente limitada por ambas curvas como también estar limitada por dos curvas y dos rectas en función a los extremos del intervalo. • Con participación de los estudiantes, se deduce el modelo que permite calcular el área entre dos curvas en relación al eje X, para luego resolver 2 ejercicios aplicativos. • Con participación de los estudiantes se deduce el modelo que permite calcular el área entre dos curvas en relación al eje Y, para luego resolver 2 ejercicios aplicativos. • Los estudiantes realizan el análisis de los ejercicios resueltos del manual de ejercicios y se invita a dos estudiantes a realizar la explicación de los procedimientos utilizados en el manual. • Se resuelve un primer ejercicio de alta demanda cognitiva cálculo del área entre dos curvas, para ello se determinan las intersecciones de las gráficas de las funciones con los ejes, los puntos de intersección entre las gráficas, para precisar los límites inferior y superior de la Integral Definida. • Se resuelve el segundo ejercicio de alta demanda cognitiva, para ello se grafican dos funciones trigonométricas y sus intersecciones con los ejes y de las gráficas entre sí, para luego determinar el área de la región comprendida entre ambas gráficas.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 4 ejercicios, los cuales implican trazar la gráfica de funciones y/o ecuaciones y el modelado de la regla de correspondencia. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 8: Teorema del valor medio

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Teorema del valor medio				
Semestre:	VII	**Fecha:**	19/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Interpreta el Teorema del valor medio como la solución al problema de las cuadraturas.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la octava sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se pregunta ¿Recuerdan cuáles eran los 3 problemas clásicos que no pudieron ser resueltos con el uso de la regla y el compás?	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se presenta el valor medio como aquel número ‘c’ que pertenece al intervalo $[a;b]$ donde está definida la gráfica de una función, y que verifica $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$ • Se pregunta ¿Qué representa geométricamente el valor ‘c’? y los estudiantes generan sus interpretaciones. • Se plantea una función lineal positiva en un intervalo dado y se calcula el valor de ‘c’ que cumple el modelo brindado. Luego se invita a los estudiantes que contrasten el resultado con las interpretaciones anteriores. • Se plantea una función cuadrática no inyectiva en un intervalo dado y se calcula el valor de ‘c’ que cumple el modelo brindado. Luego se invita nuevamente a los estudiantes a que contrasten con las interpretaciones anteriores, de modo que se genera un conflicto cognitivo al obtener 2 valores de ‘c’. • Se brinda unos minutos para que los estudiantes propongan nuevas interpretaciones del valor de ‘c’ en el modelo brindado antes de la resolución de los ejercicios planteados. • Se institucionaliza la interpretación del valor $f(c)$ como la altura de un rectángulo cuya base es el intervalo $[a;b]$, de modo que dicho rectángulo es equivalente al área bajo la curva. En consecuencia, el área bajo la curva, ahora se transforma en un rectángulo y a partir de él se podrá determinarse la cuadratura.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 4 ejercicios, 2 de los cuales requieren del planteamiento de conjeturas y/o proposiciones en función a los conceptos aprendidos. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 9: Cálculo de volúmenes. Método del disco

Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Cálculo de volúmenes. Método del disco				
Semestre:	VII	**Fecha:**	22/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Determina el volumen de sólidos de revolución mediante el método del disco.

Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo (min)
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la novena sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se presentan los datos técnicos de una máquina mezcladora para elaborar concreto para construcciones y con base en ello se problematiza el cálculo de la profundidad del recipiente de dicha máquina.	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se comenta que con el tema que se verá hoy, se podrá hacer frente a la situación presentada y se inicia definiendo un sólido de revolución, a partir de una curva que gira alrededor de una recta fija. • Se pregunta ¿A qué se denomina volumen de un sólido de revolución? Luego se consolidan los aportes de los estudiantes y se institucionaliza como la medida de una parte del espacio limitada por una superficie. • Se explica el proceso de construcción y modelamiento del método del disco a través del 'rebanado' de un sólido de revolución, de modo que se relaciona la suma de Riemann con el modelo para el cálculo del volumen de un sólido de revolución a través de la suma de los volúmenes de discos de espesor bastante pequeño (dx). • Con participación de los estudiantes, se analiza el caso de un sólido de revolución cuando el giro es alrededor del eje Y, de modo que participan en la determinación de la Integral Definida que servirá para dicho cálculo, partiendo de $x = f(y)$. • Con participación de los estudiantes se analiza qué representa el valor de $f(x)$ en el método del disco, para establecer la Integral Definida cuando el eje de giro es paralelo al eje X. • Con participación de los estudiantes, se resuelven 2 ejercicios, tanto para la representación gráfica de la función y el sólido de revolución en el intervalo dado, como también para el proceso del cálculo del volumen.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se asigna como ejercicio domiciliario la situación planteada al inicio de la sesión. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 2 ejercicios, los cuales requieren el uso del método del disco. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

Sesión 10: Cálculo de volúmenes. Método de la arandela

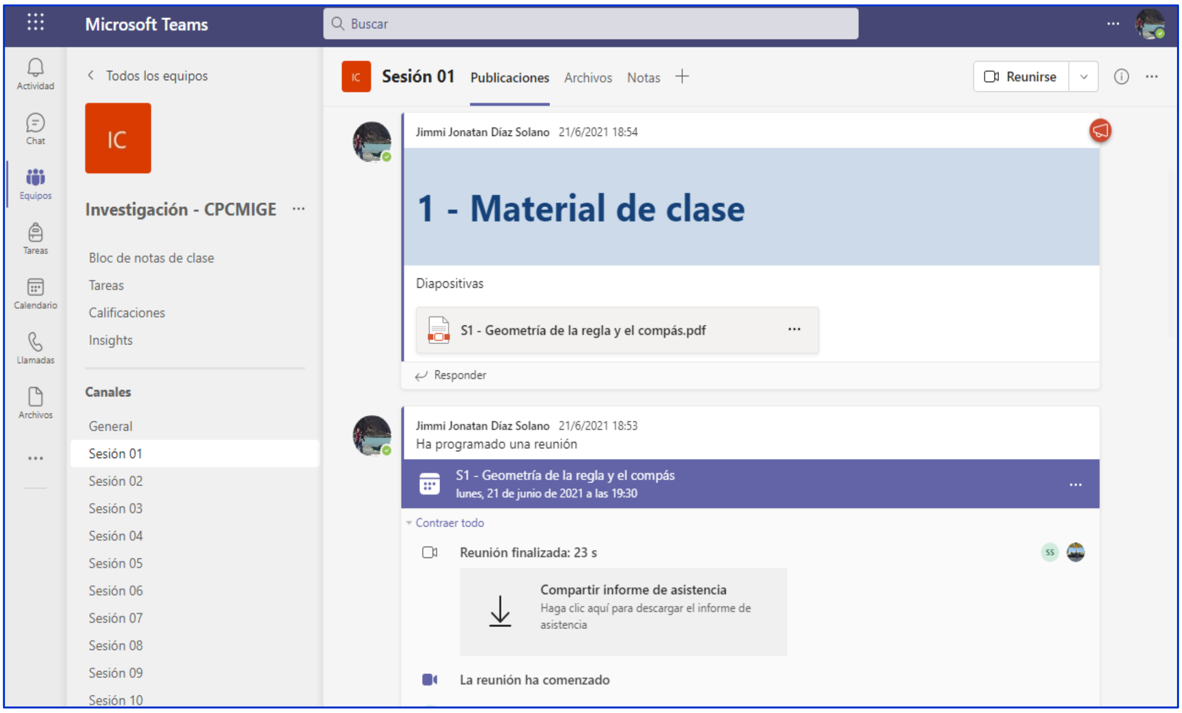
Asignatura:	Análisis Matemático II				
Tema:	Cálculo de volúmenes. Método de la arandela				
Semestre:	VII	**Fecha:**	26/07/21	**Periodo lectivo:**	2021-I

Capacidad: Maneja las representaciones, conceptos y proposiciones de la Integral Definida para utilizarlos en la resolución de problemas de contexto intra matemático, de contextos simulado y de contexto real.
Indicador de desempeño: Resuelve problemas que implican el cálculo de volúmenes mediante el método de la arandela.

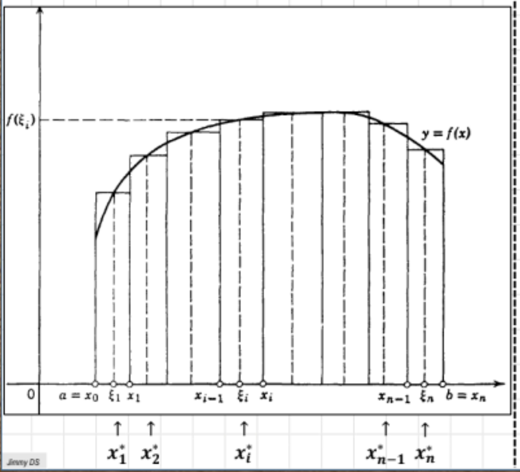
Momento	**Actividades**	**Recursos y materiales**	**Tiempo (min)**
INICIO	• Se brinda el saludo y bienvenida a la décima sesión del proceso de aprendizaje de la Integral Definida con fines investigativos y se explica el indicador de desempeño para la clase. • Se presenta una situación de contexto real que consiste en estimar el precio de un anillo de oro de $24\,k$ con base en medidas estándar.	• Expresión oral. • Diapositivas.	10
PROCESO	• Se comenta que con el tema que se verá hoy, se podrá hacer frente a la situación presentada y se inicia caracterizando a la arandela como pieza de montaje. • Se describen las condiciones que deben cumplir las gráficas de dos funciones en un intervalo dado para que se pueda aplicar el método de la arandela. • Con base en el método del disco, se induce a los estudiantes a realizar una diferencia entre los volúmenes de dos discos concéntricos, de modo que se obtiene la Integral Definida que permite el cálculo del volumen de un sólido de revolución a través de arandelas de espesor dx. • Con la participación de los estudiantes y por analogía con la Integral Definida en relación al eje X, se determina el modelo que permite calcular el volumen, cuando el eje de giro es el eje de las ordenadas. • Se resuelven 2 ejercicios, teniendo en cuenta los aportes de los estudiantes en la representación gráfica, tanto alrededor del eje X como alrededor del eje Y; de modo que los estudiantes participan en la determinación del intervalo $[a; b]$ para realizar el cálculo de la Integral Definida.	• Expresión oral. • Diapositivas. • Regla. • Compás. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung. • Registro. • GeoGebra.	40
SALIDA	• Se aclaran las dudas que se presentaron durante la explicación teórica y la resolución de ejercicios. • Se brindan las indicaciones para que los estudiantes resuelvan en los espacios brindados en el manual 1 ejercicio, el cual requiere el uso del método de la arandela para el cálculo del volumen de un sólido de revolución. • Se felicita a los estudiantes por la atención brindada y se invita a seguir esforzándose en las sesiones posteriores.	• Registro. • Manual de ejercicios. • Pizarra virtual Samsung.	15

ANEXO 08

CLASES GRUPO EXPERIMENTAL



INTEGRAL DEFINIDA. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO



1. Suma de Riemann

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a;b]$. Una suma de Riemann (o suma de integral) de $f(x)$ en $[a;b]$ es una suma de la forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

Donde:

i) $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_n = b$

ii) $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

iii) x_i^* es un número tal que $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$

x_i^* es un número representativo del intervalo $[x_{i-1}; x_i]$

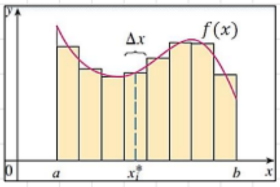
Interpretación de la suma de Riemann

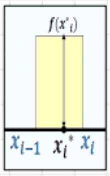
Sea $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en $[a;b]$. Mientras crezca más el número de intervalos habrá mayor tendencia a que tengan igual ancho en la base, en el infinito, el intervalo se particiona en n subintervalos de igual ancho Δx. Entonces:

1. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

2. $x_i = a + i \cdot \Delta x$

3. $f(x_i^*)$ significa que se evalúa x_i^* en $f(x)$.





Note que $f(x_i^*) \cdot \Delta x$ es el área del rectángulo.

2. Integral definida

Sea f una función continua y definida en el intervalo cerrado $[a;b]$. Si existe:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x\right]$$

Entonces la **integral definida** desde a hasta b está dada por:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x\right]$$

Partes de la Integral Definida

Límite superior de integración

Integrando

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Límite inferior de integración

Variable de integración

Ejercicios:

1) Calcule $\int_2^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x\right)$

$\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i^* = 2 + i \cdot \frac{2}{n}$

$$\int_2^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n} + \frac{16i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{8}{n} + \frac{16}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8 + \lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n^2+n}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 8 + 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} + \frac{4}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + \ldots}{n^3}$$

$$= 8 + 8 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1}$$

$$= 16 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{56}{3}$$

3. Propiedades

1ra Si $f(x) \geq 0$; $\forall x \in [a;b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

2da Si $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$, entonces:

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

3ra Si f y g son integrables en $[a;b]$ y $\alpha,\ \beta$ constantes, entonces $\alpha f \pm \beta g$ es integrable en $[a;b]$ y también:

$$\int_a^b (\alpha f \pm \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

4ta Si f es integrable en $[a;b]$ y $c \in [a;b]$, entonces f es integrable en $[a;c]$ y en $[c;b]$. Además:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5ta Si f es integrable en $[a;b]$, se cumple que:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejercicios:

2) Si $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = 7$, calcule el valor de:

$$A = \int_{-1}^{3} (8g(x) - 10)\,dx$$

3) Si $3 \cdot \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^3 f(x)\,dx = 12$ Calcule el valor de $\int_0^{-3} f(x)\,dx$

Jimmy DS

2) $A = 8\int_{-1}^{3} g(x)\,dx - \int_{-1}^{3} 10\,dx$

$= 8 \cdot 7 - 10\cdot(3+1)$

$= 56 - 40$

$= 16$

3) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx$

$4 = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + 6$

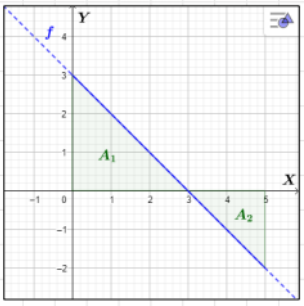
$-2 = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

$-2 = -\int_0^{-3} f(x)\,dx$

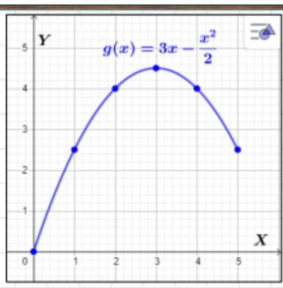
$\Rightarrow \int_0^{-3} f(x)\,dx = 2$

Jimmy DS

4) Dada la función f con regla de correspondencia $f(x) = 3 - x$, definida en $[0;5]$ y su respectiva gráfica.



Al realizar el ajuste de la función g cuya regla de correspondencia está dada por $g(x) = \int_0^x f(x)\,dx$, para $0 \leq x \leq 5$, se obtiene la gráfica:



a) ¿Cuál es el máximo valor de g? y ¿qué representa respecto a f?

b) ¿En qué intervalo la función g es creciente? y ¿qué representa ese crecimiento para f?

c) ¿En qué intervalo la función g es decreciente? y ¿qué representa ese decrecimiento para f?

Jimmy DS

5) *Modele en términos de a y b el valor de:*

$$\int_a^b x\,dx$$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$x_i^* = a + i.\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(a + i\,\frac{(b-a)}{n}\right).\frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ab-a^2}{n} + \frac{(b-a)^2.i}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{ab-a^2}{n}.\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{(b-a)^2}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{ab-a^2}{\cancel{n}}.\cancel{n} + \frac{b^2-2ab+a^2}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (ab-a^2) + \frac{b^2-2ab+a^2}{2}.\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$

$$= \cancel{ab} - a^2 + \left(\frac{b^2}{2} - \frac{\cancel{2ab}}{2} + \frac{a^2}{2}\right).\frac{1}{1}$$

$$= -a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Jimmy DS

4. Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema fundamental del cálculo (Parte 1)

Si f es una función continua en $[a;b]$, entonces la función g, definida por:

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ a \le x \le b$$

es continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$, además se verifica que $g'(x) = f(x)$

Teorema fundamental del cálculo (Parte 2)

Si f es una función continua en $[a;b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$

Ejercicios:

6) *Calcule el valor de:*

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \underbrace{\ln|x|}_{F(x)} + c$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = F(e^2) - F(e)$$

$$= \ln e^2 - \ln e$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

Jimmy DS

EJERCICIOS ADICIONALES

1. *Mediante el uso de la suma de Riemann, modele en términos de a y b el valor de:*

$$\int_a^b x^2\,dx$$

2. *Argumente respecto al valor de verdad de la siguiente proposición:*

Dadas las funciones f y g, continuas en $[a;b]$, si se cumple $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, entonces el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje X es mayor que el área de la región limitada por la gráfica de g y el eje X.

3. *Sea f una función continua que verifica:*

$$\int_2^5 [f(x) - 3]\,dx = 1 \ ; \ \frac{\int_2^4 f(x)\,dx}{\int_4^5 f(x)\,dx} = \frac{3}{2}$$

Determine el valor de $\int_2^4 f(x)\,dx$

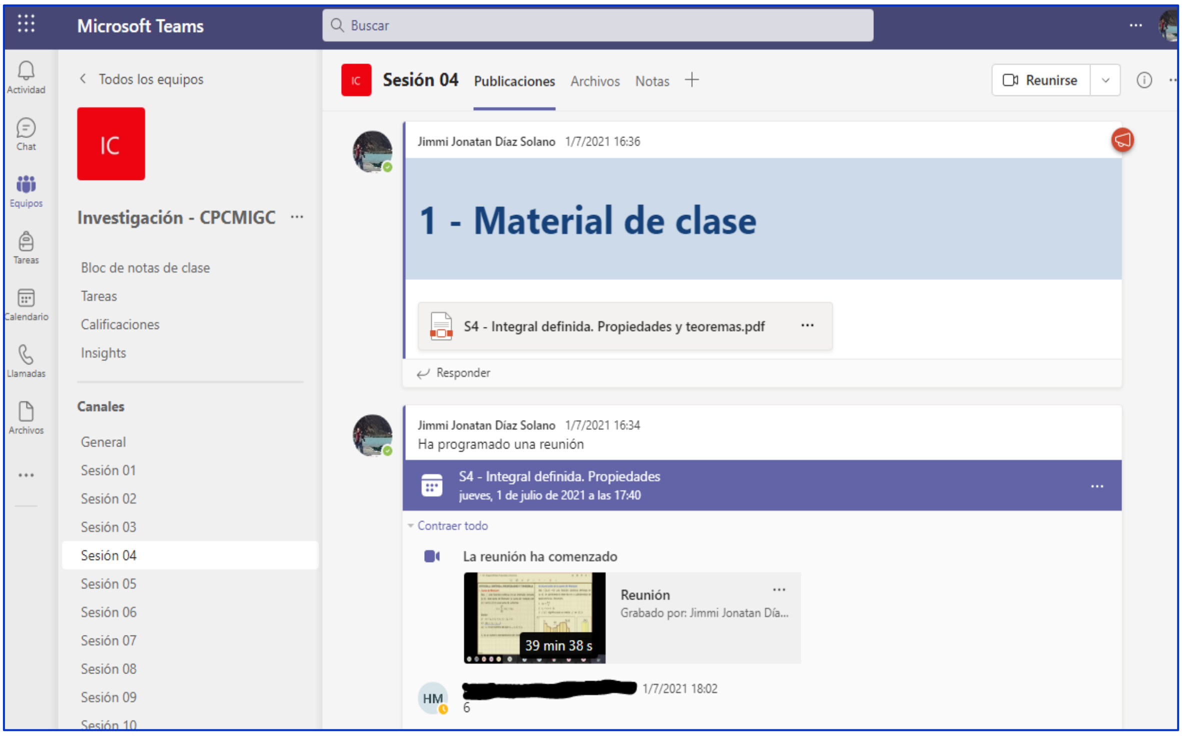
4. *Calcule el valor de:*

$$\int_0^5 [x^2 - |x-2|]\,dx$$

Jimmy DS

ANEXO 09

CLASES GRUPO CONTROL



ANEXO 10

VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS POR EXPERTOS

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN
HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: PREPRUEBA

Nombre del experto:	*Carlos Fernando López Rengifo*	Grado:	*Doctor*
Institución donde labora:	*Universidad Nacional del Centro del Perú*	Mención:	*Ciencias de la Educación*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	ÍTEM	INDICADOR	RELEVANCIA	COHERENCIA	SUFICIENCIA	CLARIDAD
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4		4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4		4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4		4
	5		4	4		4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4		4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4		4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4		4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI (   )** **NO (x)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (x)** **NO (   )**

Dr. Carlos F. López Rengifo
Docente UP-FE-UNCP

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: POSPRUEBA

Nombre del experto:	*Carlos Fernando López Rengifo*	Grado:	*Doctor*
Institución donde labora:	*Universidad Nacional del Centro del Perú*	Mención:	*Ciencias de la Educación*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1**: No cumple con el criterio, **2**: Bajo nivel, **3**: Moderado nivel, **4**: Alto nivel*

DIMENSIÓN	*ÍTEM*	*INDICADOR*	*RELEVANCIA*	*COHERENCIA*	*SUFICIENCIA*	*CLARIDAD*
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	*4*	*4*		*4*
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	*4*	*4*		*4*
	3		*4*	*4*	*4*	*4*
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	*4*	*4*		*4*
	5		*4*	*4*		*4*
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	*4*	*4*		*4*
	7		*4*	*4*	*4*	*4*
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	*4*	*4*		*4*
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	*4*	*4*		*4*
	10		*4*	*4*	*4*	*4*
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	***100%***	***100%***	***100%***	***100%***

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI ( )** **NO (x)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (x)** **NO ( )**

Dr. Carlos F. López Rengifo
Docente UP-FE-UNCP

UNIVERSIDAD NACIONAL "HERMILIO VALDIZÁN" DE HUÁNUCO

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: PREPRUEBA

Nombre del experto:	Alejandro Rubina López	Grado:	Doctor
Institución donde labora:	UNHEVAL	Mención:	Doctor en Educación

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	***ÍTEM***	***INDICADOR***	***RELEVANCIA***	***COHERENCIA***	***SUFICIENCIA***	***CLARIDAD***
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4	4	4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4	4	4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4	4	4
	5		4	4	4	4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4	4	4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4	4	4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4	4	4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	***100%***	***100%***	***100%***	***100%***

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI (   ) NO (X)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (X) NO (   )**

Alejandro Rubina López
D.N.I 22755973

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL "HERMILIO VALDIZÁN" DE HUÁNUCO

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: POSPRUEBA

Nombre del experto:	Alejandro Rubina López	Grado:	Doctor
Institución donde labora:	UNHEVAL	Mención:	Doctor en Educación

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	ÍTEM	INDICADOR	RELEVANCIA	COHERENCIA	SUFICIENCIA	CLARIDAD
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4	4	4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4	4	4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4	4	4
	5		4	4	4	4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4	4	4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4	4	4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4	4	4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	100%	100%	100%	100%

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI ( ) NO (X)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (X) NO ( )**

Alejandro Rubina López
D.N.I 22755973

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN
HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: PREPRUEBA

Nombre del experto:	*Marta Celinda Ríos Zea*	Grado:	*Doctor*
Institución donde labora:	*Universidad Nacional del Centro del Perú*	Mención:	*Ciencias de la Educación*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	*ÍTEM*	*INDICADOR*	*RELEVANCIA*	*COHERENCIA*	*SUFICIENCIA*	*CLARIDAD*
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4	3	4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4	4	4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4	4	4
	5		4	4	4	4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4	4	4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4	4	4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4	4	4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI ( ) NO (x)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (x) NO ( )**

Marta Ríos Z

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN
HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: POSPRUEBA

Nombre del experto:	*Marta Celinda Ríos Zea*	Grado:	*Doctor*
Institución donde labora:	*Universidad Nacional del Centro del Perú*	Mención:	*Ciencias de la Educación*

Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores ***1:*** *No cumple con el criterio,* ***2:*** *Bajo nivel,* ***3:*** *Moderado nivel,* ***4:*** *Alto nivel*

DIMENSIÓN	ÍTEM	INDICADOR	RELEVANCIA	COHERENCIA	SUFICIENCIA	CLARIDAD
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4	3	4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4	4	4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4	4	4
	5		4	4	4	4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4	4	4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4	4	4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4	4	4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI (   )** **NO (x)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (x)** **NO (   )**

Marta Ríos Z

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: PREPRUEBA

Nombre del experto:	*Adalberto Lucas Cabello*	Grado:	*Dr.*
Institución donde labora:	*UNHEVAL*	Mención:	*Ciencias de la Educación*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	*ÍTEM*	*INDICADOR*	*RELEVANCIA*	*COHERENCIA*	*SUFICIENCIA*	*CLARIDAD*
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	*4*	*4*	*4*	*4*
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	*4*	*4*	*4*	*4*
	3		*4*	*4*	*4*	*4*
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	*4*	*4*	*4*	*4*
	5		*4*	*4*	*4*	*4*
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	*4*	*4*	*4*	*4*
	7		*4*	*4*	*4*	*4*
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	*4*	*4*	*4*	*4*
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	*4*	*4*	*4*	*4*
	10		*4*	*4*	*4*	*4*
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	***100%***	***100%***	***100%***	***100%***

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI (   ) NO (X)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (X) NO (   )**

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: POSPRUEBA

Nombre del experto:	*Adalberto Lucas Cabello*	Grado:	*Dr.*
Institución donde labora:	*UNHEVAL*	Mención:	*Ciencias de la Educación*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	***ÍTEM***	***INDICADOR***	***RELEVANCIA***	***COHERENCIA***	***SUFICIENCIA***	***CLARIDAD***
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	*4*	*4*	*4*	*4*
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	*4*	*4*	*4*	*4*
	3		*4*	*4*	*4*	*4*
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	*4*	*4*	*4*	*4*
	5		*4*	*4*	*4*	*4*
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	*4*	*4*	*4*	*4*
	7		*4*	*4*	*4*	*4*
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	*4*	*4*	*4*	*4*
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	*4*	*4*	*4*	*4*
	10		*4*	*4*	*4*	*4*
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	***100%***	***100%***	***100%***	***100%***

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI (   )** **NO (X)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta?

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (X)** **NO (   )**

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: PREPRUEBA

Nombre del experto:	*Godofredo Luis Cajachahua Espinoza*	Grado:	*Doctor*
Institución donde labora:	*Consultor Pedagógico (Independiente)*	Mención:	*Psicología Educacional y Tutorial*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	*ÍTEM*	*INDICADOR*	*RELEVANCIA*	*COHERENCIA*	*SUFICIENCIA*	*CLARIDAD*
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4	4	4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4	4	4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4	4	4
	5		4	4	4	4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4	4	4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4	4	4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4	4	4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	***40/100%***	***40/100%***	***40/100%***	***40/100%***

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI ( ) NO (X)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta? ***Ninguno***

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (X) NO ( )**

Firma y sello del experto

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN
HUÁNUCO – PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALIDACIÓN POR JUECES O EXPERTOS

Instrumento: POSPRUEBA

Nombre del experto:	*Godofredo Luis Cajachahua Espinoza*	Grado:	*Doctor*
Institución donde labora:	*Consultor Pedagógico (Independiente)*	Mención:	*Psicología Educacional y Tutorial*

*Calificar en función a los criterios Relevancia, Coherencia, Suficiencia y Claridad; para ello utilice los valores **1:** No cumple con el criterio, **2:** Bajo nivel, **3:** Moderado nivel, **4:** Alto nivel*

DIMENSIÓN	*ÍTEM*	*INDICADOR*	*RELEVANCIA*	*COHERENCIA*	*SUFICIENCIA*	*CLARIDAD*
APRENDIZAJE DE REPRESENTACIONES	1	Codifica frases de contexto matemático.	4	4	4	4
	2	Decodifica representaciones simbólicas en un contexto matemático.	4	4	4	4
	3		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE CONCEPTOS	4	Conoce el concepto, su descripción, interpretación y/o aplicación.	4	4	4	4
	5		4	4	4	4
	6	Identifica las operaciones, relaciones, propiedades y modo de uso del concepto.	4	4	4	4
	7		4	4	4	4
APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES	8	Genera proposiciones mediante la combinación de conceptos.	4	4	4	4
	9	Establece propiedades a partir de conceptos matemáticos.	4	4	4	4
	10		4	4	4	4
		PUNTAJE OBTENIDO / PORCENTAJE	*40/100%*	*40/100%*	*40/100%*	*40/100%*

¿Hay alguna dimensión o ítem que no fue evaluado? **SI ( )** **NO (X)** En caso de SI, ¿qué dimensión o ítem falta? ***NINGUNO***

DECISIÓN DEL EXPERTO: El instrumento debe ser aplicado: **SI (X)** **NO ( )**

Firma y sello del experto

NOTA BIOGRÁFICA

Jimmi Jonatan Diaz Solano, nació un lunes 3 de agosto de 1987 en la provincia de Yauli, en la región Junín, Perú. Desde sus estudios en educación primaria y secundaria tuvo afinidad tanto por las áreas de Ciencias y Letras, pero en los últimos grados de Educación secundaria se generó en él mayor apego a las Matemáticas, de manera que el año 2004 comienza sus estudios universitarios en la especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Pedagogía y Humanidades (actualmente Facultad de Educación) en la Universidad Nacional del Centro del Perú (UNCP).

Luego de algunos años de labor docente en educación secundaria en el sector privado, así como en SENATI, su afinidad por la enseñanza y los deseos de superación profesional hicieron que decida realizar estudios de maestría en Ciencias de la Educación con mención en Educación Matemática en la Universidad Nacional Enrique Guzmán y Valle “La Cantuta” (UNE), en cuyo proceso tuvo como compañeros de clase a profesionales que laboraban en la Universidad San Ignacio de Loyola (USIL) y que, al cabo de poco tiempo fue invitado a postular como docente en dicha Universidad, laborando ahí desde fines del año 2014 hasta inicios del 2018. Posteriormente, fue ganador de un puesto de contrato administrativo de servicios (CAS) para laborar como docente en uno de los 24 Colegios de Alto Rendimiento (COAR) donde se le amplió el contrato hasta por 3 años, sin embargo, al cabo de 2 años (2020) decide regresar al ámbito universitario y es al momento de la culminación de este trabajo de investigación que se encuentra laborando como docente contratado en la Universidad Nacional del Centro del Perú, su alma máter.

Por último, cabe señalar que su tesis para obtener la licenciatura fue un trabajo monográfico sobre el origen de las Matemáticas, su investigación para obtener el grado de Maestro fue un trabajo con enfoque cuantitativo respecto al uso de los Poliminós y su influencia en el Aprendizaje de las Matemáticas, es decir, siempre se ha mantenido en la línea de investigación relacionada a la Educación Matemática, al igual que la investigación que ahora se presenta.

ACTA DE DEFENSA DE TESIS DE DOCTOR

En la Plataforma del Microsoft Teams de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Educación, siendo las **19:00h,** del día **13 DE ABRIL DE 2022;** el aspirante al **Grado de Doctor en Ciencias de la Educación, Don Jimmi Jonatan DIAZ SOLANO**, procedió al acto de Defensa de su Tesis titulado: **INFLUENCIA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO REMOTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA,** ante los miembros del Jurado de Tesis señores:

Dr. Amancio Ricardo ROJAS COTRINA	Presidente
Dra. Clorinda Natividad BARRIONUEVO TORRES	Secretario
Dr. Haiber Policarpo ECHEVARRÍA RODRIGUEZ	Vocal
Dr. José Wuencislao CONDEZO MARTEL	Vocal
Dr. Hilarión Delermino PAUCAR COZ	Vocal

Asesor de tesis: Dr. Arturo LUCAS CABELLO (Resolución N° 0409-2021-UNHEVAL-FCE/D)

Respondiendo las preguntas formuladas por los miembros del Jurado y público asistente.

Concluido el acto de defensa, cada miembro del Jurado procedió a la evaluación del aspirante al Grado de Doctor, teniendo presente los criterios siguientes:

a) Presentación personal.
b) Exposición: el problema a resolver, hipótesis, objetivos, resultados, conclusiones, los aportes, contribución a la ciencia y/o solución a un problema social y recomendaciones.
c) Grado de convicción y sustento bibliográfico utilizados para las respuestas a las interrogantes del Jurado y público asistente.
d) Dicción y dominio de escenario.

Así mismo, el Jurado planteó a la tesis **las observaciones** siguientes:
....
....
....

Obteniendo en consecuencia el Doctorando la Nota de........DIECISÉIS........ (16),
Equivalente a ....BUENO........, por lo que se declara ....APROBADO........
(Aprobado ó desaprobado)

Los miembros del Jurado firman el presente **ACTA** en señal de conformidad, en Huánuco, siendo las.....20:30..... horas de 13 de abril de 2022.

PRESIDENTE
DNI N°.....04025628.....

SECRETARIO
DNI N°.....22422313.....

VOCAL
DNI N°.....22669203.....

VOCAL
DNI N°.....22651202.....

VOCAL
DNI N°.....22719856.....

Leyenda:
19 a 20: Excelente
17 a 18: Muy Bueno
14 a 16: Bueno

(RESOLUCIÓN N° 0592-2022-UNHEVAL-FCE/D)

UNIVERSIDAD NACIONAL HERMILIO VALDIZÁN

UNIDAD DE POSGRADO DE EDUCACIÓN

CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD

El que suscribe:

Dra. Clorinda Natividad Barrionuevo Torres

HACE CONSTAR:

Que, la tesis titulada: ***INFLUENCIA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO REMOTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA,*** *realizado por el Doctorando en Ciencias de la Educación* ***Jimmi Jonatan DIAZ SOLANO****, cuenta con un* ***índice de similitud del 18%****, verificable en el Reporte de Originalidad del software* ***Turnitin.*** *Luego del análisis se concluye que cada una de las coincidencias detectadas no constituyen plagio; por lo expuesto, la Tesis cumple con todas las normas para el uso de citas y referencias, además de presentar un índice de similitud máxima de 20% establecido en el Reglamento General de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán.*

Cayhuayna, 01 de marzo de 2022.

DRA. CLORINDA NATIVIDAD BARRIONUEVO TORRES
DIRECTORA
UNIDAD DE POSGRADO - EDUCACIÓN

CNS

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DE TESIS ELECTRÓNICA DE POSGRADO

1. **IDENTIFICACIÓN PERSONAL**

Apellidos y Nombres: DIAZ SOLANO, JIMMI JONATAN

DNI: 44436159 **Correo electrónico:** jlakes.ds@gmail.com

Teléfono de casa: **Celular:** 917753956 **Oficina:**

2. **IDENTIFICACIÓN DE LA TESIS**

POSGRADO
Doctorado: CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Grado obtenido:

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Título de la tesis:

INFLUENCIA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO REMOTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Tipo de acceso que autoriza el autor:

Marcar "X"	**Categoría de acceso**	**Descripción de acceso**
X	PÚBLICO	Es público y accesible el documento a texto completo por cualquier tipo de usuario que consulta el repositorio.
	RESTRINGIDO	Solo permite el acceso al registro del metadato con información básica, mas no al texto completo.

Al elegir la opción "Público" a través de la presente autorizo de manera gratuita al Repositorio Institucional – UNHEVAL, a publicar la versión electrónica de esta tesis en el Portal Web repositorio.unheval.edu.pe, por un plazo indefinido, consintiendo que dicha autorización cualquier tercero podrá acceder a dichas páginas de manera gratuita, pudiendo revisarla, imprimirla o grabarla, siempre y cuando se respete la autoría y sea citada correctamente.

En caso haya marcado la opción "Restringido", por favor detallar las razones por las que se eligió este tipo de acceso:

Asimismo, pedimos indicar el periodo de tiempo en que la tesis tendría el tipo de acceso restringido:

( ) 1 año ( ) 2 años ( ) 3 años ( ) 4 años

Luego del periodo señalado por usted(es), automáticamente la tesis pasará a ser de acceso público.

Fecha de firma: 31/09/2022

Firma del autor